MEMORIE

DI MATEMATICA E DI FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA

DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

TOMO XXII.

PARTE

CONTENENTE LE MEMORIE DI MATEMATICA

MODENA

NELLA R. TIPOGRAFIA CAMERALE

MDCCCXXXIX.

INDICE

DI QUANTO CONTIENE

LA PARTE MATEMATICA DEL TOMO XXII

DELLE PRESENTI MEMORIE

ELENCO DEI LIBRI

MANDATI IN DONO

ALLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

Dal Giugno 1837 a tutto Aprile 1839.

Taddei Prof. Gioacchino. Repertorio dei veleni, e contravveleni. 8.° Firenze 1835. Tomi due.

Santini Prof. Giovanni. Ricerche intorno alla massa di Giove determinata mediante la digressione del suo quarto Satellite ec. 4.° Modena 1836.

—— Opuscoli Astronomici intorno alle Comete osservate nell' I. R. Osservatorio di Padova dall'anno 1830 al 1835. 4.° ivi 1836.

Società Reale di Londra. Indirizzo del Presidente della Società R. il Duca di Sussex letto nella radunanza annua del 30 Novembre 1836. 4.° Londra 1836.

—— Catalogo dei membri nazionali e stranieri della Società R. 4.° ivi 1836.

—— Transazioni Filosofiche anno 1836 divise in due parti. 4.° Londra ap. Taylor.

—— Processi verbali delle radunanze della Società Reale Numeri 27.° 28.° 17 Novembre ed 8 Dicembre 1836.

Catalogo di 7385 stelle specialmente dell' emisfero meridionale preparato dalle osservazioni fatte negli anni 1822 al 1826 all' Osservatorio di Paramatta nella Nuova Wales meridionale dal *Luogotenente generale Signor Tommaso Makdougall Brisbanne.*

I calcoli sono opera del *Signor Guglielmo Richardson* attaccato all' Osservatorio Reale di Greenwich; e il Catalogo è stato pur da lui compilato, e stampato poi per

ordine dei lord Commissarj dell'Ammiragliato. 4.° Londra appresso Clewes e figlj 1835.

Cooper Eduardo. Figura e descrizione della Cometa d'Halley alli 22 e 24 Ottobre 1835 veduta nel suo Telescopio lungo piedi 25.

Società Astronomica Reale di Londra. Sue Memorie Volume IX con due tavole in rame, ed una litografica. 4.° Londra 1836 presso I. Weale.

Associazione Britannica. Relazione della quinta radunanza della Società Britannica per l'avanzamento della Scienza tenuta a Dublino nell'anno 1835. 8.° Londra appresso Murray 1836.

Belli Professor Giuseppe. Sulla dispersione delle due elettricità e sui residui delle scariche delle bocce di Leyden. Memoria seconda. 8.° Milano 1837.

Zamboni Abate Professor Giuseppe. Sull'argomento delle Pile secche contro la teoria elettro-chimica. Risposta ad una nota del Sig. Dottor Ambrogio Fusinieri. 8.° Verona Tip. Ramanzini 1836.

Bullettino delle Scienze mediche. Agosto a tutto Dicembre 1837 e 1838 da Gennajo a tutto Dicembre. Bologna.

Istituto I. R. del Regno Lombardo Veneto. Sue Memorie in 4.° T. IV. Milano 1833.

—— Memoria intorno al miglioramento dei formaggi Lombardi. 8.° Milano 1837. *Memoria che ottenne dall'Istituto l' accessit.*

Cattaneo Luigi. Il Caseificio, o la fabbricazione dei formaggi. *Memoria premiata dall' Istituto stesso.* 8.° Milano 1837.

Sormanni Dottor Napoleone Massimiliano. Monografia delle morti repentine. *Memoria premiata dall' Istituto stesso.* 8.° Milano 1834.

Ferrario Dottor Giuseppe. Statistica delle morti improvvise. *Memoria pubblicata per decisione dell'I. R. Istituto stesso.* 8. Milano 1834.

Fantonetti Dott. Gio. Battista. Le miniere metalliche dell' Ossola in Piemonte descritte. 8.° Milano 1836.

Mainardi Professor Gaspare. Lezioni di introduzione al calcolo sublime. Parte prima. 8.° Pavia 1836.

—— Sullo sviluppo imperfetto di una Curva piana.

—— Estensione di un teorema memorabile di Giovanni Bernulli. Dagli Annali di Scienze del Dottor Fusinieri. T. VII. Gennajo e Febbrajo 1837.

Pezzana Cavaliere Angelo. Continuazione della storia di Parma T. I. dal 1346 al 1400. 4.° ivi 1837.

Casa (de la) Professor Vittorio. Un facile metodo per determinare le relazioni differenziali. 4.° Padova 1837.

Zantedeschi Professor Francesco. Nota dell'influenza reciproca dell' elettro-magnetismo dei corpi: Biblioteca Italiana T. 87. 8.° Milano 1837.

—— Della natura delle calamite e degli scandagli magnetici ivi T. 86.

—— Reclamo contro un articolo del Sig. D. Al. Donnè sulle scoperte magneto-elettriche. 8.° Milano nella Gazzetta privilegiata.

Kupffer A. T. Resultato delle Osservazioni meteorologiche e magnetiche fatte nell' Impero Russo compilato dal Sig. Kupffer membro dell'Accademia delle Scienze di Russia, e spedito in dono alla Società da Sua Eccellenza Cancrine Ministro delle Finanze dell' Impero N. I. II. 4.° Pietroburgo 1837.

Effemeridi Astronomiche di Milano per il 1838. ivi 1837. 8.°

Memorie della Società Medico-chirurgica di Bologna f.° 4.° del Vol. I. ivi 1838 in 4.°

Jandelli Vittorio. Biografia del Prof. Domenico Morichini. 8.° Roma 1837.

Sandri Giulio. Sulla vera causa del *Carolo* del riso e sui mezzi di riparare a questo disastro. 8.° Verona 1838.

Cominzoni Dottor Angelo. Esperienze dirette a conoscere l'efficacia dei due metodi *profilatico* e *curativo* proposti dal

Dottor Agostino Bassi di Lodi a prevenire e curare la malattia del Calcino nei bachi da seta. 8.° ivi 1838.

Savi Professor Paolo. Due memorie geologiche sui terreni stratificati dipendenti o annessi alle masse serpentinose, e sui varj sollevamenti ed abbassamenti che han dato alla Toscana la sua attuale configurazione. 8.° Pisa 1838.

Scortegagna Dottor Francesco Orazio. Due memorie sulla formazione geologica della Collina detta la *Favorita* e sopra le ossa dei Cocodrilli della *Favorita*. 8.° Verona 1836.

Zantedeschi Professor Francesco. Dei principj generatori delle umane cognizioni Memoria. 8.° Milano 1838.

—— Esperimenti di induzione e polarizzazione termo-elettrica 8.° ivi 1838 nel T. 89 della Biblioteca Italiana.

Raccoltà degli Atti della seduta pubblica dell'Accademia Imperiale delle Scienze di Pietroburgo, tenuta il 30 Dicembre 1836. 4.° ivi 1837.

Memorie dell'I. Accademia. Scienze matematiche, fisiche e naturali. T. III. Parte I. delle Scienze matematiche e fisiche. Fascicolo quarto del T. I.

—— Parte II del T. IV scienze naturali Fascicolo III. del secondo Tomo. Pietroburgo 1836. in 4.°

—— Scienze politiche. Storia e filologia. T. III. Fascicolo sesto. T. IV. Fascicolo secondo ivi 1836. 4.°

Struve F. G. W. Stellarum duplicium et multiplicium mensurae micrometricae per magnum Fraunhoferi tubum annis 1824 ad 1837 institutae ec. f.° Atlant. Petropoli ex Typographia Accademiae 1837.

—— Stelle doppie. Rapporto fatto a Sua Eccellenza il Signor Douvaroff Ministro Segretario di Stato sulla misura di dette stelle. 8.° Pietroburgo.

Brera Cavaliere Valeriano Luigi. Ischl e Venezia. Memoria sulla felice influenza del clima della Città di Venezia e de' sussidj ivi dalla natura e dall'arte apprestati nel corso dell' inverno per la continuazione delle cure istituite in

Ischl nell' estate ec. e Cenno sulla opportunità del clima Veneto per favorire durante l'inverno la bibita delle acque di Recoaro ec.

Colla giunta delle epoche biografiche dell' Autore 8.° Venezia 1838.

Memorie dell'Accademia Reale delle Scienze di Lisbona dall' anno 1780 sino alla parte I. dell' anno 1837. Tomi XII in 4.° in lingua Portoghese. Lisbona nella Tipografia dell' Accademia.

Meneghini Dottor Giuseppe socio di più Accademie. Cenni sulla organografia e fisiologia delle Alghe f.° Padova 1838.

Belli Professor Giuseppe. Corso elementare di Fisica sperimentale T. III. Milano 1838. 8.°

Memorie dell' I. R. Istituto di Milano. T. V. Milano 1838 in 4.°

Associazione Britannica per l'avanzamento della Scienza. Rapporto della sesta radunanza tenuta a Bristol nel mese di Agosto 1836. 8.° Londra.

Sedute della R. Accademia Irlandese per il 1836-37. Parte I. 8.° Dublino 1837.

Transazioni della Società geologica di Londra; serie seconda. Vol. V. parte I. 4.° Londra 1837.

Transazioni filosofiche della Società Reale di Londra per l'anno 1837. Parti due 4.° ivi 1837.

Sussex (di) Duca, Presidente della Società Reale di Londra. Indirizzo alla Società letto nell' adunanza generale del 30 Novembre 1837 stampato a richiesta dei Socj. 8.° ivi 1837.

Sedute della Società R. 1837. 1838. Numeri 29.° 30.° 31.° ivi. 8.° Indice delle Memorie stampate nelle Transazioni filosofiche della Società stessa dal 1830 al 1837 *inclusive.* Vol. III.° ivi 8.°

Indirizzo del Presidente della Società R. e di tutta la Società alla Regina del 18 Novembre 1837. 8.°

Tutti questi libri venuti da Londra sono scritti in lingua Inglese come pure li due seguenti.

Difesa della risoluzione presa di omettere le note bibliografiche del Sig. Panizzi nel Catalogo della Società Reale. 8.° Torino 1827. T. I.°

Catalogo dei membri della Società stessa per l'anno 1837. 4.°

Memorie della Società medico-chirurgica di Bologna Vol. II. Fasc. I. in 4.° ivi 1838. *Questo fasic. contiene il Saggio sulle Epidemie del Sig. Professor Luigi Emiliani.*

Avogadro Cavalier Professor Amedeo. Fisica dei corpi ponderabili, ossia trattato della costituzione generale dei corpi. 8.° Torino 1837. T. I.

Memorie della Reale Accademia di Torino. T. XL. ivi 1838. in 4.°

Heuschling Saverio. Saggio sulla Statistica generale del Belgio 12.° Brusselles 1838.

N. B. Regalato alla Società Italiana dal Sig. Ph. Vander Maelon il quale ha pur mandato il seguente:

Drapiez M. Notizia sullo stabilimento geografico di Brusselles 12.° ivi 1836.

Bruschetti Ingegner Giuseppe. Sul modo più conveniente e più facile per liberare Como e Lecco dalle inondazioni 8° Milano 1838.

Dall'Accademia Imperiale di Scienze di Russia.

Raccolta degli atti della seduta pubblica di essa Accademia tenuta il 29 Dicembre 1837. 4.° Pietroburgo 1838.

Memorie presentate dai Dotti stranieri all'Accademia stessa T. III. Fascicoli 3. 4. 5. 6. in due Volumi. 4.° ivi 1837.

—— T. IV. Fascicolo 1. e 2. in un Volume.

—— Di Scienze politiche, Storia e Filologia. T. IV Fasic. 3. ivi 1838.

—— Scienze matematiche, fisiche, naturali. Parte I. Scienze matematiche e fisiche T. I. Fasc. 5. 6. T. II. Fasc. 1. 2. in un Volume.

—— Scienze naturali T. II. Parte II. Fasc. 4. 5. 6. in due Volumi. ivi 1838.

Scortegagna Dottor Francesco Orazio. Sopra il teschio di un Cocodrillo fossile rinvenuto nel monticello di Lonigo. 4.° Venezia 1838.

Macedo (de) Da Costa Gioacchino. Discorso letto il 15 Maggio 1838 nella pubblica seduta della R. Accademia delle Scienze di Lisbona 1838. ivi 8.° *N. B.* in lingua Portoghese.

Accademiae Scientiarum Bononiensis Tomus III. 4.° Bononiae 1839.

ELOGIO

DEL PROFESSORE

GIUSEPPE CALANDRELLI

SCRITTO DAL SEGRETARIO

ANTONIO LOMBARDI

Le matematiche discipline che per via sicura ci guidano alla cognizioni del vero, appunto perciò possedono una forza maravigliosa, per cui quelli che dal Sovrano Creatore dotati furono di forte ed acuto talento, provano un vero piacere, allorchè si consacrano a simili ardui studii. E cresce per ogni modo questo contento quando dalle speculazioni astratte della quantità in genere, si passa ad applicare i risultamenti delle teoriche alle scienze naturali, e specialmente all'Astronomia. Quanta compiacenza non prova il Geometra allorchè dopo di aver maneggiato a lungo le formole più complicate per sciogliere un problema di meccanica, ottiene un risultamento finale, che regge alla sperienza pratica, e che gli dimostra così quali stretti vincoli congiungan fra loro la pura matematica, e la fisica sperimentale! E quando l'Astronomo ricomparir vede sul reticolo del suo cannocchiale un astro a quel preciso momento indicato dalle tavole, frutto di tante meditazioni, non può a meno di ammirare e adorare a un tempo stesso la Divina Onnipotenza che il tutto librò in peso e misura, e all' uomo fornì una mente capace di invenzioni così sublimi. Tali sentimenti provò, non v' ha dubbio, l'Abate Giuseppe Calandrelli, che resister non potè all' invito lusinghiere della naturale filosofia, ed ogni sua cura perciò ad essa rivolse. L'Eminentissimo Cardinal Flavio dell' illustre ed antica famiglia Chigi efficacamente protesse questo giovine, che sortì i natali nella

terra di Zagarolo non lungi dall' antica Preneste li 22. Maggio dell'anno 1749. Se non gli arrise fortuna col provvederlo di ricco censo, trovò a questa sventura ragionevole compenso in una sorella del padre (1), la quale lo soccorse all' uopo, ed impiegò ogni premura per bene educarlo collocandolo nel Seminario di S. Pietro in Vaticano, e poscia in quello di Albano dove istruissi nelle belle lettere, e conobbe i primi rudimenti della filosofia.

Fornito il Calandrelli di ottima indole e di vivace ingegno, dedito all' applicazione per natura, e nei principii della vera Religione ben fondato, abbandonò di buon' ora il secolo, e si ordinò sacerdote dopo che compito ebbe in Roma correndo l' anno 1768. il corso della filosofia. Gli onori che in quell' augusta Metropoli ottengono d' ordinario i cultori della Giurisprudenza, le ricchezze che premio delle loro fatiche ben sovente radunano essi, le cariche sublimi dell' Ecclesiastica Gerarchia, dalle quali per lo più condecorati si vedono coloro che alle sacre scienze si dedicano, una così brillante prospettiva per migliorar la propria sorte, non lusingò in conto alcuno il giovine Calandrelli, e quantunque dal suo Mecenate consigliato fosse a percorrere la carriera del foro, si ristette, e secondò in vece la propria inclinazione per la scienza della natura. Ma che? appena toccò egli il limitare dell' augusto tempio, smarrì per mancanza di sicura guida, e tosto incontrò ostacoli a progredire più oltre, poichè attingere non potè, che le prime linee, direm così, della filosofia, e le poche nozioni da lui ricevute vennero poi anche dalle questioni scolastiche travisate. Ben comprese egli, fornito com' era di estesi e profondi talenti, che falsa era la strada a lui segnata, ma non perciò si atterrì al pensar quali cimenti durato avrebbe, onde cambiar metodo di studii, e acquistar cognizioni vere ed utili. Fermo in così nobile e coraggiosa risoluzione, amante

---

(1) Sua Madre fu Maria Fortini maritata in Tommaso Calandrelli.

della solitudine, con l' ajuto di pochi libri, da se ricominciò il corso filosofico, e ritiratosi a Magliano in Sabina, al cui Seminario fu chiamato correndo l' anno 1769, ardì di assumere l' insegnamento di quella scienza, che pur ei doveva fin dagli elementi conoscere. Ma che non può l' uomo quando vuole efficacemente? Quattro anni dimorò colà il Calandrelli, e consecrando quasi l' intiero giorno ai libri, e prolungando le notturne vigilie al segno di conceder poche ore al riposo, e per lo più vestito, riuscì a riordinar le proprie idee in materia di scienze naturali, riparò il danno della primiera istruzione, e da solo animosamente s' introdusse a meditare le verità sublimi della matematica pura ed applicata.

La celebre Società di Gesù, che tanto grido levò nel mondo letterario e politico, e che soccomber dovette dopo la metà del secolo decorso agli impetuosi e replicati assalti de' suoi avversarii per risorger, direm quasi, miracolosamente dopo circa otto lustri a faticar nuovamente pel bene della Chiesa, e della pubblica educazione; questa Società, dissi, abbandonar dovette nell' epoca delle sue sventure il Collegio Romano che affidossi alla direzione di Sacerdoti secolari; e l' Eminentissimo Cardinal Zelada Prefetto degli studii in quella Metropoli, e sede augusta delle scienze, scelse a Professor di Matematica l' illustre Padre Jacquier dell' Ordine dei Minimi. Fra le tante sue produzioni si pregia oltre modo il *Comento ai principii della Filosofia naturale* parto sublime dell' ingegno di un Newton, che opportunamente dal Jacquier illustrato, mentre giovò a far meglio conoscere fra noi molte importanti scoperte del filosofo Inglese, e la profondità ed estensione delle sue viste, dimostrò pure nel suo comentatore uno dei più valorosi Professori di Matematica. L' amicizia che il Calandrelli al suo ritorno in Roma accaduto nel 1773, ventiquattresimo dell' età sua, strinse con lui, gli tornò a sommo vantaggio, ed attingendo egli a così nobile e ricca fonte di sapere, si perfezionò nel calcolo al segno, che l'anno appresso potè fare le veci del suo amico e maestro; ed allorchè questi mancò

nell' anno 1788. ai vivi, il Calandrelli salì la Cattedra di pura analisi nel Collegio Romano. Mentre però egli incombeva a così arduo impegno, altre occupazioni non gli mancavano, poichè insegnar doveva la fisica in vece del Professor Cavalli defunto; dirigeva pur l'Accademia di fisica dal Zelada istituita nel proprio palazzo per istruzione degli alunni nel Romano Archiginnasio, ed ebbe l'onorevole commissione da Pio VI. di munire con conduttori elettrici il palazzo Pontificio del Quirinale. Eseguì egli con ogni premura gli ordini Sovrani, e l' opuscolo da lui pubblicato in cui descrive la succennata operazione, ci porge un luminoso testimonio delle sue cognizioni in questo ramo di scienza; perchè con la scorta dei principii teorici e della sperienza, niuna di quelle cautele trascurò, che assicurar possono l'esito felice di simili lavori. Ma quella parte di matematica applicata, che più d' ogni altra lusingava il nostro Professore, era l'astronomia, quella facoltà che ben conosciuta, concepir ci fa l'idea la più grande della Onnipotenza del Divino Creatore, e dimostra insieme come possa l' umano ingegno, sebben cinto da tanti ostacoli, spiegare ardito il volo nell' immensità de' Cieli. Roma, quella Metropoli per tante istituzioni rispettabile e magnifica, aveva già posseduto nei secoli trapassati alcuni Osservatorii Astronomici, ma eransi tutti dopo breve vita spenti; e mentre il Professor Calandrelli cominciò li suoi studii, dir puossi che non esisteva Osservatorio in Roma, se se ne eccettui una privata specola di Don Francesco Gaetani Duca di Sermoneta, dal chiar. Padre Audifredi diretta. Sempre intento il Cardinal Zelada a promuovere l' istruzione degli alunni del Collegio Romano, oltre l'Accademia eriger fece nel suo Palazzo un Osservatorio, nel quale cominciò il Calandrelli a contemplar gli astri, e tale lo prese amore per la scienza, che alla grande impresa si accinse di procurare la fabbrica di una specola degna di Roma. Animato egli dal più vivo zelo per condurre ad effetto un così nobile divisamento, cominciò ad insistere presso il sullodato Eminentissimo Signore, perchè si eseguisse

la mente del S. Pontefice Clemente XIV. che fin dall' anno 1774. sancito avea l'erezione di un Osservatorio al Collegio Romano. Quantunque il Calandrelli assecondato venisse in tale dimanda dallo stesso Porporato, scorsero tuttavia 13. anni senza che si gettasse pietra, e tutto si limitò ad alcuni disegni, alla combinazione di varii progetti, ed a tentare alcuni scandagli. Costante però nell'assunto impegno il giovine Astronomo, mai non abbandonò il campo, e nel 1787. vide alla perfine coronati li suoi voti, e così la consolazione provò di non aver faticato indarno.

Ordinò il Cardinale Zelada che si mettesse mano alla fabbrica sotto la direzione del Calandrelli, che egli onorò col titolo di Direttore del novello Osservatorio, a cui l' insigne Porporato donò le macchine nella sua privata specola custodite. Animato il nostro Astronomo da così lieti principj, non si scoraggiò punto al pensare che per osservar i movimenti delle stelle e dei Pianeti non basta un luogo opportunamente costruito, ma occorrono Telescopj, Quadranti, Orologi sceltissimi, ed altre macchine; l'opra si richiede di giovani allievi che sotto la direzione del Professore maneggino gli strumenti, istituiscano i calcoli, ricche dotazioni ed assegni in fine occorrono, onde fiorir possano simili istituzioni, e tutto ciò mancava alla nuova Specola. Padre perciò e fondator della scuola di Astronomia in Roma a buon diritto chiamar devesi il Professor Calandrelli, poichè fu egli che dopo di aver dato con efficacia il primo impulso, con singolar coraggio superò ogni ostacolo, e sostenne la specola Romana; supplì anche con proprio dispendio ad ogni uopo, armò di un conduttore la fabbrica; migliorò alcune macchine, e sommamente pregiando il settor zenitale di nove piedi dall' illustre Boscovich usato per misurare un grado del meridiano nelle provincie Pontificie, impresa felicemente eseguita, lo perfezionò onde valersene per le osservazioni da lui con ogni zelo ed assiduità continuate per molt' anni. Con questo strumento diretto alle stelle vicine allo Zenit fissò il nostro Astronomo la distanza loro a

questo punto cardinale, e ciò ci fece con tanta esattezza che bastarono le osservazioni di sole 32. stelle per determinar la latitudine geografica della Specola, come in appresso il comprovarono le numerose osservazioni coll' ingegnoso circolo eseguite detto *Ripetitore* inventato, non ha molt' anni, dal Cav. Borda insigne matematico Francese. E mentre così operando il Professor Calandrelli, assicurava uno dei più preziosi elementi per un esatto ed attento Astronomo, volle pur anche con adatte livellazioni congiunte al soccorso delle altezze barometriche conoscere l' elevazione della Specola e delle principali circostanti colline sul mare, non che la posizion loro topografica riferita alla nuova fabbrica.

Volgeva omai l' anno sedicesimo dacchè questa erasi costruita, e la mercè del nostro Matematico fornita de' più necessarj strumenti, quando appunto in Europa osservar si dovette uno dei più imponenti e maestosi fenomeni che Natura di quando in quando a contemplare ci offre, e dai quali l'umano ingegno trae moltiplici applicazioni a vantaggio della civil società : il grande eclisse solare accaduto l' 11. Febbrajo 1804, ecco il fenomeno di cui parlo. Mentre l' immortal Pontefice Pio VII. reggeva con tanta sapienza i popoli al paterno suo freno soggetti, promoveva ad un tempo per ogni maniera li buoni studj, ed i cultori delle Scienze e delle Arti lo sperimentaron sovente provvido e splendido Mecenate. Volle l'Augusto Sovrano recarsi in quel dì alla Specola, ed ivi osservò l' occultazione dell' Astro dominatore de' Cieli, e questa graziosa visita segnò l' epoca più avventurosa per l' Osservatorio Romano, e consolò l'Astronomo Direttore di tante durate fatiche, di tante spese, e di tante cure da lui fino allora sostenute a pro dell' Astronomia, ma ognor con poca o niuna corrispondenza, colpa degli avversi tempi che allora correvano. Questa visita dell' eccelso Monarca diè vita novella, dir puossi, alla Specola, a cui più non mancarono assegni, allievi, macchine, tutti i mezzi a dir breve, necessarj all' uopo per le osservazioni ; ed allorchè il Pontefice Pio VII. andò a Parigi,

memore egli della sua Specola dopo di aver tenuto colloquio con l' illustre Delambre, e cogli altri insigni Astronomi Francesi, diresse al Calandrelli clementissime lettere, ed ordinò l'acquisto di istrumenti per l'Osservatorio Romano, il quale fornito che fu di essi diede campo agli Astronomi ed allievi di istituire una preziosa serie di Osservazioni, fatte in appresso di pubblico diritto colle stampe (2).

L' istruzione più compita della gioventù, e l' assidua residenza all' Osservatorio occupavano tutto quel tempo che al Professor nostro rimaneva a soddisfar con ogni fervore ed esattezza i doveri di Religione, ed a compilare i voluminosi suoi scritti che formeran più oltre oggetto del mio dire, e in questa faticosa carriera durò egli più di otto lustri ; ma l'avanzata sua età, e le sostenute fatiche esigevano in fine un onorato riposo, che nell'anno 1815 egli ottenne dal più volte lodato Eminentissimo Porporato Zelada Prefetto allora degli studj. L' amore però che per la Specola nutriva il Calandrelli, lo fece direm così, ringiovanire, e sciolto dagli altri impegni, raddoppiò di zelo, e di premura per l' Osservatorio, talchè videsi questo ormai quasi settuagenario Astronomo continuar coraggioso a vegliar sovente le intere notti maneggiando gli strumenti, o per determinare i movimenti delle stelle e de' pianeti, o per registrare le vicendevoli loro eclissi ad aumento e correzione delle tavole di longitudini tanto ai navigatori necessarie, o per inseguire alcuna delle Comete vaghe sempre di percorrer nuove vie dagli altri pianeti non mai battute.

Chi perciò immaginar potrà quanto aspro al Calandrelli riuscir dovesse l'abbandono della Specola del Collegio Romano nell' anno 1824. avvenuto, perchè dalla S. Memoria di Leone XII. (3) confidata venne ai Religiosi della Compagnia

---

(2) Missirini. Elogio di Calandrelli. 8.° Roma pag. 17.

(3) Questo Pontefice procurò di render meno sensibile al nostro Professore un tal colpo, beneficandolo col nominarlo nell'Agosto del 1825. Canonico dell'Archibasilica Lateranense.

di Gesù! Non mancò è vero il Padre Generale di procurare che un soggetto così distinto e valoroso nella professione sua restasse in quel Collegio, dove fissato aveva da 50. anni sua dimora, e dove esisteva il più caro oggetto de' studj suoi: ma indarno, poichè prevalsero nel Calandrelli i sentimenti di amicizia e di riconoscenza verso gli amati Colleghi (4), e gli alunni di quel Seminario, dei quali tutti possedeva l'amore e la stima; e si trasferì con essi all' Apollinare (5) dove rivolse tosto il pensiere a edificare la mercè della possente protezione di un esimio Porporato un novello Osservatorio (6). Ma l'avanzata sua età, e più la malferma salute impedirongli di proseguire a lungo le astronomiche fatiche, sebbene non mai trascurasse fino all' ultimo de' giorni suoi questi per lui diletti studii. Correndo il mese di novembre dell' anno 1827. sorpreso il Calandrelli da malattia infiammatoria, si riebbe alquanto, ma poi soccomber dovette alla gangrena della vesica, e nella notte del Santissimo Natale di quell' anno in mezzo ai conforti della Santissima nostra Religione placidamente egli spirò, lasciando lungo desiderio di se e come dotto Matematico ed Astronomo, e come pio e saviissimo Sacerdote. Congiunse egli a profondo sapere le più amabili cristiane virtù, delle quali fin da giovanetto fu adorno, e si rendette così stimabile ognora più ai grandi, e ad ogni ceto di persone. A suo principal dovere si prescrisse egli di soddisfare sempre esattamente agli uffizii di Religione che lo stato suo sacerdotale esigeva, e quando offriva l' incruento divin sacrifizio, la viva sua fede gli promoveva ben sovente un affettuoso e tenero pianto. Provveduto per la munificenza dei Pontefici, e del Cardinal

---

(4) Fra questi distinguesi il nostro Socio Abate Conti Astronomo anch'esso di grido, allievo del Calandrelli, e suo indivisibil compagno di studio e di passeggio. Questi si prepara a pubblicare un ragguaglio ragionato delle opere del suo maestro; il che egli farà con tutta la precisione. (Missirini ec. pag, 13. 19.)

(5) Seguì questo traslocamento alli 24 Ottobre 1824.

(6) Missirini ec. pag. 20.

Chigi di alcune ecclesiastiche prebende fissò massima costante di impiegar come fece queste rendite a benefizio dei poveri e della Chiesa (7).

Cortese con tutti, piacevole e facile con gli ignoranti e coi sapienti riscuoteva dagli uni e dagli altri amore, nè mai annidossi la bassa invidia nel suo bell' animo chè giudicava tutti gli altri Dotti a lui superiori in dottrina, perlocchè non curò mai anzi sprezzò gli onori, ed allor quando Leone XII. lo decorò dell' insigne dignità di Canonico nella Basilica Lateranense considerata prima Chiesa del Mondo Cattolico, un tratto così luminoso di Sovrana clemenza commosse alle lagrime il Calandrelli, e li più profondi sentimenti di umiltà giudicar lo fecero indegno di una tal distinzione (8).

Sincera e fervida religione, sommo disinteresse, e singolare umiltà, ecco in pochi lineamenti il carattere morale di quest' uomo egregio, che adesso considerar dobbiamo come profondamente versato nella vasta scienza della natura. La Matematica pura e l' applicazione di essa tanto alla Fisica quanto più specialmente all' Astronomia, furono que' rami nei quali spiegò l' acuto suo talento il Calandrelli.

La celebre quistione dei logaritmi immaginarj gli prestò argomento fin dall' anno 1779. per stendere una dissertazione, in cui ragiona sul modo di ridurre a simili logaritmi le espressioni trigonometriche degli archi circolari, al quale scritto diè motivo la controversia sullo stesso quesito insorta tra l' illustre Vincenzo Riccati ed il chiar. Abate Gioachino Pessuti. E convien dire che l' Autor nostro con questa memoria eccitasse fragli analisti una nobile emulazione , poichè e il Professore Canterzani, e il Conte Giordano Riccati e d'Alembert, tutti luminari della scienza si dieder premura di corrispondere col

---

(7) I donativi da lui fatti alla Chiesa di S. Ignazio e S. Apollinare ascesero a zecchini 500 circa, somma egregia per un privato.

(8) Provò egli e spiegò gli stessi umili sentimenti allorchè il medesimo Sommo Pontefice lo mandò a visitare nell' ultima sua infermità.

Professor Calandrelli intorno a questa materia, sulla quale ei nuovamente meditò, e fra le memorie della Società nostra avvene una pochi anni prima di morire da lui pubblicata, in cui seguendo i principj dettati dal sommo Eulero sviluppò con facili artifizj alcune formole contenenti quantità immaginarie col mezzo di linee trigonometriche, nè di ciò pago si fece a dimostrare con rigore la verità di varie equazioni già note, ma che involte per l'addietro in grandi oscurità, sembravano paradossi, ed eccitavan questioni, che dopo gli schiarimenti da lui dati egli spera che più non si riprenderanno (9). Ma il campo in cui estesamente faticò il nostro Professore, quello si fu dell' applicazione della Matematica alla Meccanica, ed all' Astronomia. Allorchè l' Abate Andres si accinse a difendere la dimostrazione dell' immortale Galilei sulla legge dell' accelerazione del moto nella caduta dei gravi, nella quale i più rigorosi analisti ravvisaron difetto di paralogismo, il Calandrelli fece giudice della contesa il Conte Giordano Riccati, a cui diresse l' opuscolo da lui stampato intorno a questo punto di Fisica. Che se ei non convenne con l' Andres, e credette erronea la dimostrazione dell' illustre Fiorentino, non perciò minore stima e rispetto egli mostrò per così grand' Uomo, il quale se fosse vissuto all' età nostra, e bilanciato avesse le ragioni dell' Astronomo Romano, avrebbe forse rettificate le proprie idee su questo argomento.

L' applicazione dei principj già noti per semplificare le dimostrazioni dei teoremi fondamentali della meccanica, suggerì al nostro Professore Calandrelli una nuova dimostrazione del teorema sulla leva, e meditando sulla regola Ugeniana per determinar con questo soccorso il centro di oscillazione, offrì in una dissertazione nell' anno 1785. stampata, lo scioglimento

(9) Questo argomento è stato di nuovo trattato dal Sig. Professor Poletti Geminiano in una dissertazione pubblicata colla stampa e dal Sig. Capitano Antonio Araldi in una memoria letta alla R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena li 27. Gennajo 1831.

di alcuni problemi sul moto per un piano inclinato dei corpi da una fune pendenti. La Fisica strettamente considerata a lui deve un nuovo pirometro per misurare la dilatazione dei metalli a qualunque grado di temperatura, e il difficil problema della misura delle altezze coll' uso del Barometro formò il soggetto di altre sue ricerche, nelle quali esaminò la formola data dal celebre La Place nella sua *Meccanica celeste* per questa misura, e lasciò inedito un altro scritto sullo stesso argomento. Nè si mostrò il Calandrelli straniero all' Idraulica, e propose il parer suo intorno ai progetti che li Chiarissimi Teodoro Bonati e Marchese Corelli presentato avevano sui fiumi Nero e Velino.

Se però le produzioni varie dell' Autor nostro, delle quali diedi fin qui un breve cenno, lo fecero conoscere come versato assai nella scienza della natura, non bastan per se quantunque pregevoli, a collocarlo tra i Filosofi più distinti del secolo decorso. L' Astronomia bensì con tutto l'ardore, e col più felice successo da lui coltivata gli dà ogni buon diritto di aspirare a vera gloria. Questa Scienza dividesi, come le altre in teorica e pratica, e chi posseder la vuole in tutta l' estension sua, deve famigliarizzarsi, direm così, col calcolo sublime, istrumento senza del quale penetrar non si possono gli arcani del sistema mondiale in ogni sua parte maraviglioso. Gli opuscoli astronomici che pubblicavansi regolarmente a Roma, dappoichè il Professor Calandrelli osservava gli astri alla nuova Specola, e gli Atti della Società nostra, contengono le varie dissertazioni e memorie spettanti all' Astronomia teorica e pratica da lui pubblicate. Non accadeva in Cielo fenomeno importante, che a se non chiamasse l' attenzione dell' Astronomo Romano, e li grandi Eclissi Solari negli anni 1781, e 1804. avvenuti porsergli argomento per due scritti, nel secondo dei quali ci diede in breve la storia delle Eclissi più memorabili in Roma vedute, fra le quali noverar devesi per una delle maggiori quella dell' anno 1804. Nè una sol volta ragionò egli intorno a questo fenomeno, ma al-

lorquando l' illustre Monsignor Mai pubblicò nel 1822 l'Opera *De Republica* di Cicerone, l' Autor nostro prese nuovo motivo di scrivere con erudizione e criterio filosofico intorno a questi sorprendenti fenomeni, illustrando un passo dell' orator Romano in cui questi descrive un' Eclisse Solare nell' anno 350.^{mo} dalla fondazione di Roma colà osservato. Esaminatosi attentamente dal Professore Calandrelli quanto ne scrive Cicerone, delineò in uno dei nominati Opuscoli (10) la figura di così celebre oscuramento, e calcolò la quantità della luce che nella massima oscurità penetrar faceva sul nostro Globo il Sole. Oltremodo importante al certo è la conseguenza che dal suo calcolo ne trae l' Autore, poichè conclude così :

" Nell' Eclisse dunque Romana nella massima oscurazione " del disco solare fu l' intensità di luce maggiore di quella " che riceve Giove e molto più maggiore di quella che ri- " ceve Saturno, e ciò non ostante questi due pianeti nella " notte risplendono in cielo, e dimostrano la luce viva del " giorno. ,, Conchiude da ciò il Professor Calandrelli " che " quando Cicerone disse *notte e tenebre*, non fece che seguire " il comune errore che si riprodusse nell' eclisse accaduta il " 1. Aprile 1764. visibile in Francia, ed in Italia il 9 Feb- " brajo 1804. dove si giunse per fino da alcuni a negarlo, " perchè non eransi vedute le tenebre e la notte ,,.

Con tutta l' esattezza determinare ei volle la latitudine del suo Osservatorio, e fissò pure l' altezza di esso sul pelo del non lontano mar Tirreno, operazioni che gli Astronomi riguardano come fondamentali, e che lunghe cure, ingegno acuto e indefessa attività richiedono in coloro che a compierle si accingono. Varj problemi astronomici esercitarono parimenti la sua penna, e quindi ora discusse quello della paralasse di alcune stelle, or l' altro risguardante la determinazione delle altezze corrispondenti, allorquando suppongansi finite le differenze di declinazione e di rifrazione ; non ommise di esa-

(10) Stampati a Roma nel 1824.

minare quanto influisca ad alterar le osservazioni astronomiche, la rifrazione della luce, e ci offrì alcune formole primarie spettanti alla luce crepuscolare, con l'ajuto delle quali sciogliere si ponno alcuni quesiti astronomici. A lui dobbiamo un metodo per correggere le osservazioni fatte con un reticolo, i cui fili ben collocati non siano; a lui dobbiamo una serie di osservazioni meteorologiche estese per ben 20 anni (11), e che comunicò all' Accademia meteorologica di Monaco, alla quale apparteneva. Quando apparvero in Cielo Comete, sollecito ei si fece ognora di inseguirle co' suoi cannocchiali all' importante scopo di segnarne le Orbite, e di predirne il ritorno; ma quelli fra simili astri che più richiamaron l'attenzione del Professor Calandrelli furon le Comete che negli anni 1807, 1811. percorsero gli spazj celesti, e a dir vero quella specialmente della seconda epoca la dimora protrasse così a lungo sul nostro Emisfero del lucido e voluminoso suo globo di maestosa coda adorno, che gli Astronomi poterono diligentemente osservarla, e raccogliere gli elementi della svariata sua orbita.

Io accennai rapidamente questi varj lavori del nostro Professore, perchè la lor natura è tale che si ricusa per se a più estesa analisi, ma chi meco rifletter vorrà, quante vegliate notti, quanti calcoli, quante ripetute correzioni si richieggono per ottenere in Astronomia ben sovente una sola finale espressione in poche cifre numeriche compresa, confessar dovrà che l'Astronomo Calandrelli ben meritò della scienza. Poichè presentò egli nei varj opuscoli di cui finora si disse, tanti canoni, e tante svariate notizie, tutte dirette a far progredire l' Astronomia pratica e teorica, da cui la Nautica, la Geografia, e la Cronologia trassero e traggono soccorsi e lumi insigni, talchè se ad esse mancasse questa sicura guida, per tacer di molt' altre cose, limitar dovrebbesi il nocchiero a radere le sponde del mare per non smarrir nella via, il viaggiator calcolar non potrebbe

(11) Cioè dal 1782 al 1801.

le distanze dei luoghi, nè il guerriero formar potria con buon successo i piani delle battaglie, ed eseguir le altre operazioni di tattica militare.

Qualora a meditar io mi faccio la meravigliosa operazione che si progettò e compì per disposizione del Gran Pontefice Gregorio terzodecimo di gloriosa memoria, per ricondurre la celebrazione della Pasqua all' epoca voluta dal Niceno Concilio, e per correggere le aberrazioni che nell' ordine delle stagioni accadono a motivo della varietà dei movimenti planetarj, qualora, io dissi, attentamente considero la soluzione di così intralciato problema, non posso a meno di non venir compreso dalla più alta ammirazione per l' illustre Matematico Luigi Lilio che con tanto studio ed ingegno architettò la soluzione del quesito, e debbo ad un tempo convenire, che la Romana Chiesa promovendo ed eseguendo la correzione del Calendario, mentre riordinò in questa parte la sacra Liturgia, recò un segnalato benefizio alla civil Società. Scorsero già da quell' epoca quasi due secoli e mezzo, e più non incontraronsi nelle stagioni quelle varietà che lo spostamento degli Equinozj e delle Neomenie prima dell' ultima correzione produceva, poichè le opportune aggiunte, o sottrazioni di giorni stabilite in certi anni determinati riconducono alla lor sede gli Equinozj e le Neomenie che forman l'oggetto principale del problema, giacchè dalla immobilità di questi due punti dipende l' ordine intiero del Calendario. Ma siccome questo insigne lavoro opra è pur d' uomo, e quindi da qualche imperfezione macchiato, e soggetto ad incontrar col volger dei secoli mutamento, così gli Astronomi che vennero dappoi, non intralasciarono di occuparsi in tale argomento, e fra questi segnalossi il Professor Calandrelli. Allorchè nell'anno 1818. si riprodusse a Roma la storia del Calendario Gregoriano, e dell'Astronomia Romana, l'autore di quest' opuscolo incappò in non pochi errori che alteravano la verità dei fatti, perlocchè il Calandrelli utilmente impiegò l' opera sua per rettificar la descrizione della riforma del Calendario di cui più sopra parlai,

ed usando una rigorosa e sana critica, rilevar fece i numerosi abbagli del novello storico, e così operando ristabilì la verità di fatti per la scienza astronomica oltremodo interessanti. Ma un trattato chiamar puossi del Romano Calendario l'altro dotto ed erudito lavoro dell' Autor nostro, che trovasi fra gli opuscoli astronomici nel 1822. pubblicati a Roma. I varj problemi indeterminati che li Matematici già si proposero per fissare il Numero aureo, la Lettera Dominicale, l' Indizione ec., formano il soggetto di questo scritto, in cui il Calandrelli ci offre la storia di quanto oprarono gli Astronomi per fissar bene il punto equinoziale, che è la base del sistema cronologico, ed espone le varie opinioni dei Dotti sul metodo per determinare il giorno della celebrazione della Pasqua. E siccome fra li diversi Cicli usati dalle Nazioni, il Calendario Giuliano ed il Gregoriano dimenticar fecero agli Europei specialmente gli altri sistemi cronologici, così il Calandrelli in quest' opera si limitò a sciogliere li citati problemi con l' uso della tavola Giuliana, e poscia presentò una formola generale che in se racchiude gli elementi tutti per ottenere lo stesso intento indipendentemente dalla nominata tavola. Nè una sola, ma più formole generali ei determina per fissar il giorno Pasquale, e la Lettera Dominicale, e traduce in linguaggio algebrico ed in funzioni di un dato anno, o di un dato secolo le diverse quantità che compongono li Calendarj Giuliano e Gregoriano. Che se ad alcuni sembrasse non aver queste ricerche dell' Astronomo un utile scopo, siccome vertenti intorno a cose già note, io li pregherei a sospendere il loro giudizio, poichè di esse si occuparono pur recentemente alcuni fra i più illustri Astronomi Europei, quali sono il Carlini, il Delambre, il Gauss, perlocchè l' Astronomo Romano cui nulla in fatto di erudizione scientifica era occulto, esaminò diligentemente le formole del problema da quelli pubblicate, e dimostrò diffusamente su quali fondamenti poggiava quella del Matematico Tedesco, e fissò i limiti entro cui adoperar devesi senza timor di errare. Chi legger vorrà queste memorie dell' Autor no-

stro, converrà meco, io spero, che congiuns' egli ad una vasta erudizione una non comune perizia nello sciogliere questi problemi indeterminati, i quali trattar dovendosi con una analisi trascendente, dimandano molte avvertenze onde racchiudere in formole generali tutte le soluzioni possibili. Ed a raffermar vieppiù i risultamenti da lui ottenuti, che l'Astronomo Cicolini volle trovar in difetto, proponendo li suoi dubbj nella Corrispondenza del Chiar. Barone di Zach (12), il Professor Calandrelli ritornò su questo a lui diletto argomento, e dimostrò l' universalità delle proprie formole che comprendono anche il caso delle quantità frazionarie, caso che sfuggì al Cicolini, nè ommise perfine di comprovar l' esattezza della formola di Gauss, che quest' ultimo voleva in alcun caso trovare mancante (13). Mentre così operò il Professor nostro, somministrò egli ai cronologisti nuovi mezzi per mantener costante l' effetto della celebre correzione Gregoriana sulla distribuzione dei giorni, in cui celebrar devono i fedeli le sollennità più cospicue della Religione, e procurò di impedir che prevalendosi di formole meno esatte, si introducesse nei calcoli dei Numeri aurei, delle Epatte, e delle Neomenie, errori che ne rendessero col volger dei secoli l' uso dubbioso.

Son queste le produzioni più degne di encomio che ci lasciò l' esimio Canonico Professor Calandrelli, a cui i dotti Italiani e stranieri rendettero la dovuta giustizia, poichè mentre egli a loro diresse le sue epistole ed osservazioni, l'onorarono essi a vicenda della loro corrispondenza, e fra gli esteri si noverano e d'Alembert, e Delambre, e La Lande, e il Barone di Zach, personaggi tutti di gran fama nella Repubblica scientifica. Più esteso carteggio poi ci tenne coi Matematici Italiani di primo grido, e il Conte Giordano Riccati, e il Boscovich, e il Bonati, e il Piazzi per tacer d' altri molti, conferiron più volte secolui intorno alla scienza da essi coltivata.

---

(12) Vol. VI. pag. 51.

(13) Lettera sul Calendario nel Giornale Arcadico. Roma. Novembre 1822.

Nè tacere io debbo infine che varie fra le più cospicue Accademie Italiane e d' Oltremonti, e la Società nostra diedersi premura di chiamar nel loro seno questo Matematico insigne e cristiano Filosofo, le cui ceneri riposano nella Chiesa di S. Apollinare in Roma, e sul sepolcro del quale vedesi il suo busto da egregio Professor Romano scolpito in marmo.

CATALOGO

DELLE OPERE E MEMORIE

DEL CANONICO GIUSEPPE CALANDRELLI

Saggio analitico sopra la riduzione degli archi circolari ai Logaritmi immaginarj. Roma 1778.

Epistola supra fallaciam Galileanae demonstrationis accelerati motus in ratione spatiorum ad Virum Clariss. atque Nobiliss. Comitem Jordanum Riccati. Romae 1779.

Aequilibrii demonstratio. Romae 1780.

Lettera sopra l' Eclisse Solare accaduta li 17 Ottobre 1781 diretta all' Eminentissimo Sig. Card. Francesco Saverio de Zelada Bibliotecario di S. Chiesa. Roma 1781.

De motu, et vi sollecitante corpora fune pendula per plana inclinata. Romae 1785.

Mercurii infra Solem transeuntis observatio habita die 4 Maii 1786. Romae 1786.

Riflessioni sopra il sentimento, ed in particolare sopra le ragioni proposte dai Sigg. Teodoro Dott. Bonati, e Giacinto Marchese Corelli per la remozione dello Stretto, e Velino alle Marmore, e per l' esecuzione dei piani progettati dai medesimi sull' affare dei fiumi Nera e Velino. Roma 1787.

Mechanicum problema in praelectione physica propositum. Romae 1789.

Sopra la latitudine della Specola del Collegio Romano dedotta da molte osservazioni fatte al Settore Zenitale.
Sull' elevazione del piano della Specola, e delle principali colline di Roma sopra il livello del mare, e sulla differenza in Latitudine, e Longitudine delle colline medesime dal meridiano della Specola.
Estratto di osservazioni meteorologiche dal 1782 al 1801. Queste tre memorie sono inserite nel Tomo degli opuscoli Astronomici dell' anno 1803.
Delle più grandi e più celebri Eclissi di Roma, e dell' Eclisse Solare del dì 11 Febbrajo 1804. Roma 1804.
Risultato di varie osservazioni sopra la parallasse annua di Wega o α della Lira. Roma 1806.
Osservazioni, e riflessioni sulla parallasse annua dell' α della Lira. Roma 1806.
Soluzione esatta del problema delle altezze corrispondenti nelle quali le differenze di declinazione, e di rifrazione si suppongono finite, inserita nel Tomo degli Opuscoli Astronomici del 1806.
Osservazioni, e riflessioni sopra la Cometa del Settembre dell' anno 1807.
Metodo per correggere le osservazioni fatte con un reticulo non esatto nella posizione dei fili.
Osservazioni, e riflessioni sopra la rifrazione della luce Solare. Le tre suddette memorie sono inserite nel Tomo degli Opuscoli Astronomici del 1808.
Osservazioni sopra la Cometa del 1811.
Esame delle osservazioni fatte dal Boscovich per la latitudine del Collegio Romano.
Descrizione di un nuovo pirometro per misurare la dilatazione dei metalli per qualunque grado di temperatura.
Riflessioni sulla formola Barometrica della Meccanica Celeste. Memorie inserite nel Tomo del 1813.
Formole primarie spettanti alla luce crepuscolare, e loro uso nella soluzione di diversi problemi inserite nel Tomo dell' anno 1818.

Notizie storiche del Calendario Gregoriano, e dell' Astronomia Romana inserite nel Giornale Arcadico dell' anno 1819 Trimestre 2.° e 3.°

Dimostrazione di alcune formole generali della lettera Domenicale per qualunque anno innanzi, e dopo la riforma del Calendario Gregoriano inserita nel Tomo XIX. Fascicolo 1.° delle Memorie di Matematica della Società Italiana.

Dimostrazione delle diverse formole che possono usarsi nel Calendario Giuliano, e Gregoriano nel Tomo degli Opuscoli del 1822.

Lettera al Sig. Cav. Ciccolini sulle formole analitiche della Pasqua inserita nel Giornale Arcadico del 1822. Trimestre 4.°

Schema di un' antica Eclisse Solare veduta in Roma l' anno 350 della sua fondazione nel Tomo degli Opuscoli del 1824.

Riflessioni analitiche sulla riduzione degli archi circolari ai Logaritmi immaginarj. Modena 1828. inserita nel Tomo XX. Memorie della Società Italiana F.°1.° di Matematica.

OPERE INEDITE.

Metodo per regolare la decima quarta pasquale a non precedere stabilmente il plenilunio medio astronomico dedotto anche da un nuovo Ciclo, e nel tempo stesso ricondurre al dì 21 Marzo l' ingresso del Sole in Ariete nei Secoli avvenire.

Formole per la misura delle altezze coll' uso del Barometro.

Dell' aberrazione della luce del Sole, e delle Fisse.

Esame della Meridiana della Torre de' venti al Vaticano.

Nota delle principali Accademie a cui era ascritto.

Accademia Elettorale di Manheim 1 Ottobre 1781.
Accademia di Bologna 1 Luglio 1783.
Corrispondente dell' Accademia di Torino 1791 4 Giugno.
Società Reale Borbonica di Napoli 15 agosto 1818.
Società Italiana delle Scienze residente in Modena 6 Aprile 1820.
Accademia di Religione Cattolica 22 Gennajo 1821.
E di più altre Accademie ec. ec.

ELOGIO STORICO

DEL MATEMATICO

PIETRO FERRONI

SCRITTO

DAL SEGRETARIO ANTONIO LOMBARDI

La fama, che si procurarono coi loro ritrovamenti e con tante insigni scoperte l' immortal Galileo e gli illustri Viviani e Torricelli, mentre conoscer li fece presso tutte le colte nazioni come sommi nelle scienze naturali, è un monumento perenne di gloria per la patria loro e per tutta Italia. Coltivator zelante qual fu il Matematico Pietro Ferroni di simili studj, ed amator passionato, direi quasi, dell' antica sintesi geometrica, procurò egli ognora con li suoi scritti, che furon copiosi anzichè no, di far risplendere vieppiù i pregi degli antichi Geometri e specialmente de' suoi Toscani, a segno che nelle produzioni di que' Dotti egli credette che si trovassero se non apertamente almeno nel fondo loro, li germi di quasi tutte le più utili invenzioni, che nel secolo XVIII. arricchirono l'analisi e la meccanica.

Dopo di aver egli appreso i primi rudimenti delle lettere in Firenze sua patria dove nacque il giorno 22 Febbrajo dell' anno 1744 (1), ricevette a Roma nel Collegio Nazareno la scientifica sua educazione, e nella Università di Pisa poi compì il corso degli studj sublimi che formarono in ogni tempo

(1) Nel Libro del Battesimo dell'Oratorio di San Gio. Battista di Firenze si legge quanto appresso. « Pietro Giuseppe Maria Gaspero del Signor Gio. di Gaetano Ferro-« ni, e della Signora Teresa di Antonio Gaetano Stefanelli, Popolo di S. Simone nato « il dì 22 Febbrajo 1744 a ore 18. Compare Signor Lorenzo Zei = C. Vincenzo Doni « Notaro. »

la sua delizia. I saggi di sapere che ei ben giovine diede al Pubblico, conoscer lo fecero per uomo di insigni talenti dotato, e di estesa capacità al Gran Duca Leopoldo a cui deve la Toscana tanti vantaggiosi provvedimenti; il nominò quindi Egli Professor di Matematiche nell' Archiginnasio Pisano, sebbene non contasse allora il Ferroni che l' anno ventesimo di età, e poco appresso lo destinò alla sopraintendenza dei fiumi e confini Toscani.

Quantunque si prefigesse questo giovine a scopo precipuo delle sue meditazioni la Matematica pura, tuttavia conobbe la Scienza quanto è estesa, e perciò la Meccanica, l'Idraulica, la Musica, l'Architettura la pubblica Economia, tutte queste facoltà somministrarongli materia per le sue produzioni, nè di ciò pago, coltivò con successo anche l' amena letteratura, e nel volger degli anni suoi più tardi l' onor conseguì di presiedere la rinomata Accademia Fiorentina della Crusca.

La natura e la moltiplicità degli argomenti risguardanti la sintesi e l'algebra dal Ferroni maneggiati, e il metodo che ognor tenne nello svilupparli, prestansi difficilmente ad una ragionata analisi, perlocchè io limitar mi dovrò ad offrire un quadro delle cose più rilevanti nelle sue produzioni trattate da questo Geometra, che a fondo conobbe la storia della scienza da lui prediletta (2). L' Opera più voluminosa che ci lasciò in due Tomi divisa, il primo dei quali uscì nell' anno 1782 e dieci anni appresso il secondo, versa intorno la Matematica trascendente ed il calcolo integrale. Uno dei primi oggetti che in quasi tutte le produzioni ebbe egli in mira, quello si fu di discutere e verificare a chi appartengano le tante invenzioni che dai primi tempi sino a noi arricchirono la scienza della natura, onde non fraudar alcuno di quel posto d'onore,

---

(2) Debbo fin d' ora avvertire i miei lettori che io tratto l' argomento storicamente soltanto, senza concorrere a sostenere tutte le opinioni di questo scienziato, molte delle quali eccitarongli vivi contrasti.

che gli appartiene nella storia delle umane cognizioni. Precedono quindi l' opera sunnominata lunghi prolegomeni istorico-matematici, nei quali il Lettore conoscer può le vicende varie che accompagnaron la scoperta delle quantità esponenziali, apprenderne gli è dato la teorica, e saper partitamente a chi veramente spetti il diritto della invenzione del Canone logaritmico, e dei varj metodi e delle formole usate per il loro sviluppo. Nel trattare il quale argomento, il Ferroni si intertiene ad esporre diffusamente le mirabili operazioni del Nepero per costruire le tavole logaritmiche. Varia ci si presenta poi la materia che contiensi nell' opera, perchè l'Autor nostro ora considera l'evoluzione delle serie esponenziali, ora insegna a svolgere con esse le quantità trigonometriche, quando chiama l'attenzione dello studioso sulle quadrature delle Coniche, e quando sui Teoremi di Cotes e di Moivre, ed argomento poi di lungo esame gli porge la celebre questione, che i Matematici agitarono sui Logaritmi delle quantità negative. I pensamenti sulle quantità infinitesime dei geometri che lo precedettero, espone egli nella prefazione del secondo volume consacrato a trattare il calcolo differenziale. Varie, e di varia natura sono le proposizioni da lui dimostrate, e tal volta corregge ciò che altri già dissero, or vi aggiunge alcun che del suo ed amplifica l' argomento e non lascia di offrire all' opportunità nuove applicazioni di principj già noti. E ciò ei pratica specialmente riguardo al teorema di Pascal sulla misura della superficie cilindrica e riguardo a varie altre simili proposizioni, dalle quali dipendono molte belle proprietà delle sezioni coniche dal Ferroni esposte in quest' opera. Conoscevansi già prima di lui tante applicazioni del calcolo integrale alla dottrina delle curve superiori al secondo ordine; ed ecco che il nostro Algebrista col soccorso dell' indicato teorema *Pascaliano* si inoltra ad estender vieppiù une simile dottrina, ed ammaestra li suoi lettori sul modo di rettificare dipendentemente dalle coniche di Apollonio le curve di gradi più elevati, e di quadrarne le aree, ed estende le sue ingegnose ri-

cerche alle curve trascendenti quali sono la cicloide, l'epicicloide, la catenaria e simili.

Tal varietà di pensamenti e di idee dall' Autor nostro insieme raccolte ne' suoi lavori scientifici non potrebbe a parer mio meglio rappresentarsi se non figurandosi un' ampia officina di vaghe mercanzie ripiena, ma di genere assai vario in ordine simmetrico disposte. Mentre in uno degli scaffali tu ammiri una serie di cristalli in eleganti forme foggiati, ivi accanto osservar puoi lavori di magnifici bronzi dorati ad ornamento delle sale dei Grandi, e intanto volgendo altrove cupido l' occhio, ammirerai e gioje, e pendole e scatole, ed una serie innumerevole di piccole chincaglierie cui il capriccio e la moda inventando vanno per nutrire i tanti bisogni ideali di quelli Uomini, che di ricco censo dotati han duopo di sbandir la noja che li opprime in mezzo all' abbondanza ed alle comodità della vita. E come questa varietà riscontrasi nell'Opera del Ferroni di cui finor parlai, lo stesso dir puossi delle altre sue produzioni di minor mole, le quali versano in parte sulla Matematica pura, e in parte trattano argomenti di Matematica appplicata. Depositò egli nei volumi della Società nostra quasi tutti li suoi scritti scientifici ; e il calcolo integrale, e le quadrature che ne dipendono, e le due trigonometrie, e la misura delle superficie e della solidità delle coclee e la geometria analitica, e sintetica, e la soluzione in fine delle equazioni per approssimazione, tutte queste materie egli trattò nelle memorie da Lui pubblicate. Trasceglierò io quindi fra così, direi quasi, prodigiosa quantità di parti dalla ferace mente dell' Autor nostro sortiti, alcune cose che più singolari mi sembrano, e perciò più meritevoli di esser ricordate, onde formarsi possa in qualche modo idea del saper vario di questo Matematico.

Soggetto di critica gli somministrò il trattato di calcolo integrale di Condorcet in cui ei pretese di rilevare, che mancavano delle dovute prove le equazioni di condizione dall' Autor Francese assegnate per l' integrabilità delle formole,

e che perciò è duopo ricorrere al teorema di Leibnitz (3) sulle dottrine del quale se più avesse insistito il Condorcet, non avrebbe, secondo il Ferroni, creduti suoi trovati certe dimostrazioni, che quegli e l' Eulero avevano già da tempo pubblicate. Applaudì alcuno a questo scritto del Ferroni (4), vi fu però ancora chi dato avendo di mano alla scutica severamente lo flagellò, e tanto più severamente in quanto che questa critica sopra giuste e sode ragioni fondata non va mai da un' apparente moderazione disgiunta. Ma se merita lode lo zelo del critico anonimo per la difesa del vero, non tutti, cred'io, approvar vorranno il velato sarcasmo ch' ognor trapela in questa confutazione (5). Le integrazioni dell' illustre La Place, alcune soluzioni di problemi del Chiar. Abate Bossut, e varj teoremi di altri Matematici d' oltremonte non sfuggirono gli acuti riflessi del professor Fiorentino, il quale ognor si querela che il trascurar come usano i moderni Geometri, di penetrar a fondo la sintesi degli antichi, toglie loro il conoscere come in quella nascondonsi molti germi, da cui spuntarono non poche delle nuove scoperte (6). Una poi fra le diverse prove più luminose che ci lasciò il Ferroni della sua acutezza nell' osservare, e dell' instancabile sua applicazione, l' abbiamo nella lunga Memoria che gli piacque di intitolare *Paralelli e principio unico e semplice delle due trigonometrie* (7). Da una sola radice, direm così, fa egli nascere questo ramo di geometria trascendente, poichè a dimostrare si impegna che dalla contemplazione delle piramidi tetraedre sorge la trigonometria

(3) Prodromo di osservazioni sopra il trattato di calcolo integrale pubblicato da Condorcet nel 1765. Memoria inserita nel Tomo V° delle Memorie della nostra Società pag. 130.

(4) V. le Effemeridi letterarie di Roma N. XIV. 2 Aprile 1791.

(5) Questa critica porta per titolo *Saggio di un dilettante di Matematiche sulle equazioni di condizione, e sulla invenzione della Brachistocrona* 4° 1791.

(6) Lettera al Cav. Lorgna sopra diversi aneddoti matematici nel T. VII delle citate Mem. pag. 319.

(7) Pubblicata nella parte I. T. XII. delle cit. Mem. pag. 106.

sferica, dalla quale poi facilmente si passa alla piana, che considerar puossi come un caso particolare della prima. E mentre con uno sfoggio singolare di erudizione egli sviluppa i teoremi, ed i corollarj, che giovangli a comprovare l'assunto argomento, ci offre un singolar teorema in cui preso il raggio uguale ad uno, egli dimostra che tutta la trigonometria concentrasi nella seguente equazione trinomia semplicissima

$$\cos. z \pm g \text{ sen. } z \mp h = 0$$

la soluzione della quale appoggiasi intimamente all'elissi conica apolloniana. E se lungo cammino percorrer deve il lettore onde raggiunger la meta, per conoscer cioè l'indicata verità, procura l'Autor nostro di renderne men nojosa la via, or con presentarci alcuni corollarj che ci scoprono varie mirabili proprietà dell'Algebra, ora offrendoci alcune luminose applicazioni di formole, che dipendono dai triangoli sferici, le quali ci manifestano vieppiù il vincolo che tra loro annoda le sezioni coniche per cui il circolo si cambia in Parabola, in Elissi, ed in Iperbole; ed ora dandoci nuove dimostrazioni di teoremi conosciuti, come quello a cag. d'es. del sommo Le Gendre che ci insegna, *potersi considerare come eguale per tutti i riguardi ad un triangolo rettilineo un triangolo sferico piccolissimo.*

Mentre la storia naturale ci offre a contemplare le vaghe forme di tante diverse chiocciole che popolano i nostri mari, il Geometra non pago dirci quasi, di così prodigiosa varietà di solidi, ne crea nella sua mente dei nuovi, e facendo aggirarsi intorno ad un cilindro o ad un cono ora una figura piana ed ora un'altra, ci rappresenta una quantità di *coclee, di elici coniche di armille* ecc. che gli prestano materia di sublimi speculazioni. Trattò già questo argomento il celebre Evangelista Torricelli il quale trovò poi nel Ferroni un valoroso difensore e commentatore insieme, che ne rischiarò la dottrina e ne estese le applicazioni (8). Chi legger vorrà ciò che scrisse

(8) Supplemento alla dottrina Torricelliana sopra le *Coclee*, Memoria di Ferroni inserita nel T. XV parte I. pag. 60 delle nostre Memorie.

quest'ultimo, e per tessere la storia di quanto oprò in tal ramo di Geometria il vecchio Matematico Fiorentino, e per ammaestrare i giovani a calcolare le superficie, e le solidità di questi corpi così bizarramente conformati, vedrà che il moderno Autore con questo scritto ci lasciò un completo trattato delle *coclee* ricco poi come ogn'altra sua produzione, di cognizioni storiche della scienza e di riflessioni critiche sui pretesi plagi fatti da altri Matematici, e specialmente dagli oltramontani.

Questo metodo ei pur seguì allorquando dimostrar volle con la sintesi ognor da lui prediletta alcuni teoremi d' alta Geometria e di analisi, (9) nè mai cessa dall' inculcare che i moderni algebristi hanno trascurato lo studio della sintesi, perlocchè molte verità le quali essi spacciano come loro invenzioni, o trovansi al dir di lui già esposte se non apertamente almeno sotto velo nelle opere degli antichi Geometri, o come corollarj dipendono dalle verità già da quelli conosciute.

Versato siccome era il Matematico Ferroni nel maneggio del calcolo come ognuno assicurar puossi consultando l'opera di lui intitolata *Magnitudinum exponentialium, logarithmorum et theoria*, di cui più sopra ragionai; allorchè il dotto Francese Budan pubblicò il suo metodo di risolvere le equazioni numeriche, ne fece quegli scopo di sue osservazioni, frutto delle quali fu la dimostrazione di alcuni teoremi che il Geometra oltramontano soltanto indicò (10), e così il Ferroni veder fece che le più recenti invenzioni erano da lui meditate e cribrate, e potevano ben difficilmente le opere dei moderni matematici sfuggir la sua critica, o almeno le acute sue riflessioni, colle quali egli or ridur voleva ai principj già conosciuti

---

(9) Dimostrazione facile e naturale di alcuni teoremi geometrici ed analitici inserita nel T. XVI parte I. pag. 347 delle nostre Memorie.

(10) Giunta a compimento della teorica del nuovo metodo di Budan per la risoluzione delle equazioni numeriche F.° I. di Matem. del Tom. XX. Memorie ec. pag. 17.

le nuove scoperte, o additar pretendea vie più facili o almen diverse di quelle dagli altri battute per raggiungere le cercate verità.

Non è raro il trovar persone sebben di sapere fornite, le quali con occhio di indifferenza a non dir di sprezzo, riguardan gli studj della Matematica pura, e se non li condannano come inutili, ciò proviene dal conoscer anch'essi che la Meccanica, l'Architettura, l'Idraulica, e le belle arti ancora si giovano del soccorso della Matematica, per modo che senza così luminosa guida dar non potrebbero queste nobili facoltà che lenti e mal sicuri passi. Ben persuaso di questo vero il nostro Professore, estese egli le dotte sue ricerche alle utili applicazioni del calcolo, e ci lasciò in questo ramo scientifico varj monumenti del suo ingegno che diritto gli accrescono alla pubblica stima.

Sublime argomento trattar ci volle in uno scritto intitolato *I principj della Meccanica richiamati alla massima semplicità ed evidenza* (11). Si prefigge in esso l'Autore di convincere chi legge, che la meccanica aspirar può a quella evidenza stessa, di cui gode la Geometria ne' suoi fondamentali principj e nelle sue conseguenze. Chi appoggiò sul perno delle virtuali velocità, e chi su quello delle cause finali la determinazione delle leggi fondamentali dell'equilibrio; ma in altro aspetto considerò il Ferroni questo problema di Metafisica matematica, e con nuovi complicati raziocinj lunghi anzichè nò, volle spiegar le leggi d'inerzia, e stabilir sopra nuove basi il principio della leva, e quello della composizione delle forze, i quali costituiscono le proprietà principali di cui fa uso la Geometria nel trattar la Meccanica. Profondo possesso della materia, esteso conoscimento delle altrui opinioni campeggiano in questo scritto, in cui l'Autore a comprovar vieppiù il suo assunto, ci offre la soluzione di alcuni problemi di Meccanica dipendentemente dai canoni da lui fissati, e se alquanto più sciolto ne fosse lo

(11) Stampato nel Tom. X. delle nostre Memorie p. 481.

stile, e qualche miglior ordine avesse egli dato alle sue idee, che in copia grande scorrono quasi rapido torrente dalla sua penna, questa produzione registrar potrebbesi fra i trattati fondamentali della Scienza. Che se aspirar non può a tal vanto non gli manca tuttavia il pregio della novità, e l'Autor suo gloriar puossi di avere arricchita la Meccanica di nuovi mezzi che ne appalesano la verità dei principj.

Chi può conoscere intimamente i vincoli che stringon fra loro la teorica e la pratica di una facoltà, possiede i mezzi più acconcj per avanzarne i progressi. A questo scopo diresse il Ferroni una sua Memoria *sull' uso della logistica nella costruzione degli organi* (12). Vorrebbe egli che li fabbricatori di simili istrumenti conoscessero le belle proprietà della curva, che *Logistica* si dimanda, e dopo di averli istruiti sulla teoria degli intervalli, propone loro la costruzione di una specie di piatta forma regolata da essa curva, piatta forma che servir dovrebbe a determinar in pratica le rispettive lunghezze delle canne degli organi, ed a regolare il così detto *temperamento musicale* onde trovar speditamente l'intonazione sopra qualunque corda o nota. E ad animar vieppiù gli artefici a praticar le sue istruzioni; schiera loro innanzi le proprietà pratiche, direm così della Logistica, la quale mentre serve a determinar la scala delle potenze nelle leve, e quella della dilatazione dei corpi, traccia pure la legge delle densità degli strati atmosferici, e l'altra delle altezze barometriche: nè ciò è tutto, poichè estende essa il suo dominio sulla costruzione della Catenaria e delle curve affini, e ci guida a formare il solido, detto di *ugual resistenza*.

Se il nostro Matematico conoscer si fece con le produzioni di cui finora io ragionai, versato anzi che nò nel calcolo puro, saggi più luminosi poi del saper suo ei ci lasciò in una delle più difficili fra le parti dell' Architettura, nella teorica e pratica, voglio dir delle Volte, la quale costituisce un ramo

(12) Inserita nel Tom. XI. pag. 383 delle nostre Memorie.

dei più ameni e insiem più difficili della scienza degli edifizj. Tre importanti oggetti si propose di trattare il Ferroni in una lunga memoria (13) relativa a questo argomento. Quello di ridurre la costruzione delle Volte ad un caso unico, semplice, e chiaro, al principio della Catenaria pienamente conforme. L' altro di spogliare l'apparecchio geometrico ed analitico che nelle opere degli scrittori di questa materia si incontra, da tutto ciò che avvi di superfluo onde facilitar così l' intelligenza delle leggi dell' equilibrio. E per ultimo cercò l' Autore di restringere ad una sola regola classica la costruzione pratica di qualunque arco, e di ammaestrar gli Architetti con ben adatti metodi grafici approssimativi a tracciar le curve delle Volte di qualunque ampiezza, senza aver duopo delle formole analitiche, le quali ben sovente riescono di maneggio difficile per chi non fu instituito nei più sublimi arcani della scienza della quantità.

Se nella trattazione della materia ei segue l' ordine delle idee da altri Autori tenuto, diversa è la via, che batte nell' esporre i proprj pensieri, perchè procura ognora, attenendosi alla sintesi, di semplificar la soluzione dei problemi, e le dimostrazioni dei varj teoremi su gli archi, e le Volte ; nè contento di considerare il caso dell' equilibrio loro in un aspetto, cerca di scoprirne le leggi per vie diverse, che però tutte il conducono ad ottenere gli stessi risultamenti ai quali giunsero col mezzo di intricate formole De la Hire, Clairaut, Bossut ed altri insigni geometri. Oggetto precipuo di questo scritto del Ferroni si è poi di ridurre per quanto può, tutti i casi di equilibrio al fondamentale principio della Catenaria, e mentre ciò ei fa, esamina contemporaneamente i varj paradossi, che in queste astruse teorie si incontrano, e specialmente quello sulla giuntura dell' ultimo cuneo che poggia sul piè dritto di un arco, e l' altro che risulta dal supporre l'at-

(13) L' equilibrio de' Cieli conformati a mezza botte inserita nel Tom. XVIII. parte Matem. pag. 397 delle Memorie ec.

trito e la coesione dei cunei infinita. E siccome nella pratica dell' Arte la somma delle cose si riduce a conoscere il massimo, ed il minimo delle resistenze e delle pressioni, così egli offre agli Architetti le regole per conoscere entro quali limiti fissar convien le misure delle Volte onde ottener questo scopo. Ma a giovar vieppiù tali costruzioni, immaginò egli di tracciare come fece, una serie di curve applicabili ad ogni special caso d' arco, o di Volta da edificarsi, e diede alcune applicazioni pratiche seguendo in ciò il metodo dall' equazione del Sig. De la Hire determinato per l' equilibrio dei piè-dritti, ed accompagnando il tutto con la descrizione grafica delle curve più usate in questi casi, da lui stesso elegantemente disegnate.

L' Italia di nobili ingegni feconda in ogni tempo, fra i diversi architetti che nel secolo sedicesimo eresssero tante fabbriche, le quali formano la maraviglia degli stranieri, novera Bartolommeo Ammanati Battiferro di Fiorenza. Disegnò questi ed eseguì sull' Arno l' elegante Ponte detto di S. Trinità che forma uno dei più begli ornamenti di quella magnifica città. Credevasi dai più che la curva degli archi la quale oltremodo schiacciata si rappresenta all' occhio, composta fosse di due rami eguali di parabola, che si unissero alla chiave con un po' di sesto acuto, dall' Architetto ingegnosamente nascosto con mensoletta che figura come cuneo stringente l' arco in sommità.

Questo edifizio somministrò al Ferroni utile argomento per altro scritto architettonico (14): fece egli misurar esattamente questo bel Ponte dal Sig. Ingegnere Giuseppe Salvetti che tracciò inoltre la curva degli archi ; e così a scuoprir si venne non essere questa parabolica ma bensì un *ovato a più di tre centri.* Molte cognizioni alla pratica dell' Arte vantaggiosa racchiude questa Memoria, e per disegnar le curve delle Volte, e per conoscer quelle di molti fra i ponti costruiti in Euro-

(14) Della vera curva degli archi del ponte di S. Trinità di Firenze, Memoria inserita nel Tom. XIV. parte I. pag. 8. delle Memorie ec.

pa onde valersene alla opportunità; ma può specialmente giovare agli Architetti posteriori all'Ammanati il confronto da cui a suo parere, si evince che le regole di quel celebre uomo preferir debbonsi da chi voglia combinar la solidità dell'Arco o Volta con la sveltezza e col buon garbo che presentar deve all' occhio dell' osservatore intelligente. Mentre con questi scritti sull' Architettura giovava il Ferroni la scienza, procurava inoltre alle classi diverse dei commercianti e compratori una reciproca garanzia, proponendo al pubblico una stadera men difettosa e più comoda di quelle finor conosciute (15). Una nuova, ed ingegnosa forma del peso o Romano il cui fulcro stà costantemente con questa mutazione sulla retta nella quale trovasi quello della stadera, ed una spranga poligona raccomandata a vite alla rimanente macchina, formano due utili mutazioni dall' Autor nostro introdotte nella costruzione delle stadere. Mentre infatti col primo trovato si rende il movimento della stadera più regolare, si ottiene col secondo l' intento di pesare con lo stesso marco le merci giusta la divisione dei pesi di varie nazioni, poichè basta segnare sulle faccie del prisma poligono la divisione corrispondente al paese di cui si desidera di conoscere i pesi, e si avrà l' intento desiderato. Ed a rendere più utile questo scritto, si estende il Ferroni a prescriver le regole migliori che gli artefici seguir debbono nel costruir tali macchine, e suggerir loro quelle avvertenze che più all' uopo ei giudica per l' esattezza delle bilancie, e stadere; scioglie alcuni facili ma eleganti problemi sulle loro dimensioni in pratica, ed addita i mezzi più idonei per dividerle in modo che si possano conoscere precisamente le unità, e le frazioni dei pesi (16).

La storia delle scienze matematiche dal nostro Autore a fondo conosciuta, e che formò direm così, precipuo argomento

(15) Memoria che trovasi nel Tomo XVIII. parte Matem. pag. 417 dei nostri Atti.

(16) Il Ferroni ebbe a compagno in questo lavoro il Sig. Soalhat uffizial del genio Francese.

delle discussioni sue in quasi tutte le Memorie da lui pubblicate, questa storia fu già scritta per intiero dall' illustre francese Montucla. Qualora però egli parlar dovette dei nostri Italiani, o non fu in molti incontri abbastanza esatto nel riferirne le scoperte, o non si diffuse quanto doveva, nell' esporne i meriti. Geloso il Ferroni del patrio onore, rilevò alcuni di tali errori del Montucla nell' articolo che risguarda il celebre Geometra Fiorentino Viviani, di cui il Ferroni conoscer fece diffusamente l' opera che ha per titolo *Centrobarycorum* che in parte restò inedita.

Mentre il Viviani ad un principio unico con singolare evidenza dimostrato appoggiò alcuni eleganti teoremi sulle figure conterminate da linee curve, seppe egli destramente introdurre in quest' opera l' altro principio fecondissimo degl' *indivisibili* ed opportunamente se ne prevalse, il che accresce i suoi meriti d' assai, come il nostro Aütore ci fa con ogni ragione rilevare.

Alla storia delle Scienze naturali appartengono pure due altre produzioni dell' infaticabil nostro scrittore, l' una in cui traccia rapidamente, e con uno stile più sciolto dell' usato, il metodo tenuto per risanare le maremme toscane, e così facendo ci lasciò un' utile memoria in cui addita le regole pratiche da seguirsi per condurre a buon termine il prosciugamento delle valli. Alcune ricerche idrometriche sul fiume Arno formano il secondo dei nominati scritti del Ferroni, nel quale dopo di aver egli ricordate con l' appoggio dei documenti le varie inondazioni che questo fiume dai più remoti tempi fino a noi produsse, si propone a sciogliere l' importante quesito.

" Se, ed in qual progresso di tempo si facesse all' arte
" impossibile di contener l' Arno ne' suoi ripari, o all' incon-
" tro se mai convenisse di abbandonare i dintorni (17). L'esame

(17) Queste due Memorie furono lette dal Ferroni nell'Accademia Fiorentina dei Georgofili, e si trovano stampate negli Atti della medesima.

dei fatti accaduti confrontati con li principii teorici della scienza idraulica lo condussero a far rivivere il principio, che a moderar la rapidità delle piene dei nostri fiumi, causa principale delle inondazioni, coltivar debbonsi sui dossi degli Apennini le selve e impedir la smoderata coltivazione dei monti, come già da un secolo e più insegnava l' illustre Viviani.

L' attività sorprendente, dote particolare del Ferroni, ed i molti talenti di cui era fornito, lo rendetter capace di versare sì nella teorica, sì nella pratica delle scienze naturali, e di coltivar pur anche come già accennai le amene lettere con fausto successo, talchè si meritò di presiedere in patria la rinomata *Accademia della Crusca* negli atti della quale inserì alcune sue brevi memorie (18). Ed allorquando ci venne meno, il Chiarissimo Segretario dell' Accademia Sig. Abbate Gio. Battista Zanoni, che le buone lettere già da qualche tempo perdettero, ne pubblicò l'elogio che è inserito nel terzo Volume degli atti stessi (19). Nè io tacer debbo che mentre il suo encomiatore in lui riconobbe acutezza di talenti e vastità di sapere, tuttavia disse come questo scienziato estender volendo oltre ogni confine la sfera delle proprie cognizioni, penetrar non potè ben addentro negli arcani delle scienze sublimi, e possederle a fondo, e come il soverchio amore di erudizione e l' irrequieta smania di spargerla in quasi tutte le sue produzioni, le rendette non rade volte piuttosto oscure e faticose ad essere intese, specialmente perchè disvia il lettore dal precipuo argomento che imprende a trattare. Animato poi come egli era da un' ardente brama di portar dovunque la face della critica e di esaltar forse un po' troppo le proprie idee non tutte sicuramente nuove, maraviglia non è se trovò

(18) Illustrazione di varj passi della Divina Commedia ec. Lezioni (atti dell'Accademia della Crusca T. I pag. 1. 125). Nel Tomo III poi trovasi a pag. 81, l' estratto di una Lezione dello stesso sull' importanza di posseder bene i linguaggi delle scienze di cui si vuol scrivere la storia.

(19) Alla pag. 391.

oppositori, e fermi che più di una volta acremente impugnarono le sue massime.

Se questo Matematico riconoscer non puossi a dir vero, esente da tali mende, retaggio infausto dell'umana condizione, e se mostrossi egli forse avido un po' troppo di gloria, la quale come acuto sprone punge ognora l' uomo da nobili e generosi sentimenti animato ; ciò nulla ostante saper devesi a sua giusta laude che godette in patria sommo credito, e mentre con le moltiplici sue produzioni cercò di giovare ogni maniera di buoni studj, occupossi ad un tempo della pubblica amministrazione a cui dagl'anni suoi più verdi chiamato avevalo il magnanimo Gran Duca Leopoldo. Parte attiva ebbe perciò il Ferroni in quasi tutte le idrauliche operazioni che quel Principe eseguir fece a sollievo della maremma, della Val di Nievole, ed altrove, e seppe meritar per tal modo la sovrana approvazione, che destinato venne a Matematico Regio. Non imprendevasi perciò progetto alcuno di costruzione idraulica in Toscana, nè si cominciavan bonificazioni di valli, nè si cambiavan massime in questo ramo di amministrazion pubblica, se non ascoltavasi il voto dell' Autor nostro che indefesso nella fatica, apriva a tutti il parer suo, e promoveva per ogni modo i pubblici lavori al vantaggio diretti di quella ognor crescente popolazione. E nuovi benefici influssi questa sperimentò per parte di Ferroni, allorchè rivolse egli li studj suoi alla legislazione economica. Imperocchè comparve questi fra li propagatori più zelanti di quelle auree verità, che modificando alcune leggi, svincolarono il commercio in Toscana, e ne animarono l' industria ; protesse la pratica agricoltura, e chiamato in seno alla benemerita Accademia dei Georgofili, più volte sentir si fece in quelle Adunanze, ora a disputar questioni interessanti la patria coltivazione, ora a proporre nuovi mezzi di industria per vantaggiar la situazione dei coloni Toscani, ora all' uopo di corregger gli abusi da una lunga e cieca pratica nell' agricoltura introdotti, ogni fatica e pensiere consecrando sempre alla pubblica prosperità.

Ben conobbero i pregi di quest' uomo insigne i varj Governi che rapidamente si avvicendarono in Toscana, poichè se il Gran Duca Leopoldo fu de' suoi favori largo e munifico dispensatore al Ferroni, il suo successore Ferdinando non mostrossi al Padre inferiore nello stimarlo.

E quando un' infelice Borbone dominò quelle amene provincie, rispettò gli onori, ed i titoli dei quali era decorato il nostro Matematico, a cui allorchè la Toscana ubbidì alla Francia, toccò l' onorevole incarico di formar parte della commissione destinata all' impianto del nuovo sistema di pesi, e misure. Il Ferroni frattanto in mezzo alla varietà dei casi, che la rapida successione di tanti moderatori della pubblica cosa necessariamente condusse, seppe conservar la fama acquistata, ed allorquando le armi invitte dei collegati Monarchi ristabilirono in Italia gli esuli suoi Principi, un nuovo testimonio ei ricevette della buona opinione di cui godeva, poichè il Sovrano Ferdinando negli aviti dominj rientrato, e che la Toscana or piange estinto, lo scelse fra i Deputati alla compilazione del nuovo Catasto.

Rispettato l'Autor nostro e stimato in Patria, perchè al vantaggio de' suoi concittadini diresse ognora le studiose sue cure, godè anche presso gli esteri di non dubbia fama, perlocchè le Accademie Italiane e d' Oltremonte si fecer premura di annoverarlo fra i loro collaboratori, e giovaronsi de' suoi lumi, e mentre esse così facendo riconobbero i distinti di lui meriti, egli a vicenda con l' arrichire delle sue produzioni scientifiche i loro atti, contribuì a conservar tra noi l' amor delle Scienze e delle buone Arti, e cercò di favorirne ognora i progressi (20).

---

(20) Ferroni morì sui primi di Novembre dell' anno 1825.

ELOGIO STORICO

DEL CAVALIER GIO. BATTISTA PALLETTA

PROFESSOR DI ANATOMIA E CAPO CHIRURGO

AL GRANDE SPEDALE DI MILANO

Scritto

DAL SIG. DOTTOR MARCO PALLETTA

Ricevuto adì 1. *Aprile* 1837.

Quegli è sommamente benemerito della Società, il quale arrichito delle più pregevoli qualità dell'animo, delle più solide virtù, la sua vita consacra ad illustrare e promuovere le utili Scienze e se stesso e le cognizioni sue indefessamente consacra al sollievo della bisognosa umanità. Tale fu certamente il Cavaliere Gian Battista Palletta Professore di Anatomia e Capo-chirurgo nel grande Spedale di Milano, membro della Società Italiana delle Scienze la cui memoria quanto cara e compianta da' suoi contemporanei, altrettanto è degna si raccomandi alla venerazione ed all' esempio de' posteri.

Nacque egli il 18 Aprile 1748 in Monte Crestese terra vicina di Domodossola nell'alto Novarese da poco facoltosi parenti i quali lui solo poterono destinare ad una particolare educazione.

Fu pertanto inviato di buon' ora alle scuole dei PP. Gesuiti che erano in Briga piccola Città della Repubblica del Vallese, ove dedicossi con non ordinaria lode alle umane lettere ed alla Filosofia. Di là passò sul finire del 1767 in Milano ove fu ammesso alle scuole mediche, (1) le quali in quel

(1) Studiò ma per pochi mesi soltanto la Giurisprudenza (Ferrario Dott. Giuseppe della vita e degli scritti del Prof. Palletta pag. 9.)

grande Spedale tenevansi dai valenti maestri Moscati, Patrini e Gallaroli, spezie di Collegio di alcuni Medici e Chirurghi i quali allogiati nello Spedale stesso, ed impiegandosi giusta il grado delle loro cognizioni alla cura degli infermi ivi ricoverati, attingevano nel tempo istesso e dalla voce e dall' esempio dei loro maestri e dalla propria esperienza l'arte di guarire. Rammentavano ancora non ha molt' anni, li suoi colleghi con quale avidità v' abbracciasse il Palletta ogni occasione a que' tempi ancor rara di trarre dal cadavere stesso le sue anatomiche cognizioni delle quali sentiva la somma importanza, siccome di essenziale fondamento ad ogni medica disciplina. Dopo sei anni di iniziamento (2) vale a dire nel 1772 recossi a Padova, e nel successivo anno riportò in quello studio riputatissimo il diploma di *Medico Filosofo*, segnato fra gli altri da quel medesimo celeberrimo Stratico che fu poi suo collega ed il Nestore nell' Istituto Italiano.

Rivenuto in Milano fu l'anno stesso nominato a chirurgo secondario dello Spedale, quindi prosettore anatomico, e dopo ottenuto il grado accademico in Chirurgia nella Università Pavese, già dal 1780 sedeva al posto di Capo-Chirurgo dello Spedale stesso.

È certo, ed è escito di bocca dello stesso Palletta che egli era stato prescelto ad occupare la cattedra di Anatomia in Mantova, ove l'Augusta Maria Teresa aveva divisato di erigere una Università, ciò che poi non ebbe luogo. Non se ne saprebbe però fissare l'epoca precisa, come neppure può fissarsi il tempo in cui incominciò le sue dimostrazioni di Anatomia ed a tenere insegnamento clinico chirurgico, incombenze allora forse annesse alla carica di Capo-Chirurgo.

---

(2) Ecco l' attestato che gli fece il Gallaroli. « Ornatissimum adolescentem Joan-« nem Baptistam Pallettam Institutionum medicarum studio sedulam operam navasse « testor: in quo disciplinae genere sic ipse profecit, ut qui me docentem audiebant « *omnium facile Princeps extiterit.* Non itaque dubito quin uberrimum laboris fruc-« tum sit assecuturus. «

Nell' età sua pertanto di poc' oltre trent' anni occupava un posto assai distinto in Società, tuttochè poco nobile tuttora in que' tempi si stimasse la professione di Chirurgo, la quale appunto doveva ritrovare in lui chi fra noi la ristorasse e quanto ogni altro cooperasse a perfezionarla. Senza mezzi di fortuna, senza amici, diceva egli talvolta, a forza di studio, e di buona condotta giunsi a farmi considerare qualche cosa. Servirono soprattutto ad aprirgli la onorevole carriera le sue *Nova gubernaculi testis Hunteriani* ec. *descriptio* stampata in Milano nel 1777 e ristampata poscia in Olanda per cura del Sandifort, con cui illustrò moltissimo la storia fisiologica e patologica di quelle parti ; una *Memoria su alcune malattie dei gelsi* premiata l' anno 1778 dalla Società patriottica di agricoltura ed arti di Milano, alla quale venne poco appresso aggregato, ed infine per tacere d' altri, le preziose pratiche annotazioni, delle quali arricchì la sua traduzione dell' opera classica del Rosen di Rosenstein sulle malattie de' bambini, colla quale fissò l' attenzione dei pratici su queste malattie dalla comune dei Medici allora quasi neglette, nel mentre appunto che la beneficenza dell' Arciduca Ferdinando d' Este provedeva in Milano al ricovero della classe più bisognosa di essi bambini, *dei trovatelli*.

Ma la difficile e laboriosa carica di Capo-Chirurgo in sì ampio Spedale richiedeva, che alla pratica ed all' insegnamento anatomico e clinico rivolgesse il Palletta tutte le sue forze. Appare tuttavia dal catalogo delle sue Memorie che non trascurava di impiegare gli intervalli che gli rimanevano in ricerche più speciali. Rimarchevole è l' opuscolo *De nervis crotaphitico et buccinatorio*, in cui svolse pel primo alcune idee sulle differenze tra questi rami nervosi e gli altri che dagli Anatomici si comprendono sotto il nome di *quinto pajo*, differenze che vennero non ha guari messe in tanta luce dalle sperienze di Carlo Bell e del Bellingen.

Nel 1788 fece parte del Magistrato sanitario istituito in Pavia col nome di *Direttorio Medico*, in qualità di Assessore

Chirurgo della Delegazione Medico-Chirurgica farmaceutica di Milano la quale ne era una dipendenza. L'anno susseguente poi la nascente Accademia Giuseppina di Vienna lo onorò della sua affigliazione. Le memorie pratiche dal Palletta pubblicate intorno a quest' epoca nel *Giornale* di Venezia *per servire alla Storia ragionata della Medicina* sono della massima importanza, quelle soprattutto sull'articolazione del femore e su gli aneurismi.

Tutto assorto nelle sue occupazioni rimase immune spettatore degli sconvolgimenti politici co' quali infaustamente si chiuse il XVIII Secolo. Fu confermato dalle Autorità Repubblicane nelle sue cariche quella aggiungendogli di Capo-Chirurgo della Guardia Nazionale Milanese. Sventate poi le illusioni democratiche fu il Palletta tenuto in grande estimazione da amendue i governi Italici che si succedettero. Ricostituito quindi a Professore dipartimentale di Anatomia con più largo onorario venne sul 1805 creato membro della Legion d'onore e nel 1806 Cavaliere della Corona di ferro; fece parte della Commissione radunata d' ordine superiore nel 1801 nello Spedale maggiore di Milano, onde stabilire esatte osservazioni sull' innesto del vajuolo vaccino, le quali furono stampate l' Anno X° per ordine del Comitato governativo della Repubblica Cisalpina. Le principali Accademie scientifiche Italiane come quelle di Bologna, di Venezia, Genova ecc. lo ascrivevano intorno a quell' epoca fra i loro membri e già sino dalla sua istituzione fu aggregato all' Istituto nazionale Italiano; ed a quest' epoca pure la fama di lui come pratico era in fiore più che mai per modo di esser costretto ad involarsi a molti malati che d' ogni parte avevano ricorso a' suoi lumi. Accessibile però a tutti non reggevagli l'animo a resistere ai prieghi specialmente dei poveri ed alle preghiere degli amici. Questa circostanza fece, per dir così, inaridire la sua penna, mancandogli cioè l' agio di istituire speciali ricerche e di estendere le pratiche annotazioni; alcune Memorie lette nelle adunanze del R. Istituto Italiano sono le sole produzioni sue di questi tempi.

Un nuovo ordinamento fu dato nel 1811 alle Scuole speciali medico-chirurgiche di Milano, delle quali venne eletto Reggente il Palletta che aveva allora per Colleghi il Pocatelli, il Monteggia, il Porati. Nell' anno medesimo vuolsi dalla comune fama, che trovandosi in compagnia di alcuni illustri amici in Parigi, ivi desse un' esimia prova del suo sapere in occasione di gravissima malattia d' un alto personaggio assai nella grazia dell' Imperatore, avendo essa avuto quell' esito infelice e per quelle organiche lesioni quali egli discordando dai celebri Professori di quella Capitale, aveva preveduto. Si perdettero i *dettagli* del fatto; i compagni di viaggio sono al Palletta da lungo tempo premorti, ed egli era troppo modesto per farne parola, anzi che vantarsene. Più caro al suo cuore nè meno onorevole fu l' accoglimento che gli fecero i Milanesi al suo ritorno che seguì dopo sette mesi. Testimonj oculari assicurano essersi il suo arrivo festeggiato universalmente e colle più vive dimostrazioni di affetto. Fu una specie di ovazione quanto meno cercata altrettanto più bella; imperocchè notissima era la sua avversione ad ogni segno di distinzione, lontano tenendosi dal frequentare i grandi, e schivando ogni esteriore apparato.

Nel 1814 trattavasi di ascriverlo alla nuova nobiltà Italiana col titolo di Barone, ma la subita caduta di quel Regno ne prevenne la regolare istituzione. Sotto gli auspicj del Cesareo Governo subentrato, che sì efficacemente sostenne i primi suoi sforzi, continuò il Palletta nei soliti uffizj, insino a che abolite per Sovrana determinazione nel 1818 le scuole speciali di Milano, venne esonerato dalla parte di insegnamento a lui affidata. Uno sfortunato accidente teneva allora al letto l'emerito Professore che nell'Agosto dell' anno 1817 cadde sul fianco sinistro, e ne riportò la semilussazione del femore che fu conseguita da incurabile zoppicamento. *Ita*, dice egli nella prefazione delle sue *Exercitationes pathol: qui olim claudicationis causas sedulo indagaverat, perniciosos effectus in se ipso expertus est.* Questa che fu lunghissima convalescenza, gli diede

agio a poter raccogliere ed estendere le giacenti sue pratiche annotazioni e formarne le sue *Exercitationes pathologicae*, nelle quali con uno stile conciso ed assai elegante coscienziosamente consegnò i risultamenti della sua lunga pratica; quest' opera siccome classica venne accolta con plauso non ordinario dai maestri dell' arte (3). Non è poi assolutamente a tacersi quali trasporti manifestassero li suoi concittadini e colleghi per la sua guarigione massime al suo primo rientrare allo spedale; e non potè egli allora raffrenarne l'espressione, e qualche furtiva lagrima però fu il solo indizio se non di sua compiacenza, di sua commozione almeno. Nominato il Professor Palletta membro attuale della Società Italiana delle Scienze nell' anno 1823, non potè egli corrispondere all' oggetto di questa istituzione con lo spedire alla medesima le sue produzioni, poichè cominciavano a venirgli meno le forze e nel 1826 sentì il bisogno di essere sollevato dal carico di Capo-Chirurgo, il che concedendogli in termini onorevolissimi l'Augusto Imperante, si degnò al tempo stesso di fregiarlo della decorazione dell' Austriaco Ordine della Corona di ferro. Non potè tuttavia esimersi dal ritenere le principali funzioni di Capo-Chirurgo come ne venne pregato, e nemmeno potè sottrarsi negli anni successivi dal sovvenire de' suoi sussidj parte almeno dei molti che ne lo supplicavano. Negli ultimi giorni perfino di sua vita quando sereno di mente vedeva il suo corpo a poco a poco consumarsi da pertinace affezione intestinale, non ricusò dare dal letto qualche sua consultazione. Quantunque nutris-

(3) Fra li giudizj favorevolissimi che apparvero su quest' opera nei giornali sì esteri che nazionali, piacemi riferire quanto sullo spirito che la dettò scrisse il Professor Naegele di Heidelberga nella sua dissertazione *De Encephalo ematemate* pubblicata l'anno 1822. « Ita se praestitisse (così il suddetto Professore) in libro suo « ut nemini cuiquam possit esse dubium , quin idem sit admodum subtilis et solers « indagator naturae, et qui hujus vestigia ubi ubi impressa et pie adoret et naviter se- « quatur, studiose que exploret, ac proinde eundem minime ejusmodi hominibus ag- « gregandum, qui sibi ipsi nimium quantum placent, aliosque in sua verba tamquam « in divinitus edita oracula jurare volunt. »

sero i Medici curanti qualche speranza di ristabilirlo, volle egli che fossergli amministrati i conforti di quella Religione che aveva sempre candidamente amata, e colla pace del giusto chiuse gli occhi la notte del 27 Agosto 1832. Siccome di pubblica calamità Milano tutta pianse la perdita di questo lume di sapere, di modestia e di carità; e le mortali sue spoglie in umile arredo fra le benedizioni dell' accorsa moltitudine, e col mesto numeroso corteggio de' suoi colleghi ed amici, previa una patetica narrazione delle azioni che tanto lo distinsero recitata da un valente Medico, venivano la sera del 29 riverentemente consegnate alla tomba (4).

Era il Professor Palletta alto e ben conformato della persona, di salute e di mente fermo, ed infaticabile, sobrio e spregiatore dei comodi della vita, e di ogni ricercatezza di modi, d' animo sereno ed eguale, sempre disposto alla beneficenza. Abitualmente meditabondo, usava poche parole massime coi malati, inutile se non dannoso stimando lo spiegare le cagioni del suo operare a chi il più delle volte non era a portata di comprenderle, o era prudente il nasconderle. Sapeva tuttavia all' occasione mostrarsi conversevole e lepido, ed un eloquente vigoroso argomentare spiegava sempre ne' suoi consulti e nelle conversazioni. Visse celibe e dando assidue prove di quella onestà e schiettezza di carattere che distinguono l'uomo giusto e il vero cattolico. Prestavasi con eguale impegno al soccorso del povero come del ricco, e la sua casa per più ore del giorno era aperta a chiunque vi andasse a ricercarlo di consiglj, e senza curarsi che punto o poco fossero ricompensate le sue fatiche, le molte volte soccorrendo all' opposto di denaro gl' indigenti presso de' quali venisse chiamato : si mostrò sempre alieno da ogni sorte di passatempi, altro ricreamento non amando in fuori di qualche amena conversazione e della

(4) Nel 1814 fu nominato il Palletta Barone nel Regno d'Italia, ma la caduta del Governo impedì la spedizione del Diploma. Nell'anno 1826 il Re Carlo X lo confermò membro della Legione d' onore alla quale già apparteneva.

lettura di opere specialmente di Fisica e Storia naturale, nelle quali Scienze era assai versato, facendo altresì sue delizie talvolta oggetti di Storia e di Antiquaria. Non fu quindi il sapere soltanto, ma le sociali virtù in particolar modo quelle si furono che gli conciliarono il sommo rispetto, l'amore anzi non che del popolo, de' suoi colleghi tutti, i quali trovarono sempre in lui chi loro dasse animo e disinteressata assistenza scevra da ogni maligna e vergognosa superchieria.

" È il Palletta eccellente Anatomico ", diceva di lui un giudice ben competente, lo Scarpa, e perciò Chirurgo eccellentissimo. Li suoi opuscoli d' Anatomia, frutto de' suoi giovanili lavori dinotano che non poco avrebbe contribuito all' avanzamento della medesima, se alla pratica non avesse dovuto quasi esclusivamente dedicarsi. L' essere stato di buon ora collocato alla testa di un vasto Spedale, l'estensione grandissima delle private sue clientele somministrarono allo spirito suo osservatore un abbondante pascolo, ed assieme alla continua lettura degli antichi e moderni Autori formarono in lui un sommo Chirurgo ed un Medico eccellentissimo.

Nessuna delle sue opere risguardanti la pratica manca di un vero intrinseco merito; la Medicina e la Chirurgia gli vanno anzi debitrici di molti perfezionamenti. Ebbe gran parte il Palletta alla discussione sulla utilità e sul metodo di operare la pubitomia e la estirpazione dell' utero; uno de' primi indicò la natura ed i migliori mezzi curativi della cifosi paralitica e dello zoppicamento congenito. La fine anatomia e la patologia delle parti componenti l'articolazione del femore, quest' argomento sì grave e sì difficile venne mercè le accurate indagini del Palletta tratto dalla oscurità in cui era tuttora avvolto. Per il primo diede una esatta notizia della origine e della essenza degli anevrismi delle grosse arterie, come a lui pure fra i primi devesi l' idea della legatura temporanea nella cura dei medesimi, e di averla con tanto successo messa in pratica e perfezionata unitamente allo Scarpa, il quale unendo le proprie osservazioni a quelle del Palletta e d'altri, ne fece

argomento d'una delle magnifiche sue Memorie. Decise pel primo il nostro Chirurgo della natura e del modo di guarire la non nuova e pur spesso micidiale malattia de' neonati detta *Sclerosi*. Moltissime altre parti della Nosologia principalmente chirurgica furono per opera di lui più o meno illustrate, come appare dal titolo delle sue opere e dall' indice delle materie (5) contenute nelle sue *Exercitationes pathologicae ;* colle quali ebbe appunto per iscopo di illustrare, coi fatti molti punti tuttora oscuri di patologia.

Nè di minore spinta all'avanzamento della Scienza furono gli ajuti efficacissimi dei quali non si mostrò giammai avaro a quelli che si occuparono di ricerche sia pratiche, sia puramente accademiche, lasciando in disparte li suoi allievi ai quali per proprio dovere prestò sinchè visse, la più benevola assistenza. Il Malacarne, il Tumiati, il Rezia, i due Caldani fra gli Anatomici spesso a lui ricorsero per avere comunicazione di fatti e di idee sulla struttura delle parti. Lo Scarpa stesso per tacere d'altri non pochi, deve al Palletta come ne fa fede la sua corrispondenza, una buona parte dei fatti, delle osservazioni, e dei pezzi patologici che sono il fondamento delle opere sue specialmente pratiche, ed a lui soleva con fiducia rivolgersi in ogni suo bisogno e sottomettere i suoi progetti di perfezionamenti, acciò *in quel vaso il più grande che abbia Pandora in Italia* (così qualificava egli lo Spedal maggiore di Milano) li mettesse alla prova dell' applicazione. Di non poco sussidio riuscì pure al Sandifort l' invìo fattogli dal Palletta di una raccolta di ossa morbose delle quali tanto si occupò quel Professore. Questi generosi sincerissimi tratti di scientifica corrispondenza in istrettissima amicizia lo unirono con la maggior parte dei dotti Medici d'Italia, e con molti d' Oltremonte de' quali taluni col titolo di maestro loro lo onorarono.

Senza dare un' esclusiva preferenza ad alcuno de' varj me-

(5) Il catalogo di esse trovasi unito al presente elogio.

todi, dei quali si applicò pure a renderne alcuni più semplici e più sicuri, fu a suoi dì grande e prudente operatore. Più sorprendente però era di gran lunga in lui il finissimo tatto con cui penetrar sapeva la recondita natura delle malattie sia mediche, sia chirurgiche, la loro indole e tendenza, e la via più opportuna di opporvisi. I suoi pronostici erano volgarmente quasi altrettanti oracoli rispettati; piacevagli anzi talora involgerli sotto qualche forma di dire enigmatica, di cui l' evento soleva aprire il segreto. A lui spessissimo ricorrevano i suoi colleghi; allorchè esauriti avevano i mezzi terapeutici a loro cognizione, o non vedevano in qual modo combattere alcun morbo pertinace ed oscuro. Con la non interrotta lettura e col lungo uso erasi egli messo al possesso de' diversi metodi curativi riconosciuti efficaci in varj tempi e sotto i differenti sistemi. Non era raro che mettesse in tormento qualcuno de' meno eruditi farmacisti colla prescrizione di medicamenti tratti da antichi autori, ma le molte volte avveniva altresì che con siffatti mezzi si arrivasse al divisato intento. A torto, diceva egli, hanno i moderni a poco a poco sbandito dalla pratica i medicamenti composti; in essi le virtù dei semplici scambievolmente si modificano, onde una nuova ne emerge e particolare, cui la esperienza unica guida del Medico in questo proposito può sola scoprire e confermare; molti se ne trovano nei formolarj saggiamente combinati, e che ebbero non equivoci successi nelle mani di autorevoli e classici scrittori. Non è però che egli non amasse la semplicità del medicare; all' opposto compiacevasi di ordinare de' medicamenti semplicissimi tratti talora dalle cose più volgari, sicchè avrebbero mosso a disprezzo, se da tutt' altri che dal Palletta fossero stati prescritti. Con tale metodo otteneva anzi, e tuttora se ne fa ricordo, delle guarigioni che avevano quasi del maraviglioso; le sue prescrizioni si ritenevano anche dalle persone colte e si conservavano quali preziosi talismani. Tanto grande era la confidenza che avevasi nella eccellenza delle sue cognizioni, che pochi poterono giammai procacciarsene sì

alta, sì costante sì generale. Unanime fu pertanto l'espressione dei voti, ed il concorso di volontarie oblazioni, perchè un decoroso monumento venisse eretto nell' atrio del grande Spedale di Milano a perpetuare la memoria delle virtù e dei servigi del Professore Palletta e ad attestare la pubblica riconoscenza a così grand' Uomo. Il Cenotafio nella elegante e grandiosa forma prescelto dal celebre Architetto Marchese Cagnola fu con particolar diligenza eseguito dall' abilissimo scultore Sig. Sangiorgio, e nel dì 25 Marzo 1835 giorno di grande concorso allo Spedale, venne maestosamente scoperto al Pubblico, che compiacevasi di veder ritratti in marmo i lineamenti di chi fu oggetto della sua stima ed affezione, e di leggerne compendiata elegantemente la vita nella seguente iscrizione dell' Abate Borda distinto fra i successori nell' arte del Morcelli.

IOHANNES · BAPTISTA · PALLETTA · DOMO · OSCELLA

EQ · CORONA · FERREA · HONESTAQ · LEG.

PRIMARIVS · PER · ANNOS · LIII

HVJVS · NOSOCOMII · CHIRVRGVS

PROFESSOR · EMERITVS · ANATOMES

SEDVLVS · POST · CONFECTA · STIPENDIA · CONSVLTOR

INOPIOSIS · OPITVLATOR · LVBENTISSIMVS

XL · VIR · SCIENTIIS · LITTERIS · ARTIBVS · AUGENDIS

INQVE · ALIA · SOPHORVM · COLLEGIA · COOPTATVS

QVEM · FELIX · DIVTINA · EXERCITATIO

PLVRAQVE · OPERA · EDITA · SCRIPTAQ · RELICTA

DOMI · FORISQ · CLARARVNT

COHORS · CIVICA · TOT · MERITIS

CHRISTIANAE · PIETATI · SOCIETATIS · OBSEQVENS

PECVNIA · CONLATA · PONENDUM · CVRAVIT

SOLLERTI · NATVRAE · HVMANAE · SCRVTATORI

DEF · VI · K · SEPT · A · MDCCCXXXII · AET · LXXXVI

POSTERITAS · DISCE

PROSPETTO

IN ORDINE CRONOLOGICO DELLE OPERE

DEL PROFESSORE

CAVALIERE GIO. BATTISTA PALLETTA

CON ALCUNE NOTE CAVATE DALLA VITA SCRITTANE

DAL CHIARISSIMO SIGNOR

DOTTOR GIUSEPPE FERRARIO

CHE HA FATTO UNA MINUTA ANALISI DELLE PRODUZIONI

DEL NOSTRO AUTORE.

ANNI

1777. Nova gubernaculi testis Hunteriani et tunicae vaginalis anatomica descriptio ubi etiam harum partium vitia breviter recensentur. Mediolani 1777.

Descrizione d' uno Scheletro deforme ivi 1777. Inserita nel T.° III. pag. 462 della scelta di Opuscoli Milanesi.

" Unita a questa descrizione veramente interessante il " P. Palletta diede una dissertazione sulle varie defor- " mità delle ossa e sui loro nomi già notati dagli " antichi. „

Splenitis phlegmonoides, ossia vera infiammazione di Milza; inserita nel suddetto Tomo III. pag. 321.

1780. Trattato delle malattie dei bambini di Nicolò Rosen De Rosenstein. Traduzione dal Tedesco con note di G. B. Palletta. Milano 1780.

" Il Sig. Dottor Ferrario ha ristampate nella citata " vita le note fatte dal P. Palletta al trattato di " Rosen. „

Memoria sui Gelsi del Dottor G. B. Palletta che riportò il premio proposto dalla Società patriottica di Milano col programma dell' anno 1778. " Vedi gli atti di detta " Società Mil. 1783. Vol. I° parte 1ª pag. 39. „

1781. Dimostrare con più sicurezza se l'aria fissa sia appli-

cabile con vantaggio o no in qualche sorta di malattia. Dissertazione premiata coll'*Accessit* dell'Accademia di Mantova pel concorso del 1780 ivi 1781.

Riflessioni sopra la Pubitomia inserite nel N.° XI del Giornale per servire alla storia ragionata della Medicina. Venezia 4 Giugno 1781.

1782. Trismus a Mercurio, inserito nel Tomo II scelta di opuscoli Mil. 1782 pag. 404.

1784. De Nervis crotaphitico et buccinatorio. Mediolani 1784. 4.° Figurato " In questa memoria presenta l' Autore " una descrizione anatomica esattissima sull' origine " di questi nervi, sull'andamento e distribuzioni delle " più esili loro diramazioni, e poscia parla del loro " uso. „

1785. Ragguagli di alcuni sperimenti fatti negli anni 1784 1785 nello Spedale di Milano intorno all' efficacia delle Lucertole prese internamente inseriti nel T.° VIII della scelta di opuscoli di Milano.

Adversaria Chirurgica. Mediolani 1785 4.° Fig. *Tre argomenti contengono questi Adversaria Chirurgica.*

I. De Claudicatione congenita. II. Saggio di sperienze sul sangue umano caldo. III. Osservazioni anatomico-patologiche sulla cifosi paralitica.

1791. Del modo di curare la frattura del collo del femore di Hermanno Giuseppe Brünninghausen, traduzione. Milano 1791. Fig.

1793. Osservazioni sopra i mezzi impiegati dalla natura per riparare alle lesioni degli intestini che portano seco trista necessità dell' ano artificiale. Sono inserite nel T.° VIII pag. 435 del Giornale per servire alla Storia della Medicina. Venezia 1793.

Sulla successiva riduzione dell' omero lussato inserita nello stesso T.° VIII.

1795. Dissertazioni di Chirurgia di Gio. Battista Palletta. Venezia 1795.

Eccone l' Indice

Osservazioni anatomico patologiche intorno all' articolazione del femore.
Della semilussazione.
Della Puntura della vescica orinaria.
Della colica fecale.
Osservazioni sopra alcuni morbi dell' intestino retto.
Osservazioni sullo scirro delle poppe.
" Gli argomenti (così si esprimono gli Editori del Gior-
" nale) intorno ai quali si aggirano *queste disserta-*
" *zioni* sono dei più importanti della patologia non
" meno che della pratica chirurgica, e la maniera con
" cui vi sono trattati corrisponde per nostro avviso
" alla loro importanza. Il Ch. Autore vi si manifesta
" dappertutto, qual egli è infatti, uno dei più dotti e
" sperimentati Chirurghi che abbia ora l'Italia. „
Trattamento usato con quattro persone morsicate da cane.
Della nociva qualità de' frutti del nespolo e del faggio (V. il T.° IX e il X del Giornale della più recente Letteratura Medico-Chirurgica d' Europa stampato a Milano.)

1796. Osservazioni patologico-chirurgiche sull' Anevrisma inserite nel Vol. XI del citato Giornale di Venezia distribuite in quattro articoli.
" Queste osservazioni possono considerarsi come un
" buon trattato pratico di tale malattia. „

1804. Osservazioni pratiche di Chirurgia inserite nelle memorie dell' Istituto Italiano e sono. Cura del Polipo uterino. Idrocele nelle Donne. Ernia vaginale. Litotomia celsiana.

1808. Del Parto pel braccio. Nelle memorie dell' Istituto suaccennato.

1816. Della Vescichetta ombelicale. Nelle stesse Memorie.
Sul morso del cane ivi.

Sopra una frattura d'omero. ivi.

1817. Estratto della memoria di Fanzago del 1816 sull' ulcera dell' Aorta, ivi.

1818. Considerazioni sopra le Varici inserite nel Tomo I. delle Esercitazioni scientifiche dell' Ateneo di Venezia.

1819. Dello spasimo della faccia nelle memorie dell' Istituto. Storia di una Matrice amputata letta fino dal 24 Giugno 1812 all' I. R. Istituto.

Le seguenti memorie trovansi negli Atti dell' Istituto suddetto.

1821. Sul morso della Vipera.
Osservazione di un Glossocele.
Narrazione di una Sinfiseotomia.

1823. Ricerche sopra la malattia de' bambini detta *Indurimento cellulare*. Memorie due.

1824. Intorno all' uso medico del peperino.
Su alcune singolari fratture d' ossa. Milano 1824. Fig.
Intorno alla storia dei mali venerei.

1826. Sulle mummie Egizie.
Sulle recenti opinioni intorno al morbo petecchiale.

1827. Sulle macchine fumigatorie.
Tutte queste produzioni trovansi negli atti del citato Istituto.
Exercitationes pathologicae. Mediolani 1820-1826. Tomi due in F.°
" Il primo volume contiene 143 articoli ed il secondo " 106 i quali spettano in gran parte all' utero ed alle " sue dipendenze ed alla vescica orinaria. „ Questi due Volumi sono corredati di dodici tavole incise in rame, sono stesi con aurea latinità e per avere una succinta idea dell' importanza di quanto contengono si riporta quì il seguente :

Editoris Monitum.

Quae ante hos triginta et amplius annos opuscula chirurgici argumenti vulgaverat auctor, cum a viris doctis non improbata fuisse intellexisset, auctiora, atque, quantum liceret, emendatiora, prout diuturnior rerum usus edocuerat, denuo typis edere constituerat. Adhortabatur ad id potissimum, dum cum illo familiariter hic versaretur, cl. Josephus Wenzel Maguntinus M. D., qui etiam prioribus capitibus aliquot notas adjicere voluit de iis rebus, quae vel ipsemet in valetudinariis vel celeberrimi in Germania viri observaverunt. Verum eodem optimo viro, quem maxime lugemus, praematura morte abrepto, et auctore tum anatomicis, tum clinicis administrationibus distracto, in hanc diem inceptum opusculum differre necesse fuit, in qua otium ab infortunio nactus est ea colligendi, quae dispersa et inculta jacebant.

ACCADEMIE E SOCIETÀ SCIENTIFICHE

alle quali fu ascritto il Prof. Gio. Battista Palletta.

Queste notizie sono tratte dalla citata vita di Palletta.

Anni.

1780. Società patriottica di Milano che intitolavasi d' Agricoltura e d' Arti della quale fu nominato *Socio corrispondente* ed ottenne il premio di Zecchini 75 per una memoria sui Gelsi presentata al concorso aperto dalla Società stessa nel 1778. Nell' anno 1790 fu poi nominato Socio sedente.

1790. Accademia Gioseffina Medico-Chirurgica di Vienna.

1801. Collegio dei Filosofi e Medici di Venezia.

1803. Istituto Italiano.

1806. Accademia di Scienze Lettere ed Arti di Genova.

1807. Società Medica di Bologna.

1820. Accademia Medico-Chirurgica di Napoli.

1823. Socio attuale della Società Italiana delle Scienze Residente in Modena.

ELOGIO

DEL PROFESSORE

ANTON-MARIA VASSALLI-EANDI

SCRITTO

DAL DOTTORE SECONDO BERRUTI

PROFESSORE DI FISIOLOGIA

NELLA R. UNIVERSITA' DI TORINO

Ricevuto adì 11. *Dicembre* 1837.

Nacque Vassalli il dì 30 gennajo del 1761 in Torino da onesti parenti. Dotato di debole costituzione ebbe sin dal suo nascere a lottare contro le infermità che non sembravano volergli permettere di superare i primi confini della vita; od almeno parevano dover porre un invincibile ostacolo allo sviluppo di quelle facoltà, colle quali egli procacciossi poi ragguardevole fama fra i dotti. Le cure dell' affettuosissima madre, l' educazione scientifica ricevuta dall' ottimo di lui zio materno professore Eandi degno successore del celebre Beccaria nella cattedra di Fisica della R. Università di Torino; un genere di vita costantemente regolare e morigerato, uno spirito non ordinario e tenace ne' suoi propositi, sono i mezzi coi quali egli potè ottenere quanto dalla natura sembravagli negato.

All' età di tre anni Vassalli perdette il padre, e venne accolto quale tenero figlio dal suddetto zio, a cui sì fattamente si strinse coi vincoli della più sincera riconoscenza, e con quelli della più alta stima ed amicizia, che per non averlo mai più ad abbandonare, e per non esser mai più da lui disgiunto, neppur di nome, vestito l'abito religioso e ricevuti con lode tutti gli ordini sacri, coltivò col massimo impegno

le scienze naturali, nelle quali vedeva l'Eandi primeggiare, ed aggiunse il cognome dello zio al suo, con null'altro nome volendo più esser chiamato che con quello di Vassalli-Eandi. Quando poi l' Eandi, cedendo al peso degli anni e delle fatiche cessò di vivere nel 1800, poco mancò che il Vassalli lo seguisse nella tomba; nè altro sollievo potè trovare all' immenso suo dolore, fuori quello di scriverne le notizie istoriche, le quali pubblicate nei volumi della R. Accademia delle Scienze di Torino, onorarono ugualmente la memoria di quello cui sono dirette, ed il nome di chi le dettò.

Desiderando il Vassalli sin dalla sua prima gioventù dedicarsi alla carriera dell' istruzione, presentossi nel 1779 al concorso d' un posto gratuito nel R. Collegio delle provincie nella facoltà di filosofia e belle lettere, dalla quale solevano esser presi tutti i Professori di tale facoltà, ed ottenne l'ambito posto superando tutti gli altri concorrenti nell' esame a ciò destinato.

Entrato in Collegio non tardò molto a cattivarsi col suo spirito vivace, col suo carattere sincero e dolce, e colle sue estese cognizioni la stima e l' amicizia de' suoi compagni, non meno che l' amore e la considerazione de' suoi superiori; ed in breve cotanto si distinse, che nel 1780 venne nominato Ripetitore di geometria nello stesso collegio, e cinque anni dopo fu prescelto ad occupare la cattedra di filosofia a Tortona, la quale per l' addietro era sempre stata coperta da religiosi regolari.

Per rendere ai Tortonesi il più che fosse possibile utili e dilettevoli le sue lezioni Vassalli che dal Beccaria e dall' Eandi avea appresa l'arte d' esperimentare, procurò per quanto le circostanze glielo permettevano, sin dal primo anno del suo insegnamento in quella città, di mostrare con appositi esperimenti la verità e l' utile applicazione di quanto diceva dalla cattedra, e perciò aggiunse all'aritmetica ordinaria la mercantile, ed alla geometria le pratiche applicazioni, conducendo secolui nei giorni di vacanza gli scolari a provarle nei campi

e nelle case ; ed ottenne dal Riformatore i mezzi onde fare parecchie spese necessarie per dare un corso di esperienze e dimostrazioni fisiche, alle quali intervenivano molti cospicui personaggi non solo della città, ma ancora forestieri.

Questo suo nuovo metodo d' insegnare, ed i varj scritti importanti ch' egli andava pubblicando, frutto delle moltiplici ed ingegnose sue esperienze fisiche ed agrarie, gli procurarono una tale riputazione nel paese ed all' estero, che molti grandi lo trattarono con singolare stima ed amorevolezza, e molti uomini di grido desiderarono la sua corrispondenza, come lo dimostrano le varie sue lettere concernenti la fisica, la meteorologia e l' agraria dirette a diversi fra gli scienziati di maggior rinomanza che allora vivessero, le quali furono pubblicate per la profondità e la varietà delle dottrine che racchiudono.

Il Cardinale Costa d' Arignano eletto in quel tempo capo del Magistrato della Riforma degli studj di Torino, uomo dottissimo essendo, apprezzava assai i meriti del Vassalli; e giudicando essere Tortona campo troppo ristretto a così vasto ingegno, ed a tanta dottrina, lo chiamò con R. patenti del 3 Agosto 1792 a Torino in qualità di Professore sostituito di Fisica nella R. Università, ove l' Eandi sin dal 1788 era stato nominato professore effettivo dopo la morte del Beccaria; ed incaricollo di scrivere e pubblicare, d'accordo col di lui zio Eandi i trattati di fisica, aritmetica e geometria ad uso delle R. Scuole.

Nel mese d' Agosto del 1793 venne loro affidata questa difficile opera, la quale prima del cominciare del mese di novembre dello stesso anno dovette essere stampata, perchè fosse distribuita in tutte le provincie nel riaprirsi il nuovo anno scolastico. Fu somma in conseguenza la fretta con la quale si scrissero questi trattati, i quali malgrado ciò ottennero il più grande favore presso tutti i dotti, vennero in varie università estere adottati per testo delle lezioni, e furono encomiati da tutti i giornali scientifici d' Italia e forestieri.

La fisica particolarmente merita anche al giorno d' oggi

d' essere letta, quantunque questa scienza abbia fatti immensi progressi da quell' epoca in poi. Essa conteneva tutte le scoperte le più recenti, e presentava un trattato veramente compiuto di fisica che suppliva con abbondanza alle cattedre di chimica e di storia naturale allora mancanti alla R. Università, ed anche a quella d' agricoltura.

Fra i molti pregi di questo trattato non è forse l' ultimo quello di procacciare con una scelta bibliografia, e con numerose e dotte annotazioni una più ampia e facile istruzione ai professori ai quali nelle provincie mancano sovente i modi di procacciarsela altrimenti.

Alle lezioni ed alle pubbliche dimostrazioni di fisica che il Vassalli faceva, prima in qualità di professore sostituito al Eandi, sino al 1800, e poi in quella di professore effettivo dal 1801 al 1814, intervenir solevano non solo una numerosa scolaresca, da cui egli era considerato quale padre amoroso, ma ancora moltissime persone d' ogni ceto e d' ogni rango, perchè egli non lasciava mai d' insegnare l' applicazione della fisica a tutte le scienze ed a tutte le arti, e faceva conoscere tutte le scoperte fisiche che si andavano facendo, non meno che le macchine e gli stromenti di qualche utilità per lo studio della fisica e per l' avanzamento delle arti e delle manifatture. Massimo poi era l' impegno col quale egli cercava che le sue lezioni riescissero chiare, facili ed eminentemente utili ; nel quale assunto egli senza grande difficoltà riesciva, non solo perchè era profondamente versato nella scienza, ma ancora perchè era fornito in grado eminente della difficile arte d' insegnare, la quale, al dire dello stesso Vassalli, in un professore è di tanta necessità, che con essa un mediocre sapere diviene più utile agli allievi, anzi che la più estesa e la più profonda dottrina separata dall' arte di esporla e d' insinuarla nell' animo della gioventù.

Oltre modo contento era il Vassalli quando venne richiamato da Tortona a Torino, perchè sperava che così non sarebbe mai più obbligato ad allontanarsi dall' amato suo zio

Eandi, e che avrebbe potuto dedicarsi con maggiori mezzi a suoi studj prediletti ed alle sue esperienze : ma la sorte avea destinato altrimenti. La grande riputazione ch' egli co' suoi scritti e colle sue esperienze si era acquistata, fu cagione che venisse eletto a far parte di quel consesso di dotti d' ogni paese d' Europa, cui incumbeva il nobile e generoso incarico di far cessare i danni che provenivano universalmente dalla diversità infinita delle misure, e di cercare l' uniformità di queste dedotta da basi prese dalla natura perchè fossero invariabili. L' Accademia di Parigi fin dal 1790 avea nominata una commissione composta de' celebri La Grange, La Place, Monge e Condorcet, la quale preparò molti materiali necessarj per un così importante lavoro, e fece misurare a tale oggetto dagli insigni Astronomi Mechain e Delambre il più grande arco del meridiano che si fosse mai misurato, quello che passa da Dunkerque a Montiou, ed intanto fissava un metro provvisorio perchè potesse servire provvisoriamente di base onde dedurre tutte le altre misure. L' Istituto di Francia succeduto all'Accademia, prima d' imprendere le discussioni e gli esperimenti che dovevano condurlo alla fissazione del metro definitivo, mostrò il desiderio che un gran numero di scienziati d' ogni paese concorresse alle sue sedute, ed avesse parte a' suoi lavori ed alle sue deliberazioni. Il governo Francese corrispose al nobile desiderio dell' Istituto invitando tutte le potenze alleate o neutre a mandare a Parigi Uomini capaci per la loro dottrina a tale oggetto. Il Piemonte rispose degnamente a quest' invito incaricando da prima il Conte Balbo di rappresentarlo in quel consesso di dotti, come già lo rappresentava in qualità d'Ambasciatore presso quella corte; e nominando poi nel mese di gennajo del 1799 il Vassalli deputato a Parigi della Commissione dei pesi e misure, in rimpiazzamento del Conte Balbo, il quale per cagioni politiche dovette abbandonare quella Capitale.

Giunto il Vassalli a Parigi venne presentato dal La Grange all' Istituto ed alla Società del Medico Portal, ove in brevissimo

tempo conobbe un grandissimo numero di persone dotte tanto forestieri che del paese, dalle quali poi ebbe in varie circostanze, ed in tempi difficilissimi gli attestati i più sinceri di leale stima e verace amicizia. Quanto poi egli siasi distinto fra gli scienziati radunati a Parigi per la determinazione del metro decimale, lo provano e ciò che di lui scrisse il Delambre in varj luoghi della sua opera intitolata: *Base du systeme metrique;* e gli elogi che gli vennero compartiti dal Conte Balbo nella sua *Terza lezione del metro sessagesimale;* ed il *Saggio sul sistema metrico* ch' egli pubblicò appena di ritorno da Parigi, di cui in pochi anni si fecero tre edizioni; ed il *Rapporto* ch' Egli lesse alla R. Accademia delle Scienze di Torino „ sui lavori della Commissione dei pesi e misure di Parigi, „ e sulle scoperte accidentali alle quali le diverse operazioni „ della Commissione diedero luogo. „

Per la vasta sua erudizione il Vassalli dava frequentemente notizie preziose; agli uni per servirsene in qualche lavoro che volessero pubblicare, agli altri onde progredire nelle loro ricerche. Richiesto scriveva facilmente sopra molti soggetti, e quando alla Società Medica d' emulazione, alla quale interveniva sempre come Socio, fu proposto di stampare un volume e furono invitati tutti i Socj presenti a dare qualche scritto, il Vassalli presentò subito cinque titoli, dicendo che scegliessero a piacimento, giacchè non aveva ancora alcun lavoro scritto, ma che lo avrebbe fatto per la prima adunanza. Fra i medesimi si trovava quello sopra le affinità dei gaz che eccitò la curiosità di tutti gli Accademici, onde fu scelto di preferenza, ed il Vassalli alla prima adunanza lesse il *Memoire sur les affinités des gazs* che trovasi nel terzo volume di quella Società: del quale lavoro il Bertholet fece onorevole menzione nella sua statica chimica, riportando l' opinione del Vassalli su tale argomento, e di poco scostandosi dalla medesima.

Osservando infatti il Vassalli che l' idrogeno ed il gaz acido carbonico in tubi cilindrici si mescolano coll'aria atmosferica movendosi contro le leggi dell' idrostatica, e senza che

quel moto e quella diffusione siano prodotti da alcuna agitazione meccanica o da cambiamento di temperatura, ne inferì essere questo l' effetto d'una vera affinità, la quale vuolsi da molti negare perchè la diffusione dei gaz gli uni negli altri non è accompagnata da variazione di temperatura, nè da alterazione nei volumi di essi, nè produce sensibile cangiamento nelle rispettive proprietà dei gaz, le quali sono appena leggiermente indebolite. Malgrado tutto ciò il Bertholet appoggiato alle esperienze del Vassalli e ad altre da lui stesso tentate, credette non poter negar che i gaz si mescolano in virtù d' una azione reciproca per cui uniformemente si diffondono gli uni attraverso degli altri contro le leggi idrostatiche della gravità specifica.

Vassalli-Eandi proffittò del suo soggiorno in Parigi per visitare minutamente tutte le istituzioni in quella Capitale esistenti che appartenevano alle scienze, alle lettere ed alle arti e manifature, ed a raccogliere preziosissime notizie concernenti l' istruzione pubblica, avendo egli sin d' allora l' intenzione di stampare un trattato compiuto su quest' argomento, di cui scrisse solo i cinquanta primi articoli che formano il primo volume della grandiosa sua opera, la quale per motivi particolari non potè mai essere pubblicata. In quest' opera il Vassalli trattando dell' educazione ed istruzione pubblica, comincia dalle ballie e viene grado grado indicando l'educazione e l' istruzione che convien dare ad ogni classe di persone sino al perfezionamento nelle arti e nelle scienze, facendo servire i passeggi, gli almanacchi, i teatri, ogni cosa in somma all'istruzione pubblica, con grandissimo vantaggio non solo delle scienze ma ancora della morale e della religione, ed in conseguenza della pubblica felicità.

Egli era tutto intento a raccogliere queste notizie quando ricevette con sua sorpresa da Torino la nuova ch' Egli era nominato membro della consulta allora creata in Piemonte colle attribuzioni di corpo legislativo, e venne eccitato con replicate istanze a restituirsi in patria ad occupare questo suo

nuovo posto, nel quale, essendo Egli onestissimo e sinceramente affezionato al suo paese, non poteva a meno d'incontrare gravi e pericolosi dispiaceri, pei quali andò a rischio della vita. L'opposizione ch'Egli allora animosamente manifestò alle non giuste mire di chi tutto poteva in quel tempo in Piemonte, fu una delle principali cagioni per cui la Consulta venne con decreto dei 25 dicembre 1800 sospesa dalle sue funzioni, il che fu di grande consolazione pel Vassalli, perchè trovavasi così di nuovo libero di dedicarsi a suoi studj geniali, lungi dai tumulti delle cose pubbliche alle quali vedeva non poter recare quel bene che desiderava. Per qualche tempo in pena della sua opposizione fu vessato in varie guise e venne incolpato di delitti di società secrete contro il governo, ma poi infine vedendo essere la sua condotta sempre dedita quietamente alla pubblica istruzione, e che egli non occupavasi d'altro che di scienza, cessarono le persecuzioni, ed i suoi medesimi nemici gli diedero i maggiori attestati di stima, affidandogli le commissioni le più difficili nella carriera delle scienze in cui acquistavasi tale nome, che Napoleone venuto nel mese di maggio del 1805 in Alessandria a se chiamò il Vassalli per decorarlo colle sue proprie mani delle insegne della legion d'onore, in un con tre altri celeberrimi Accademici di Torino, Conte Saluzzo, Abate Caluso e Conte di S. Paolo, non quale prezzo di cieca adesione ad un partito, ma quale attestato di riconoscenza e stima che il pubblico gli doveva per le immense cure che si era preso pel comune bene, e per gli importanti suoi lavori scientifici.

Nello stesso anno 1805 Vassalli fu nominato membro e segretario del gran Consiglio d'amministrazione dell'Università, nel quale impiego mostrò lo stesso carattere che in ogni altra occasione aveva mostrato, avendo sempre in mira il bene della patria pel quale aderiva ai potenti quando credeva che lo operassero, e loro francamente si opponeva quando credeva che si ingannassero nel giudicare.

I lavori che maggiormente contribuirono alla rinomanza

del Vassalli-Eandi sono quelli ch' Egli pubblicò relativi alla elettricità, alla meteorologia ed alla agricoltura. Quella parte della fisica, dice Egli nella *Physica ad subalpinos*, la quale tratta dell' elettricità fu ridotta a scienza da Franklin e dal nostro Beccaria, ed ai progressi di questa, soggiungeremo noi, contribuirono particolarmente i lavori dei celebri Galvani e Volta, e quelli del Vassalli-Eandi. Essendo egli in continua corrispondenza con questi due sommi Fisici, era sempre informato delle esperienze ch' essi stavano facendo, e tosto le ripeteva variandole pure in mille guise, ed i risultamenti di questi suoi esperimenti mandava a quei celebri Fisici, i quali accoglievano con uguale piacere tanto i dubbj ch' Egli proponeva contro ciò ch' essi credevano aver osservato, quanto la conferma dei loro esperimenti risultante da quelli ch' egli avea istituiti, e non mancavano mai di fare quegli altri ch' egli loro proponeva.

Desiderando il Vassalli d' avere un elettrometro più del Saussuriano sensibile per poter ottenere segni d'elettricità da corpi che a quello non rispondevano, pensò nel 1787 di sostituire alle piccole pallottole dell' elettrometro di Saussur delle listelle di foglia d' oro, sapendo egli che i metalli non ossidabili sono i più deferenti, ed il risultato mostrò quanto giusto fosse il suo ragionamento, giacchè l' elettrometro che ne ottenne, segna venti gradi per ciascun grado dell' elettrometro a pagliette. Con tale elettrometro che col di lui nome deve essere chiamato, e non con quello del Bennet il quale dopo il Vassalli, quantunque nello stesso anno ne inventò uno simile in Inghilterra, Egli per il primo ottenne manifesti segni d' elettricità dal ghiaccio raschiatovi sopra. Non potendone ottenere il Volta co' suoi elettrometri venne espressamente a Tortona a passare alcuni giorni col Vassalli per vedere le sue esperienze, e portò seco uno de' suoi più squisiti elettrometri, il quale appena giunto volle paragonare con quello del Vassalli, e veduto che questo era grandemente più sensibile del suo, conobbe tosto la cagione dei diversi risultamenti ch' essi avevano dalle stesse esperienze.

Vassalli-Eandi esaminò col suo elettrometro varj corpi nel loro stato naturale, e potè investigare la natura dei loro componenti relativamente alla loro elettricità. Egli al globo metallico dello stesso stromento sostituendo dischi, emisferi cavi, verghe recurve ed altri simili ordigni, esplorò tanto le mutazioni cui i corpi vanno soggetti nelle loro capacità per contenere il fluido elettrico, quanto le differenze che presenta lo stesso corpo nei diversi stati. Col medesimo corresse l'errore d'Achard, il quale asserì che un corpo il quale gode d'un elettricità propria non può essere elettrizzato per mezzo delle fregagioni d' un altro corpo della stessa natura: provò falso quanto il suo maestro Beccaria avea asserito, che di due corpi della stessa natura o simili, il corpo fregante dà la sua elettricità al corpo fregato: fu il primo a dimostrare che ogni metallo gode d' una elettricità diversa da lui determinata, e che lo stesso corpo dà all' elettrometro ora l' elettricità positiva, ora la negativa secondo la diversa figura della parte raschiante, e la diversa maniera di raschiare: il che prova che l'elettricità trovata per mezzo dell' elettrometro nei diversi corpi non è, almeno in molti casi, elettricità attuale residente nei medesimi, ma elettricità prodotta dal fregamento o dal semplice contatto cogli altri corpi.

Ingegnoso si è, il modo (dice il dotto ed insigne Cavaliere Prof. Carena) con cui Vassalli-Eandi soleva accrescere la sensibilità del suo elettrometro: „ Si accosti al piattello „ dell' elettrometro un corpo fregato di conosciuta elettricità „ (vetro o cera lacca) e si tocchi ad un tempo stesso il piat- „ tello col dito della mano che tiene il corpo fregato allon- „ tanando poi in un medesimo istante il corpo fregato, ed il „ dito, le listerelle d'oro mettonsi in permanente divergenza, „ mosse da un' elettricità contraria a quella del corpo frega- „ to: allora avvicinando al piatello quella particolar sostanza „ di cui uno vuole esplorare la qualità elettrica, si giudica „ di questa dall' accresciuta o diminuita divergenza delle li- „ sterelle; cioè la elettricità del corpo che si esplora sarà nel

„ primo caso contraria, nel secondo identica con quella del „ corpo (cera-lacca o vetro) con cui da prima l'elettrome- „ tro era stato coll' anzidetto artifizio elettrizzato.„

L' azione dell' elettricità sui corpi viventi venne dimostrata dal Vassalli in varj scritti e principalmente in quello ch' egli fece a richiesta del celebre Carlo Bossi col titolo *Raport sur l' application de l'electricité et du galvanisme a l'art de guerir*. Questo rapporto l'Accademia delle Scienze di Torino volle che fosse pubblicato per farlo universalmente conoscere ai medici, e fu in seguito ristampato a Milano tradotto in Italiano dall'Abate Carlo Amoretti. Vassalli con esperienze decisive mostrò, contro l' opinione di Van-Marum che l' elettricità aumenta direttamente l' azione del cuore e delle arterie; che le varie parti del corpo vivente sono dotate d' una diversa elettricità: che questa è sempre negativa nell' urina e negli escrementi, e che il sangue nello stato di salute gode d' un grado d' elettricità positiva quasi costante, malgrado le variazioni elettriche dell' aria; il quale grado d'elettricità del sangue cangia poi nello stato di malattia, diventando negativo nei casi di gravi infiammazioni, per lo più latenti. Quest' osservazione lo condusse a cercare se l' elettrometro non potrebbe essere, per così dire un' *vitalitometro*. Tali esperienze sull' elettricità del sangue e dell' orina istituite dal Vassalli-Eandi quando la dottrina dell'elettricità era appena nel suo nascere furono poi, ed in varj modi ripetute dal dotto e profondo Bellingeri che ne ottenne i medesimi risultati e che dedusse analoghe conseguenze.

Vassalli-Eandi per l' amicizia e la continua corrispondenza che aveva col Galvani fu uno dei primi a conoscere le esperienze di questo grande Fisico sull' elettricità animale, e non tardò punto a figurare colle sue proprie nella gran quistione insorta tra il Galvani ed il Volta sull' esistenza o non esistenza d'un' elettricità animale diversa dalla elettricità comune: ed appena egli ebbe dal Volta stesso notizie della importante scoperta da lui fatta della pila, si mise tosto a costrurre

quest' apparato in mille modi diversi, e con ogni sorta di sostanze liquide e solide, minerali, vegetabili ed animali; ed a tentare con esso un numero tale d' ingegnosissime esperienze che molto contribuì ai rapidi progressi che in breve ottenne quest' interessante parte della fisica, e meritossi d'essere proclamato per tutta Europa quale esperimentatore sagacissimo e fisico espertissimo.

Vassalli ne' varj suoi scritti su quest' argomento eccitò molti dubbj contro l' identità dei due fluidi voluta dal Volta, ma anche mentre proponeva tali dubbj, dei quali alcuni non potevano essere sciolti prima delle recenti scoperte sull'elettrodinamismo, Egli non cessò mai dal ripetere ciò che aveva scritto nel 1799 e più chiaramente nel 1802, cioè ch' Egli risguardava il galvanismo come una modificazione dell' elettricità: *modification* (disse) *qui rend ce fluide plus actif comme la petite flamme separèe par le chalumeau est infinement plus ardente que la grande flamme d' ou elle est tirèe.*

Vassalli Eandi fu il primo a dimostrare con esperienze galvaniche la formazione dell' acido carbonico nella decomposizione dell' acqua per mezzo dei così detti metalli imperfetti, e prima d' ogni altro scompose colla pila l'acido nitrico concentrato e l' alcool. Egli cimentando col galvanismo l' oro ed il platino bagnati in soluzioni saline, come il muriato d' ammoniaca, osservò l' oro ossidarsi in giallo dal lato positivo ed in violetto dal lato negativo; e spiegò questi fenomeni per mezzo dell' azione chimica del galvanismo sui componenti delle soluzioni; dimostrando nello stesso tempo che lo svolgimento del fluido elettrico nella pila voltaica può essere prodotto da qualsiasi chimica scomposizione. Questa verità da lui scoperta venne pienamente confermata dalle recenti osservazioni, e serve ora di fondamento alla odierna teoria del voltaico elettromotore. Così il Vassalli Eandi fin dal principio del presente secolo, non solo discopriva la potenza chimica della pila con esperimenti affatto nuovi, ma annunziava pure la vera cagione di quella forza misteriosa che ne' suoi effetti condur dovea al

rinnovamento della chimica e di tutta la dottrina molecolare. Chiamando Egli ad esame le varie opinioni emesse dagli autori sulle cagioni del terremoto, fu condotto a proporre molto prima del Davy che si potevano spiegare le affinità chimiche per mezzo della diversa elettricità naturale dei corpi; e dimostrando con ripetuti esperimenti tutta l'azione che il galvanismo esercita sui corpi viventi, tanto in istato di salute che in quello di malattia, provò, mediante esperienze fatte coi celebri Rossi e Giulio che il cuore, lo stomaco, gli intestini, la vescica orinaria ed i vasi arteriosi e linfatici sono messi in moto dal galvanismo, quantunque Volta, Mezzini, Valli, Klein, Pfaff, Bichat e Aldini asserissero il contrario.

I numerosi scritti che Vassalli Eandi pubblicò spettanti alla meteorologia, tendono tutti ad indicare i vantaggi che si possono ricavare dalle osservazioni meteorologiche debitamente istituite per conoscere la storia naturale della nostra atmosfera; le cause delle modificazioni alle quali questa è sottoposta, l'influenza di tali modificazioni sulle produzioni della terra e sulla sanità degli animali, infine per giungere a prevedere, se sia possibile, queste modificazioni, ed i loro effetti. Considerando Egli quanto mancanti generalmente siano le osservazioni meteorologiche che tutto dì si fanno, vide doversi ciò attribuire a diffetto negli stromenti coi quali tali osservazioni sono istituite. " Car (dice Egli) les journeaux meteorologiques ne presen-
,, tent que les observations faites a trois ou quatre heures
,, du jour: souvent l'observation se fait au commencement
,, d'une variation qui va être, ou la fin d'une qui va cesser.
,, On note l'etat qu'on y observe en ignorant celui qui l'a
,, prècèdè. Plusieures heures après on en fait de même. Si
,, les observations se rencontrent on dit qu'il n'y en a point
,, eu: et de cette maniere on attribue les effets a des causes
,, qu'on n'a vu qu'en partie, et que bien souvent ne sont
,, pas celles qui les ont produits.,,

Per ovviare a questo difetto Egli comunicò nel 1799 alla Società Italiana delle Scienze l'idea d'un barometro e d'un

termometro di sua invenzione, i quali lasciano su di un tamburro che gira sul proprio asse per trenta ore mediante un orologio, la traccia delle loro variazioni marcate da pennelli bagnati nel carbonato di potassa colorito in rosso od in azzurro. E nel 1803 avendo immaginata la costruzione d' un anemoscopio e di un anemometro, i quali per mezzo d'un orologio notano a ciascun istante la direzione e la forza del vento, pensò servirsi dello stesso orologio per avere le traccie del barometro, del termometro, dell' igrometro e di altri stromenti meteorologici, compresovi l'elettrometro ed il ceraunografo.

Nominato nel 1806 Direttore dell' osservatorio della R. Accademia delle Scienze di Torino, pubblicò in varj tempi non solo la serie delle osservazioni ivi da lui fatte da quell'epoca sino agli ultimi anni della sua vita, ma ancora quella delle osservazioni sullo stesso osservatorio istituite dal Conte Somis e dal Bonino dal 1757 all' epoca in cui Vassalli cominciò le sue: e paragonando mai sempre lo stato meteorologico dell'atmosfera in ciascun anno collo stato sanitario degli uomini e colla quantità e qualità dei prodotti della terra, rese lo studio della meteorologia sommamente utile e dilettevole.

Questo medesimo studio lo condusse necessariamente a fare particolare soggetto delle sue meditazioni i bolidi, le aurore boreali, i terremoti, i turbini ed altri simili fenomeni, su ciascuno dei quali emise opinioni ed immaginò teorie che mostrano la profondità e la sagacità del suo ingegno, non meno che la vastità della sua dottrina.

Così nella sua memoria sopra il bolide degli 11 settembre 1784 Egli, dopo d' aver discusse tutte le opinioni sin'allora emesse sopra tale fenomeno, imprese a dimostrare colle più valide ragioni che quei globi di fuoco i quali sino allora si credevano prodotti dall' accensione di esalazioni solforose sparse per l'atmosfera, non sono altro che massi di fluido elettrico, il quale passa per una qualche materia deferente da un luogo elettrico per eccesso ad un altro elettrico negativamente. Quest' opinione conforme alle nozioni che allora comincia-

vano ad aversi sulle leggi dell'elettricità, venne col massimo favore ricevuta da tutti i Fisici, sino a tanto che il Chladni e l' Howard credettero poter asserire che i bolidi sono generalmente accompagnati dalla caduta delle meteoroliti, e quindi fecero rivivere l'opinione di Hallejo dal Vassalli già confutata, che i bolidi non siano che le meteoroliti. Se però attentamente si esamini, come ebbi luogo a notare più diffusamente altrove, quanto in questi ultimi tempi si scrisse sui globi di fuoco che cadono dall'atmosfera, pare che se ne possa conchiudere ch' essi sono di due sorta: cioè o massi di pietra, o massi d' elettricità che cerca d' equilibrarsi: a quelli competerà il nome di meteoroliti, a questi quello di bolide.

Le aurore boreali formano anch'oggi argomento di discussione presso i Fisici: in generale però si ammette che questo fenomeno non succede oltre i limiti della nostra atmosfera, giacchè partecipa della rotazione terrestre ; e che esso dipende da particolari condizioni dell' elettricità atmosferica, poichè al suo comparire si sente non di rado uno strepito come di elettriche esplosioni, e l' ago magnetico ne è vivamente affetto. Tutto già notava il Vassalli nella citata sua opera sul bolide degli 11 settembre 1784, nella quale cercava pure di spiegare in quale modo l' elettricità atmosferica desse luogo allo stupendo fenomeno di cui si tratta. Le aurore boreali , dice egli, dipendono da ciò che i vapori elettrizzati, sparsi per l' atmosfera vengono dal freddo polare condensati in nubi dotate d' una grande quantità d'elettricità; questa mentre cerca d' equilibrarsi attrae dall' aria molti altri vapori, e li dispone lungo la strada che percorre, e produce varj fenomeni secondo la diversa copia d' elettricità e la diversa quantità di vapori.

Non meno delle aurore boreali i turbini e le trombe offrono anche presentemente materia di quistioni ai fisici avidi di rintracciarne la vera cagione; e la spiegazione che di queti fenomeni diede il Vassalli-Eandi nel 1817 è tuttora quella che più si accorda coi fatti conosciuti. Il celebre Humboldt volle che i turbini dipendano da due venti opposti, i quali venendosi

ad incontrare fanno ascendere la colonna d' aria contro cui sono spinti. Se però si osserva che i turbini di sabbia in America e quelli di polvere in Europa non hanno luogo che in un' atmosfera calma, si vede tosto che questa teoria non regge. Vassalli fa dipendere i turbini e le trombe dal freddo della regione superiore dell' atmosfera, e dice che l' aria fredda superiore discendendo sforzerà l' inferiore ad ascendere, la quale procurandosi un passaggio nello strato dell'aria superiore, prenderà un movimento circolare per la stessa ragione che un simile movimento si fa vedere nell' acqua contenuta in un vaso che non ha che un foro al suo fondo.

Tra i fenomeni dei quali ocupossi particolarmente il Vassalli-Eandi annoverar devesi il terremoto. Essendo egli stato nel 1808, incaricato dal governo di percorrere la provincia di Pinerolo per farvi osservazioni fisiche sulle cagioni e sugli effetti del terremoto che da alcuni mesi desolava quella provincia; animato unicamente dal desiderio del pubblico bene, senza sgomentarsi nè per la fatica, nè pei pericoli ai quali doveva esporsi, conservò sempre in camere fessurate, in mezzo a case rovinate e ad un popolo spaventato tutta la tranquillità che si può avere lungi da ogni pericolo, e così potè essere utile agli abitatori di quelle contrade, animandone molti a rientrare nelle proprie case, facendo riparare alcune di queste, e preservando molti di essi da quelle malattie alle quali avrebbero senza dubbio soggiacciuto se avessero continuato a vivere all' aperta campagna, ripieni di spavento, come facevano prima; e potè istituire le più accurate osservazioni mineralogiche, fisiche e chimiche necessarie per ben compiere la missione di cui era incaricato. Questa sua gita diè luogo al rapporto che ne fece all'Accademia delle Scienze di Torino, il quale fu fatto di pubblico diritto d'ordine del Prefetto: ed al *Saggio sopra il terremoto*, che trovasi stampato nel Volume XIV delle Memorie della Società Italiana, e nel quale Egli discusse tutte le opinioni risguardanti questo fenomeno.

Tanto in questo che in altri suoi scritti sullo stesso ar-

gomento egli cercò dimostrare che il terremoto non si deve ascrivere all' azione dell' elettricità naturale, ma bensì alla decomposizione di varj minerali e principalmente delle piriti nel seno della terra. Da questa decomposizione si sviluppano secondo lui dei gaz, i quali non potendo penetrare attraverso i volti delle caverne, per la successiva loro produzione si condenseranno e saranno accesi pel calorico che si svolge, sia nell' atto della decomposizione delle piriti, sia per la rapida condensazione di essi gaz. Tali combustioni sono, a suo avviso, quelle che occasionano le scosse e gli altri fenomeni dei terremoti.

Fin dal 1787 Vassalli mentre era Professore a Tortona, venne annoverato fra i membri corrispondenti della R. Accademia delle Scienze di Torino; ed essendo nel 1791 mancato ai vivi il celebre Cigna, l'Accademia stessa credette non poter in miglior modo riempiere il vuoto che la morte di questo esimio cultore delle scienze naturali lasciava nel suo seno, che acclamando il Vassalli-Eandi suo membro ordinario. La sua fama poi rendendosi ogni giorno maggiore, Egli fu successivamente nominato da suoi Colleghi Presidente della classe delle scienze fisiche e matematiche, Segretario della stessa classe, Segretario perpetuo dell'Accademia. Con quanta gloria di se e dell' illustre corpo cui apparteneva, abbia occupato sino alla sua morte quest' ultimo onorevole posto, lo dimostrano il sincero attaccamento che gli professarono in ogni tempo ed occasione i suoi colleghi, ed i numerosi scritti coi quali arrichiva ogni volume che l'Accademia pubblicava; nei quali volumi oltre alle varie memorie scientifiche sue, si leggono di lui le dotte ed interessanti notizie istoriche dell'Accademia dal 1792 al 1828, ed i pietosi encomj coi quali celebrò la memoria degli estinti colleghi Eandi, Reineri, Marini, Giorna, e Cigna.

Nominato nel 1812 Direttore del Museo di storia naturale di Torino già fin d' allora ragguardevole per le importanti collezioni procurate dai Donati, Giorna, Bonvicino, Bonelli e

Borson; ma di poca utilità pubblica in quel tempo per mancanza di luogo atto, e per molti altri inconvenienti; Vassalli Eandi giunse ben presto col suo credito a superare tutti gli ostacoli che si opponevano al miglioramento di questo stabilimento; ed aprì e spianò la via a quei rapidi progressi che, mediante gli indefessi lavori dei Professori Bonelli, Borson, Genè e Sismonda procurarono a questo Museo il vanto sopra tanti altri più antichi e celebrati d' Europa. Egli ogni giorno passava alcune ore nelle sale del Museo, molto compiacendosi nell' osservare come esse di giorno in giorno sempre più si arrichissero d' oggetti preziosi e difficili a trovarsi altrove; nè tralasciò mai fin che visse d' accelerare per quanto poteva coi mezzi che gli offrivano la sua qualità di Direttore, il suo credito, l' estesa sua corrispondenza da Theeran nuova capitale della Persia per tutta Europa sino a Charlestown nella Carolina dell'America settentrionale, i suoi viaggi, le molte sue cognizioni, gli avvanzamenti di questo Museo ch' Egli ebbe, prima di morire, la consolazione di vedere arrichito e disposto in modo da poter servire non solo alla istruzione di numerosa gioventù studiosa, ma ancora alle più profonde meditazioni di chi coltiva le scienze naturali.

Essendosi poi nel 1823 ordinato da S. M. che il rinomatissimo Museo Egizio di cui la Maestà stessa avea fatto acquisto dall' instancabile Cavaliere Drovetti, fosse soggetto alla sopraintendenza d' una giunta Accademica, Vassalli-Eandi fu annoverato fra i membri di essa giunta, e tosto si mise a studiare quei preziosi monumenti d'antichità, e provò con ripetute esperienze che i capelli delle mummie conservano colle altre loro qualità anche quella della virtù igrometrica; e ricercò di qual natura sia il bitume da cui si trovano coperte le mummie, e che cosa sia la sostanza bianchiccia che sulla pelle scoperta delle medesime si trova.

Tanti lavori ai quali indefessamente si dedicava il Vassalli-Eandi, mentre accrescevano la sua celebrità, onde tutte le più ragguardevoli Accademie d'Europa e d'America se lo

associarono senza che ne abbia fatta mai la menoma domanda, indebolirono talmente la sua salute che a stento reggevasi in piedi e per lungo tempo non mangiava più di due oncie di pane al giorno, essendo questo il suo principal nutrimento.

In tale stato di salute nel 1804 e nel 1805 andò nelle vacanze autunnali in compagnia del suo nipote Giovanni Berruti a fare alcune gite in varie contrade del Piemonte, ad oggetto di determinarne il livellamento barometrico, e per fare un' infinità d' osservazioni geologiche. Egli inventò e fece costruire a tale scopo un nuovo barometro portatile, il quale alla solidità della costruzione riunisce il livello costante del mercurio nel recipiente, senza l' imbarazzo d'aggiungere o togliere del mercurio ad ogni circostanza, e può servire per appoggiarvisi come ad un bastone, e siccome egli desiderava pure misurare la profondità de' luoghi ai quali non poteva discendere, così fece costruire un altro barometro di sua invenzione a ciò opportuno. Questo non differisce dal barometro ordinario che per avere alla sua altezza di pollici 28 un foro laterale comunicante con un' altra canna inferiormente inclinata della lunghezza di tre o quattro pollici e della stessa capacità della canna principale. Egli per misurare la profondità di qualche luogo vi discendeva il suo barometro, di cui il mercurio elevandosi progressivamente sino a pollici 28, versava inseguito nella canna laterale, e dalla quantità di mercurio in questa versato poteva determinare la profondità a cui era disceso il barometro.

Questi viaggi del Vassalli-Eandi mentre non poco contribuivano all' avvanzamento delle Scienze, punto o poco giovavano alla sua salute, perciò approfittando dei pochi risparmj fatti con la sua non mai interrotta temperanza, acquistò nel 1805 un piccolo podere per potervi andare a passare qualche giorno di vacanza, e per farvi osservazioni ed esperienze agronomiche, sacrificando alle medesime il reddito del podere.

Già fin d' allora ch' egli era professore a Tortona fece col valente agronomo Bruno fittajolo d' una estesissima fattoria

un' infinità d' esperienze i risultamenti delle quali si trovano in gran parte registrati nei calendarj georgici della R. Società agraria di Torino, a cui il Vassalli era stato ascritto sin dalla sua prima istituzione ; e queste esperienze continuò poi, moltiplicò e più estesamente eseguì sino agli ultimi giorni del viver suo al suddetto podere che fu il più efficace rifuggio che potesse trovare quando l'animo suo contristato dalla malvagità abbisognò di sollievo ; e quando le forze del suo corpo logorate dalle veglie e dalle continue meditazioni lo obbligarono a cercare qualche riposo.

Nella scelta degli argomenti agrarj o di economia domestica ch' egli in diversi tempi prese a trattare, fu ognora guidato dal desiderio di promuovere la ricchezza della patria, o da quello di soddisfare ad un qualche bisogno da cui essa era travagliata. Di ciò fanno fede le varie sue memorie sulla coltura dei gelsi, sulla educazione dei bachi da seta, e sul metodo più economico di filare i bozzoli che costituiscono una delle principali sorgenti della ricchezza piemontese, ed in quei tempi fornivano il più ricco ramo di commercio attivo di questo paese. Confermano la stessa verità le numerose esperienze ch' egli istituì e pubblicò sul modo di ricavare il massimo utile dalla coltivazione dell' *Arachis hypogaea*.

Poche sono le provincie degli Stati di S. M. il Re di Sardegna nelle quali si possa coltivare l' olivo, e perciò accade non di rado in Piemonte che l' olio acquista un prezzo esuberante. Il noce supplisce in parte a questa mancanza, ma non tanto però ch' essa non facciasi alcune volte gravemente sentire. Ad oggetto di prevenire queste tristi occorrenze Vassalli-Eandi cercò in ogni modo di promuovere la coltivazione dell'Arachis, e scrisse il più compiuto trattato che desiderar si potesse intorno alla storia naturale, alla coltura, ed agli usi di questa pianta oleifera.

La sollecitudine del Vassalli-Eandi nel cercare e suggerire i mezzi di facile sussistenza per chi deve procurarsela colle proprie fatiche o con una ricercata economia, allora principal-

mente mostravasi, quando epizoozie, tristi vicende atmosferiche o vicissitudini politiche più necessarj rendevano i suoi consigli : e per tacere di molti suoi scritti che lo dimostrano, mi basti l'osservare come in tempi calamitosi egli condannasse l'uso della crusca nel pane, facendo vedere quanto vadano errati quelli che si credono economizzare in questo modo ; come nelle medesime infauste circostanze egli insegnasse il modo di tirare il maggior profitto possibile dalla coltura delle patate e del grano turco ; e insegnasse a fare coi semi di ginepro una bevanda di poca spesa, gustosa e salutare da usarsi in supplemento del vino ; e come nella occasione in cui una terribile epizootia faceva temere che non venissero a mancare le carni bovine che sono il più comune alimento dei cittadini, egli non solo cercasse i mezzi di estirpare un sì fatal morbo, ma si occupasse pure dei cibi da sostituire alle carni bovine. Egli è in questa circostanza che considerando essere il pesce uno tra questi molto usitato, universalmente gradito ed assai salutare, prese a scrivere il suo *Saggio sopra le peschiere e la loro utilità*, in cui, dopo aver determinato quale sia l'acqua opportuna per formare le peschiere, quale il modo in cui queste devono esser fatte, come esse possano servire per l'irrigazione dei prati, tratta dei pesci e delle varie loro specie; insegna quali siano quelle delle quali si deve aver cura e quali si debbano eliminare ; mostra il modo di nutrirli e moltiplicarli anche per mezzo della fecondazione artificiale ; come castrar si possano, ed in qual modo si debba far la pesca ; infine insegna le moltiplici utilità delle peschiere, e le cautele ad aversi per evitare i danni che dalle medesime ne potrebbero derivare.

Vassalli-Eandi mostrossi ognora d'un carattere giusto, affettuoso ed inalterabile anche in tempi tumultuosi ed in circostanze difficilissime. Riconoscente verso il suo zio Eandi cui dovette la sua prima educazione, non solamente ne pubblicò le notizie storiche, ma prese ancora, dopo la sua morte una cura speciale della sorella ch'esso avea lasciata scarsa di

beni di fortuna e tutta ratratta per cronica artrite; e contribuì in grandissima parte alla educazione dei proprj nipoti. Affezionatissimo verso tutti quelli coi quali era legato per sincera amicizia, non mancava mai di cercare i mezzi di essere loro utile in qualche modo; e non trovava più soave conforto al dolore che provava quando la morte coglieva alcuno di essi, che quello di pubblicarne le lodi.

Vedendo egli accrescersi di giorno in giorno l'affezione nervosa per cui da continuo tremore erano agitate le sue membra, e mal fermo reggevasi sui piedi, principalmente se veniva ad incontrar persona che non fosse solito vedere e da essa era arrestato nel suo cammino, si determinò nel 1817 a non più escire di casa che per andare in chiesa, od alla sua villetta, od a fare al mattino prima dell' alba una passeggiata d'un miglio circa. La stima e la riputazione di cui godeva facevan sì che moltissime fossero sempre le persone che venivano a trovarlo. I forestieri di qualche distinzione scientifica o letteraria che capitavano a Torino, ricercavano la sua conoscenza, e lo consultavano sulle parti le più difficili dei loro studj. I suoi colleghi grandissimo conto facevano de' suoi consiglj, e le autorità superiori continuamente lo interrogavano onde sapere il suo parere su punti difficilissimi; ed egli colla solita sua ingenuità, franchezza e prontezza di spirito rispondeva.

I miseri non trovarono mai l'accesso chiuso per loro al cuore di lui. Egli riceveva colla stessa affabilità il potente, il ricco ed il povero: questi era sicuro di trovare in lui un padre ed un protettore. Alla sua villetta egli era il padre ed il giudice dei contadini di quei dintorni: essi a lui ricorrevano nei loro bisogni sicuri d'ottenere soccorso, protezione e consiglj: essi a lui affidavano le loro quistioni domestiche sicuri di vedere in breve a rientrare nelle loro famiglie la pace e la tranquillità. Egli era dotato della difficilissima qualità di saper conciliare pel maggior bene i pareri i più discordanti, e di sapersi adattare ad ogni ceto di persone colle

quali egli avesse a trattare; di modo che chiunque con lui parlava, credeva conversare con un suo eguale. Egli era fanciullo coi fanciulli, giovane coi giovani, artista cogli artisti, dotto coi dotti, e persin le donnicciuole prendevano piacere a parlare con lui sul modo di filare e cose simili.

Durante l' intiero corso di quattro mesi che continuò la sua ultima malattia non fu mai sentito una volta a lamentarsi; nè mostrò mai un umore più del solito melanconico; e sino agli ultimi momenti del viver suo fece veder con qual rassegnazione e con quanta tranquillità d'animo puossi rimirar in fronte la morte da chi fu ognora virtuoso. Vedendo egli che l' estremo della sua vita si avvicinava, chiamò i conforti della Religione, e diede egli medesimo tutte le disposizioni perchè questa sacra funzione si facesse nel miglior modo possibile; e mi parlò in seguito a lungo su quanto era sua intenzione ch' io facessi seguita la di lui morte, la quale accadde dopo poche ore, il dì 25 di luglio del 1825.

CATALOGO

DELLE OPERE E DEGLI ALTRI SCRITTI

STAMPATI DAL PROFESSORE

ANTON-MARIA VASSALLI-EANDI

Memoria sopra il Bolide degli 11 settembre 1784, e sopra i Globi di fuoco in generale (Torino 1786, vol. 1 in 12).

Dell' influsso dell' elettricità nella vegetazione, e dell' azione della vegetazione sopra l' aria (1786, Mem. della Società agraria di Torino, tom. 1).

Sopra il Cerambice odoroso (1786, Opuscoli scelti tom. 13).

Esame dell' elettricità delle meteore del Bertholon (1787, Biblioteca oltremontana, tom. 9).

Esame della teoria sull' elettricità, e sopra il magnetismo dell' Abate Haüy (1788, Bibl. oltrem. tom. 2 e 3).

Esame della teoria di Crawford del signor Morgen, tradotto dall' Inglese, e corredato di molte note (Torino 1788, vol. 1 in 8.°).

Lettere fisico-meteorologiche dirette a Senebier, Saussure e Toaldo (Torino 1789, vol. 1 in 8.°)

Memorie fisiche (Torino 1789, vol. 1 in 8.°).

Osservazioni sull'agghiacciamento dell'acqua elettrizzata (1789, Giornale scientifico letterario e delle arti d' una Società filosofica di Torino, tom. 1).

Teoria delle variazioni barometriche (ivi, tom. 2).

Sperienze sopra l' influsso dell' elettricità nel colore de' vegetabili (ivi, tom. 3).

Lettera sopra diversi argomenti di fisica diretta al sig. Brugnatelli (1790, Biblioteca fisica d' Europa, tom. 17).

Articoli di lettera sopra l' elettricità di diversi corpi, ed altri argomenti di Fisica (1790, Annali di Chimica, tom. 1).

Sperienze elettriche sopra l' acqua e sopra il ghiaccio (1790, Mem. della Soc. Ital., tom. 3).

Theses ex universa philosophia selectae (Derthonae 1790, vol. 1 in 4.°).

Lettera sopra una dissertazione intitolata *De Planeticulis* (1790, Bibliot. oltrem.)

Expériences électromètriques (1790, Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino, tom. 10).

Lettera sul colore de' vegetabili (1791, Bibl. oltr. tom. 3).

Esame delle teorie dei principali fenomeni della meteorologia del signor Monge (1791, ivi, tom. 7, 8, 9).

Congliietture sopra l' arte di tirare i fulmini appo gli antichi (1791, Ozj letterari, tom. 3 ; ed Opuscoli scelti di Milano, tom. 14).

Parallèle de la lumière solaire avec celle du feu commun (1791, Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino, tom. 10; ed Opuscoli scelti di Milano, tom. 17).

Supplément au parallèle de la lumière solaire ec. (ivi).

Esperienze fatte in Piemonte sopra la possibilità di due raccolti di bozzoli in un anno, e di ottenere ancora una raccolta di bozzoli da bigatti o filugelli, i quali dopo la quarta muta non siano stati nudriti che alcuni giorni (Calendario georgico della R. Società agraria di Torino del 1791).

Lettera sull' arte di scemare il consumo dell' olio (1791, Annali di Chimica, tom. 3).

Lettere sopra l' influenza dei diversi gaz nell' economia animale (1792, Giornale fisico-medico di Brugnatelli, tom. 2 e 3).

Lettera sopra diversi argomenti di Fisica (1792, ivi, tom. 4).

Paragone della luce solare, e della combustione (1792, ivi, tom. 9).

Facile metodo di preservare il grano dalla carie, ossia di non aver grano moro (Calendario georgico del 1792).

Del danno che recano gli alberi ai campi in cui si semina grano (ivi).

Modo di asciugare certi terreni paludosi per mezzo di piantamenti, e di assodare le rive dei fiumi (ivi).

Esame del discorso di Gregorio Fontana sulla meccanica animale (1793, Bibliot. oltrem., tom. 1).

Physicae experimentalis lineamenta (in comune con Eandi, Torino 1793, tom. 2 in 8.°).

Sperienze ed osservazioni sopra gli effetti dell'acciecamento nei pipistrelli 1794, Bibliot. oltrem. tom. 3).

Sopra il sospetto d'un nuovo senso nei pipistrelli. Lettere dell'abate Lazzaro Spallanzani con le risposte dell'abate Anton-Maria Vassalli-Eandi (Torino 1794, in 8.°).

Arithmetices et Geometriae Elementa (in comune con Eandi; Torino 1795, tom. 1 in 8.°).

Sperienze sulla scelta delle sementi (Calendario georgico del 1795).

Saggio sulla potatura de' gelsi (ivi).

Saggio sopra le peschiere, e la loro utilità (1796, Mem. della R. Soc. agraria di Torino, tom. 7).

Lettera all' abate Amoretti sopra la maniera di fare aghi calamitati che non offrano declinazione ; e ferri che mostrino lo stesso polo agli estremi opposti (1796, Opuscoli scelti sulle scienze, tom. 19).

Lettera all' abate Spallanzani sopra i suoi viaggi alle due Sicilie (1797, Biblioteca italiana).

Saggio sopra l' alternazione dei prodotti (Calendario georgico del 1797).

Saggio del sistema metrico della Repub. Francese (Torino 1798 vol. 1 in 8.°).

Notizie delle nuove misure della Repub. Francese col rapporto delle medesime a quelle del Piemonte (Calendario georgico del 1798).

Dei danni provenienti dall' ammucchiare la messe umida, e mezzo facile di esaminare la qualità della farina (ivi).

Sopra alcuni stromenti meteorologici che segnano le loro variazioni per se stessi 1799, Memorie della Società Italiana, tom. 6).

Lettre sur le galvanisme et l' origine de l'électricité animale (1799, Journal de Physique de Paris).

Sur les phénomenes de la torpille (1799, ivi).

Sur le Vitalitomètre (1800, ivi).

Èssai sur l' utilité des conducteurs électriques (1800, Mem. dell' Accademia di Torino).

Mémoire sur les affinités des gaz (1800, Mém. de la Société médicale d' émulation de Paris, vol. 3).

Avviso sopra l' uso della crusca nel pane (Calend. georg. del 1801).

Maniera di fare le minestre alla Rumphordt (Torino 1801, in 8.°).

Lettera concernente la corrispondenza meteorologica (Torino 1801, in 8.°).

Expériences et observations sur le fluide de l' électro-moteur (1801, Mem. dell' Accad. di Torino, vol. 12).

Della fecondazione artificiale delle piante (Calend. georg. del 1802).

Notizia delle nuove misure (ivi).

Notice sur la vie et les ouvrages d' Eandi (1802, Mem. dell' Accad. di Torino, vol. 12).

Expériences galvaniques sur les décapités (Turin 1802, in 4.°).

Saggio del sistema metrico, seconda edizione accresciuta (Torino, 1 vol. in 8.°).

Saggio d'esperienze sopra l' influenza della luna sui vegetabili (Calend. georg. del 1803.)

Notice d' un météorographe (1803, Mem. dell' Accad. di Torino, vol. 12).

Sur l' action du galvanisme, et sur l'application de ce fluide et de l' électricité à l'art de guérir (Turin 1803, in 4.°).

Saggio sopra il fluido galvanico (1803, Mem. della Società Italiana, vol. 11).

Lettera sopra la natura del fluido galvanico (1803, ivi).

Recherces sur la nature du fluide galvanique (1803, Mem. dell' Accad. di Torino, vol. 14).

Description et usage d'un nouveau baromètre portatif (1803, ivi).

Notice d' une trombe terrestre (1803, ivi).

Sur la vitesse du fluide galvanique (1804, Bibliothèque Italienne, par Julio, Giobert, Vassalli-Eandi et Rossi, vol. 1).

Expériences galvaniques, ou notice de la dernière séance du cours public des expériences physiques (1804, ivi, tom. 2).

Observations mètéorologiques faites pendant l'éclipse du soleil du 21 pluv., an 12 (1804, Mem. dell' Accad. di Torino, vol. 14).

Mémoire historique de l'Academie depuis le 1792 au 1805 (1805, ivi).

Saggio d' esperienze e d' osservazioni sopra la grossezza, l'elasticità, e la forza delle lane (1805, Mem. della Società Agraria di Torino, vol. 8).

De recta docendi ratione. Oratio (Torino 1805, in 8.°).

Lettera sopra la costruzione del cervo volante, e la maniera di servirsene (1805, Giornale di Torino).

Trois lettres sur le voyage de Turin au Montblanc (1805, ivi).

Risultato d' alcune sperienze d' innesto del castagno sopra la quercia (Calend. georg. del 1805).

Saggio del nuovo sistema metrico, edizione terza accresciuta dell' Aritmetica volgare e decimale, di molte tavole ec. (Torino 1806, vol. 1 in 8.°).

Note sur l' accouplement des animaux de diverses classes (Bibliot. Italienne, 1806).

Saggio di Corografia Agraria (1806, Mem. della Società Agraria di Torino, vol. 8.°).

Saggio teorico-pratico sopra l'*Arachis hypogaea* (Torino 1807, vol. 1 in 8.°).

Nota sopra l'accrescimento dei pioppi nelle varie loro età, determinato con due misure prese li 7 giugno, e li 13 novembre 1806 (Calend. georg. del 1807).

Note sur la greffe du Chatagnier sur le chêne (Bibl. Ital. 1807).

Saggio d'un trattato di meteorologia (1807, Mem. della Società Italiana, tom. 13).

Rapport sur le tremblement de terre, qui a commencé le 2 avril 1808 dans les vallées de Pélis, de Cluson, de Pô etc. (Turin 1808, 1 vol. in 8.°).

Nota sulla fissazione dell'adequato, ossia prezzo medio comune, o mercuriale delle derrate (Calend. georg. del 1808).

Nota sopra la coltura ed il prodotto dell' *Arachis hypogaea* (Calend. georg. del 1809).

Nota sopra l'accrescimento dei pioppi nelle loro varie età (ivi).

Nota sopra i vantaggi di filare le sete, riscaldando l'acqua dei bacili per mezzo dei vapori dell'acqua bollente (ivi).

Saggio sopra il terremuoto che da sette mesi scuote le valli del Chisone, del Pelice, e del Po (1809, Mem. della Soc. Ital., tom. 14).

Annales de l'observatoire de l'Accadémie de Turin, avec des notes concernant l'Agriculture et la Médecine. 1.er semestre 1809 (Turin, 1 vol. in 4.°)

Notice des travaux de la classe des sciences physiques et mathématiques de l'Académie de Turin, depuis le 1.er janvier 1805 jusqu'au même jour 1809 (Mém. dell'Accad. delle Scienze di Torino, vol. 16).

Résultats des observations météorologiques faites à l'observatoire de l'Académie depuis le 1.er janvier 1787, jusqu'au même jour 1807, avec des notes (1809, ivi).

Précis de nouvelles expériences galvaniques (1809, ivi).

Discorso sopra l'esperienza in Agricoltura (Calend. georg. del 1810).

Sperienze sopra la coltura ed i prodotti dell' *Arachis hypogaea* (ivi).

Nota sopra l'accrescimento dei pioppi nelle loro varie età, e sopra l'effetto della diramazione sul medesimo con varie altre osservazioni (ivi).

Annales de l'observatoire de l'Académie de Turin, 2.d semestre, 1809 (Turin, 1 vol. in 4.°).

Histoire météorologique des années 1807-1808 avec des notes (1810, Mem. dell' Accad. delle Scienze di Torino, vol. 18).

Annales de l'observatoire de l'Académie de Turin, 1.er et 2.d semestre 1810 (Turin, vol. 1 in 4.°).

Discorso sopra una bevanda di poca spesa, gustosa, e salutare da usare in supplemento del vino (Calend. georg. del 1811).

Nota sopra la maniera di accrescere il prodotto delle patate per mezzo delle propagini (ivi).

Nota sopra l'accrescimento dei noci nelle loro varie età (ivi).

Ulteriori sperienze sopra l' *Arachis hypogaea* (ivi).

Nota sopra un fenomeno straordinario osservato in una famiglia di filugelli con altre osservazioni relative ai medesimi (ivi).

Mémoire historique de l'Académie du 1.er janvier 1805 au même jour 1811 (Mem. dell' Accad. delle Scienze di Torino, vol. 18).

Éloges historiques des Accadémiciens Reineri, Marini et Giorna (1811, ivi).

Seconda nota sopra il crescimento dei noci nelle loro varie età, e sopra l'effetto della loro diramazione circa il medesimo, e circa la loro fruttificazione (Calend. georg. del 1812).

Nota sopra un punto importante dell' educazione dei bachi da seta (ivi).

Nota sopra l' *Arachis hypogaea* (ivi).

Notizia sopra due saggi di sciroppo estratto dai frutti del *Morus alba*, e dalle mele dolci e carpendole (ivi).

Annales de l' observatoire de l' Académie de Turin, 1.er et 2.d semestre 1811 (Turin, 1 vol. in 4.°)

Lettera sopra la doppia ricolta di bozzoli in ciascun anno (Calend. georg. del 1813).

Terza nota sopra il crescimento dei noci (ivi).

Notice sur la vie et les ouvrages de M.r Louis de La Grange (Journal de Turin 1813).

Memoire historique concernant deux rapports faits à la classe des Sciences de l'Académie (1813, Mem. dell' Accademia delle Scienze di Torino, vol. 20).

Experiences et observations concernant les effets de divers poisons (ivi).

Nota sopra un mezzo facile e spedito d'avere gelsi innestati (Calend. georg. del 1814).

Quarta nota sopra il crescimento dei noci nelle loro varie età, e sopra l' effetto della diramazione relativamente al medesimo (ivi).

Nota sopra un mezzo facile di preservare le case rustiche dal fulmine (ivi).

Saggio di un trattato di meteorologia (1815, Mem. della Società Italiana, tom. 17)

Parere sopra una quantità di peli di camelo portata da Smirne a Livorno, se sia stata sotto trave, ed imbarcata umida (Pisa 1815, in 4.°).

Notizia sopra la vita e gli scritti del Padre Giambattista Beccaria (Spettatore italiano, Milano 1816).

Mémoire historique du vol. 22me de l'Academie Royale des Sciences de Turin. avec la notice des travaux de la classe des Sciences physiques et mathématiques (1816, Mem. dell' Accad. delle Scienze di Torino, vol. 22).

Indici degli Autori, e delle materie dei volumi della R. Accademia delle Scienze dal 1759 al 1815 (ivi).

Osservazioni e sperienze agronomiche sopra i bachi da seta, le patate, il grano turco ec. (1817, Mem. della R. Società Agraria di Torino, tom. 10).

Annali della R. Accademia delle Scienze di Torino (1818, Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino, tom 23).

Compendio delle osservazioni meteorologiche fatte alla Specola della R. Accademia delle Scienze dal 1.° gennaio 1812 al 1.° gennaio 1818 (ivi).

Sopra il terremuoto del dì 23 di febbraio dell' anno 1818 (ivi).

La Meteorologia Torinese, ossia Risultamenti delle osservazioni fatte dal 1757 al 1817 (Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino, tom. 24).

Lettera sopra l' indiscreta potatura de' gelsi (Calend. georg. del 1820).

Breve ragguaglio di Efemeridi medico-meteorologiche manoscritte dal dì 15 di agosto 1741 al 31 di maggio 1746 (1821, Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino, tom. 25).

Nota sopra un mezzo di provvedere alla scarsità della legna (Calend. georg. del 1821).

Memorie istoriche intorno alla vita ed agli studi di Gianfrancesco Cigna (1822, Mem. della R. Accad. delle Scienze di Torino, tom. 26).

Sopra la maniera di raccogliere le patate senza sradicarne le piante, e sopra l'efficacia del sovescio di queste sulla vegetazione della canapa (Calend. georg. del 1822).

Nota sopra le straordinarie variazioni del barometro; sopra il massimo grado di caldo e di freddo; la quantità della pioggia, della neve, e dell' evaporazione che si osservarono nel 1821 con alcuni cenni sopra le qualità dell'annata (Mem. della R. Accad. delle Scienze, tom. 27).

Nota sopra lo straordinarissimo abbassamento del barometro osservato il dì 2 del mese di febbraio del 1823, e sopra un fenomeno che si osservò in alcuni pozzi d'acqua viva nell' occasione di straordinarie depressioni del barometro (ivi).

Maniera di accrescere la fertilità dei colli, e di rimediare ai guasti che le acque vi cagionano (Calend. georg. del 1823).

Sperienze ed osservazioni concernenti la fruttificazione delle viti, e la maturazione delle uve (Calend. georg. del 1824).

Nota sulla virtù igrometrica dei capelli delle mummie (Mem. della R. Accad. delle Scienze, tom. 29).

Nota su bachi ottenuti da seme proveniente da bozzoli imperfettissimi (ivi).

Memoria sul tempo di mietere il grano (Propagatore, giornale, tom. 2, pag. 192, Torino 1825).

ORAZIONE

IN ELOGIO

DI STEFANO GALLINI

EMERITO E CHIARISSIMO PROFESSORE DI FISIOLOGIA UMANA

ED ANATOMIA SUBLIME PRESSO L' IMPERIALE REGIA UNIVERSITÀ

DI PADOVA

Scritta

DAL DOTTOR VINCENZO FABENI

PUBBLICO ORDINARIO PROFESSORE

DI FISIOLOGIA IN DETTA UNIVERSITÀ

Ricevuta adì 1. Marzo 1838.

Essere interprete del pubblico cordoglio fu sempre doloroso ufficio, o Signori, e dolorosissimo adesso per me, che appena destinato a sostenere l' insegnamento dell' Umana Fisiologia, condotto mi veggo tra queste sacre ed auguste pareti a lamentare la perdita di lui, che sommo nelle fisiologiche scienze sedette delle stesse per oltre quarant' anni in questa nostra Università venerato Maestro, e riposava poc' anzi tranquillo all' ombra dei mertati allori nella compiacenza dell' universale ammirazione. E come potrò io colla tenuità del mio dire e privo di quei robusti ed eloquenti modi, con che si mitigava in quest' anno l' acerbità di tante nostre ferite, (1) corrispondere all' alto subbietto, che la luttuosa pompa del giorno, e la giusta nostra aspettazione richiede ? Noi perdemmo

---

(1) L' Università di Padova ebbe a piangere nello stesso anno la perdita di varj illustri Professori, e specialmente di Francesco Fanzago, di Floriano Caldani, di Antonio Bonato.

in Stefano Gallini quel grande, che colla forza dell' ardita sua mente seppe penetrare nei più profondi arcani dell' umana natura, e svelarne gli occulti ed ammirandi artificj. Noi perdemmo in Gallini quel grande, che colle sue fisiologiche dottrine novello cammino dischiuse, onde più rettamente calcolare il potere dell' organica fibra, e delle forze ad essa inerenti. Noi perdemmo . . . ah no! l'uomo passa, ma l' orma dell' ingegno lasciando traccie indelebili sulle sue vie, vivo sempre il serba alle generazioni future, ed il nome ne associa con quello de' secoli. E tale fu il Gallini o signori; che se noi versiamo amare lagrime sulla sua tomba, se voi, giovani egregi, pianger dovete al nostro pianto, restano d' altra parte i frutti preziosi del genio sublime, contro dei quali non vale forza di tempo o d' invida etade, ad alleviamento del vostro e del comune affanno. Me felice, se mi sarà dato di degnamente toccare con brevi cenni quei punti, dai quali emerse vera gloria e celebrità al grande Maestro ed alla nostra Università nuovo lustro e splendore.

Trasse Stefano Gallini i suoi natali in Venezia nel giorno 22 di Marzo dell'anno 1756 da Girolamo Gallini, ed Angela Soffietti. Sebbene esso gloriar non poteasi nè d' illustre liguaggio, nè di splendide fortune, vantava però onorata e civile famiglia, genitori solleciti ed affettuosi, dei quali fu principal cura non solo l' esatta osservanza dei sociali e religiosi doveri, ma l'accostumarlo anche fino dai prim' anni ad agire più per riflesso, che per esempio od imitazione altrui. E forse da questo modo d' infantile educazione derivò nel Gallini il primo germe di quella ammirabile vigoria di mente, che sì lo distinse nella sua luminosa carriera.

Percorso quasi il nono anno tra le domestiche mura passò convittore nel Seminario Ducale di S. Niccolò di Castello, ove scelta, e numerosa gioventù era affidata alle cure indefesse dei Padri Somaschi. Compiva in quello lo studio della Gram-

matica, e della Rettorica, e la Logica poscia, e la Metafisica sotto i sani precetti del Padre Franceschini formarono argomento delle serie sue applicazioni.

Dischiuso così l'intelletto, e reso capace delle più sublimi idee abbracciò per naturale tendenza quegli studj, che investigando l' umana natura, le cause che governano la più ammirabile complicazione di parti, conducono alla conoscenza dell' essere sovra ogni altro perfetto nella generale creazione, ed offrono all' umana acutezza inesauribili sorgenti di meditazione. Per tale motivo adunque dedicossi alle mediche Scienze, e la nostra Università, che fu culla in ogni tempo d' ingegni chiarissimi, lui poco più che trilustre noverò tra' suoi figli nell'anno 1771.

Era il medico insegnamento per quei tempi in guisa disposto, che oltre le varie parti, che ne costituiscono la vera sostanza, doveano i giovani seguire un corso biennale di fisica. Fu in allora, che mentre sentiva dal Colombo sviluppate le nuove teorie dei Gallilei, e de' Newton sull' attrazione reciproca dei corpi, delle particelle di questi e dei loro elementi, intendeva dal Barbarigo seguace delle ipotesi di Cartesio derivare il tutto da esterne impulsioni di un fluido sottilissimo diffuso per l' immensità dello spazio: e ricco di tali idee, che spiegavano le recondite cause dei fenomeni dell' Universo, veniva guidato dall' esimio Professor Leopoldo Caldani , che l' istruzione teorica della Medicina e le anatomiche dimostrazioni sosteneva, all' esatta conoscenza della macchina umana, e delle funzioni dei varj suoi organi; e sia che fosse in lui naturale renitenza allo studio della pratica medicina, oppure che s' invaghisse piuttosto della chiarezza, dell' ordine, e della solidità dei principj esposti dall' insigne anatomico, certo si è che la teoria delle mediche scienze pienamente lo attrasse, distogliendolo quasi del tutto dai pratici insegnamenti del Chiarissimo Prof. Dalla Bona.

Compiva frattanto il corso quadriennale dei medici studj, e ricevea dalla nostra Università quella corona, che non è

già tanto premio alla virtude, quanto per chi ben sente, di novelli ed ardui studj vivissimo eccitamento. Sentillo infatti profondamente il Gallini, e siccome le fisiche scienze brillavano di fulgidissima luce ; così quelli, che per Europea rinomanza se ne additavan Maestri, bramò da vicino conoscere, sperando di poter innalzare la propria ragione a quella energia, che sola può comprendere i più astrusi misteri, scoprirne le cause, verificarne gli effetti.

Noi lo vediamo quindi per sì nobile divisamento sorretto dai consigli, e dai mezzi di un illustre fratello trasportarsi nelle primarie Capitali d'Europa, visitare ovunque ciò chè poteva promuovere l' alto suo fine : noi lo vediamo in Montpellier, in Parigi ampliare, correggere le proprie idee alla luce dei Portal, dei Desault, dei Vicqd' azir, dei Daubenton, dei Macquer, dei Rouel ; assistere ai tanto celebrati consessi di quella cospicua Reale Accademia, ove l'ardire dell' umano ingegno appariva ad un tempo sulla fronte dei d'Alembert, dei Voltaire, dei Franklin. Noi lo vediamo in Londra seguire attento le belle esperienze degli Hunter, dei Kruikshank, stringere relazione coi Banks, coi Solander, coi Priestley, e fatto così copioso corredo delle più utili cognizioni ritornare giulivo al bel suolo d' Italia, scorrerne le principali regioni, dove uomini sommi splendeano, avido mai sempre del loro sapere. Amico lo salutarono in Napoli i Cotunnj, i Dalla Torre, i Filangeri, ; i Saliceti in Roma ; i Fabbroni, i Nannoni in Firenze ; i Tissot, gli Spallanzani, i Rezia, i Fontana in Pavia.

L'autorevole presenza degli uomini grandi, le loro sembianze improntate dei solchi della meditazione, la pubblica ammirazione, che ad essi s' inchina, il generale favore che li accompagna coi meritati applausi, la fama che ne ripete il nome da lunge, sono potentissimi impulsi all' emulazione di giovanile ed animoso intelletto. Da tali calde faville infiammato ritornava il Gallini nel 1782 in sen della sua Patria, lo accoglieva essa fastosa, certa di vedere ben presto il frutto delle onorate di lui fatiche, delle sue profonde ricerche. Nè fu delusa in tale

speranza, quando il Veneto Senato chiamollo nell'anno 1786 a sedere Maestro in questa nostra Università, ed a svolgere a generosa gioventù la parte teorica delle mediche Scienze.

Sorge, o Signori, l' epoca gloriosa del nostro Gallini.

La dottrina della vita, ossia di quell'ammirabile artificio degli esseri organici, pel quale ricevono dessi incremento e sviluppo ; pel quale ogni organo, ogni parte conserva se stessa e concorre alla conservazione delle altre, pel quale tante determinate e regolari azioni si osservano, seguì sempre di pari passo i progressi della Filosofia, e della coltura dell' umano intelletto. Finchè languida luce mandavan le scienze, misteriosa apparve ed arcana, e le necessarie nozioni delle sublimi operazioni vitali piuttosto che poggiare su giusta lance di filosofico ragionamento, sorgevano figlie di fervide immaginazioni, e di capricciosi sistemi. Un innato principio si credette quindi risiedere negli organici corpi attivissimo, di specifiche ed occulte qualità fornito, dall' energia del quale derivassero le funzioni tutte degli esseri dotati di vita : chi lo volle intelligente, concentrato in alcune regioni del corpo, o disperso per tutte, paragonabile all' anima, agente con fini preveduti, regolatore degli organi, del loro sviluppo, moderatore delle loro azioni, dei loro movimenti. Chi invece dietro le leggi della Meccanica si avvisò di estimare, e di calcolare le funzioni degli organi con quelle leggi medesime, che presiedono al corso delle acque, ed alla elevazione dei pesi. Chi considerò le perpetue organiche mutazioni, come il prodotto di tante officine, entro le quali non succedano che filtrazioni, e fermenti, od altre maniere di chimici processi. Chi mal pago di tali idee richiamò di bel nuovo l'arcano impero d' un diffuso principio animale , che si voleva influisse in modo ammirando ed oscuro sulle diverse funzioni vitali, confondendo le sublimi azioni dell' anima con quei movimenti, che sono proprj dell' organica fibra, e su molti dei quali non esercita l' anima potere alcuno, dimenticando, che sotto certe condizioni sul cadavere stesso si appalesa l'attività dei muscoli, che il cuore reagisce all' azione

degli stimoli staccato dal torace, e toltagli qualunque communicazione col cervello, dimenticando che i vegetabili medesimi irritati offrono azioni manifeste dipendenti dalla propria vita, correndo perciò pericolo per non voler cercare ed ammettere nell' organizzazione la causa di tanti movimenti, di dover quasi supporre nelle piante stesse il sentimento persino e le passioni.

Ma io ben troppo, o Signori, devierei dall' oggetto che impresi a trattare, se anche di volo cenno facessi di quelle teorie, che più o meno brillarono nel secolo passato, e per le quali rinomati sempre saranno i Baglivi, gli Hoffman, i Barthez, i Cullen, gli Haller, i Brown. Malgrado le tanto agitate opinioni, malgrado gli sforzi di sì preclari ingegni ben pochi progressi poteva vantare la Fisiologia relativamente alla vita; e la stessa dottrina del grande riformatore Scozzese, che qual nuova face sorgea a rischiarare un più retto sentiero, scevra non era di errori e di falsi principj.

Era riservato alla robusta mente del Gallini il gettare luce novella su questa parte difficilissima. Diretto egli dalle pure massime di quella filosofia induttiva, che sola può condurre alla scoperta del vero, lungi dal cercare la spiegazione di singolari funzioni esaminò il corpo vivente sotto altro punto di vista, e scoprì quel primo filo capace di guidare alle più utili fisiologiche verità. Vidde egli, fissate alcune primitive idee sulle parti semplici componenti il corpo umano, alle quali ci guida la sola anatomica e materiale divisione, stabilite con giusto e fino criterio le proprietà di queste parti medesime, calcolata la moltiplicità dei chimici elementi, che concorrono alla formazione delle organiche molecole e delle fibrille, vidde egli, dissi, che tutte le operazioni dell' uomo vivente, tutte le proprietà vitali, che si attribuiscono ai semplici tessuti, poterne essere ridotte ad una legge generale soltanto, ad una differente mobilità delle molecole, derivare perciò da una diversa coesione, che insieme le stringe e le lega, ossia da quella forza universale ond' è la materia tutta sollecitata e diretta.

Aggiunse, che la propietà di alcuni tessuti organici è comune anche a quei corpi che non sono forniti di vita, laddove quella di altri è ad essi esclusiva fin che in loro sussiste la vita. Se dunque le ossa, le cartilagini, i legamenti hanno la loro proprietà comune colla informe materia, i muscoli, i nervi, le membrane, il tessuto cellulare godono facoltà loro proprie, e particolari ; e se quelle dipendono da prevalente grado di attrazione, onde si tengono le molecole organiche fra di loro congiunte , queste del pari dipendono dalla forza medesima che più debolmente avvinte le tiene. Dalla qual circostanza ne segue, che in questi ultimi tessuti ad ogni minimo impulso di leggieri mutino luogo le loro molecole e proporzione eziandio i molti elementi di che sono composte, ma con eguale celerità e le une, e gli altri nel naturale stato rimettonsi in forza di quell' attivo equilibrio, che regna tra le mutue attrazioni delle molecole stesse , e dei loro elementi. E da sì fatto attivo equilibrio appunto deriva quella attitudine dei corpi viventi, in virtù della quale siccome esser possono dalle cause sopra di essi operanti agevolmente mutati , così modificano fino ad un certo punto i cangiamenti per esse nella loro intima mistione indotti, ed in singolar guisa vi si oppongono, che tosto o tardi finchè dura la vita si restituiscono nel primiero stato e mantengonsi. Il che si effettua coll' addizione perenne della nutritiva materia che effondesi nei più intimi penetrali dell' organica fibra, pronta a riparare le perdite in qualunque siasi parte del corpo. Chiamò il Gallini vitalità, ed attitudine a vivere l'attivo equilibrio delle organiche molecole e dei loro elementi, e vita l' esercizio di una tale facoltà. Espresse con sì sublime idea una forza, o meglio un complesso di azioni risultanti dalla forza generale della materia, e determinò con un solo filosofico principio le ragioni delle diverse operazioni della vita, della sensibilità, irritabilità, contrattilità, e turgescenza vitale, ossia di quelle ammirabili proprietà, nella considerazione delle quali soleano smarrire i più acuti ingegni. Questa sublime dottrina già presentita nell' orazione inau-

gurale allora quando il Gallini ascendeva nel 1786 la Cattedra dell'insegnamento teorico della Medicina, fu poi ampiamente proclamata nel 1792 in quel saggio di osservazioni concernenti i progressi della fisica del corpo umano, che si può a buon diritto chiamare un vero tesoro di filosofiche verità.

Nè fia ch' io ora penetri ad esaminare le belle ed ingegnose applicazioni del nuovo fisiologico sistema alla spiegazione delle vitali proprietà, e delle funzioni degli organi: la necessaria brevità del discorso me lo impedisce. Solo dirò, che divulgate appena le nuove idee sulla vita, e sulle sorprendenti operazioni di questa, ingegni chiarissimi ne predicarono ovunque la sublimità, l' eccellenza, tra i quali non tacerò gl' illustri nomi dei Girtanner, degli Allhorf, dei Tommasini : le pagine del grande Fisiologo s' ebbero a norma le più cospicue mediche istituzioni d' Europa; tutti fecere plauso al gran genio d' Italia, salutandolo col nome di sommo fisiologo e di profondo filosofo. E sommo egli era di fatto, quando piantava le basi del suo nuovo sistema, quando proclamava, che dalle forze generali della materia, che proprie sono delle grandi masse, e delle minime molecole derivare doveasi l'azione dell' organica fibra, il che ricevette più ampio sviluppo nei successivi suoi scritti, nei varj trattati elementari dell' umana fisiologia. E sommo egli era allora quando dettava le sue belle osservazioni sull' uomo vegetante, e sull' uomo senziente, mostrando come per la forza ed azione del sistema vascolare si provveda allo sviluppo ed alla conservazione dell' organica sostanza, essendo le varie specie di vasi una cavità continuata, entro cui le molecole organiche si compongono per dipartire da essa allo scopo della nutrizione, delle secrezioni; e come per la forza ed azione del sistema nervoso le impressioni dalle estremità senzienti si trasportino con varia direzione, con varia forza, più o meno associate o divise a piccoli centri, ed al centro maggiore per eccitare le azioni dell' anima, le sensazioni, le percezioni, le idee, i giudizj, la volontà; determinata la quale progrediscono per altri filamenti nervosi, che

colle loro estremità chiamate motrici suscitano per le leggi della vitalità le contrazioni dei muscoli, che alla volontà obbediscono. E non vedete, o Signori, in questi brevissimi cenni le prime tracce di quelle indagini, che recarono tanta gloria all' illustre Bichat, le prime idee sulla vita organica ed animale, che più da vicino esaminata nell' uomo, e nei bruti e colla guida d' innumerevoli esperimenti condusse a stabilire le condizioni che la sostengono, e che la diriggono, e fece conoscere un sistema particolare di nervi destinato alla vegetazione, ed altro sistema alle azioni dell' anima, aventi relazione fra loro, e questa in grado diversa secondo la perfezione dell' essere al quale appartengono? E non vedete o Signori, in quei brevissimi cenni i primi germi di quelle importanti scoperte relative al sistema nervoso, per le quali celebrati sempre saranno i nomi degli Scarpa, dei Bellingeri, dei Rolandi, dei Panizza, dei Beers, e di tanti altri, che portando l' anatomico coltello sull' origine prima dei nervi, esaminando il loro decorso, la loro disposizione, confrontando gli effetti ottenuti nei bruti dalla recisione degli uni e degli altri filamenti, vennero a determinare quei nervi, che al moto presiedono, e quelli che vegliano al senso? Tu dunque, o Gallini, segnasti le prime linee delle grandi scoperte, che cotanto onorarono il secol nostro: su te dunque si deve riflettere parte di quella lode, che ad altri generalmente si accorda; e somma ed intiera ti sarebbe dovuta, se a quelle prime idee unito avessi copia e successione di esperimenti. Tu però gettasti la prima pietra, gli altri fabbricarono su di essa: così l' immortale Fabricio scopriva le valvole del cuore, delle vene, e l' Harveo sostenuto dai suoi esperimenti carpiva la più bella e gloriosa scoperta all' onore d' Italia, e dell' insigne nostro Anatomico.

Le esposte nozioni sulla vitalità, e sulla vita con vero filosofico criterio stabilite dal venerato Maestro furono la sorgente delle più utili verità relative all'umano organismo, non solo nello stato di azione regolare delle varie sue parti, ma

negli stessi irregolari suoi perturbamenti. Proclamarono esse, che la forza vitale devesi riguardare qual forza composta, ed estimar nella ragione medesima, con che si considera il composto dal quale deriva: dichiararono esse le mutazioni del vitale movimento sempre identiche, corrispondenti a quelle del materiale organico, ed ogni movimento vitale non essere, che la risultanza di una serie ben estesa di azioni diverse procedenti dai varj elementi, che compongono gli organici tessuti: impugnarono esse l'erronea sentenza di considerare la vita una condizione forzata, restituendo alle organiche fibre quella attività, dalla quale sorge il loro potere di cancellare l'impressione degli stimoli, conservando l'organica forma unica fonte delle vitali proprietà: frenarono esse la troppa severità del solidismo ridonando agli umori animali quella dignità, che loro compete come parte integrante dell'organico misto: mostrarono esse finalmente, che l'azione dei Farmaci non può essere ridotta a tanta semplicità, ma deve più o meno modificarsi secondo i loro principj, e secondo quelli delle organiche molecole, che ne ricevono le impressioni. Queste massime o Signori, che in varia foggia vestite, risplendono nelle più celebrate mediche Istituzioni del giorno, derivarono tutte dalla enunciata teoria della vita.

E come ora potrei a tanti titoli di giusto e generale encomio aggiungere le sue osservazioni sulla vera causa del sonno e della veglia, sulle esperienze di Legallois e di Wilson Philip tendenti a determinare la sede e le leggi della forza vitale del cuore, sul vapore espansile animale, sulla periodicità del mestruo flusso, sull'assorbimento esclusivo ai vasi linfatici, sull'influenza del fluido elettrico o galvanico nella produzione dei fenomeni della vita; sul modo di ossigenazione del sangue per le vie della respirazione; sull'educazione delle facoltà intellettuali dietro l'esame della fisica costituzione del cervello; sull'utilità del metodo analitico onde conoscere le cause e le leggi delle azioni morali dell'uomo; sulla superiorità di questo in confronto di tutti gli altri esseri creati dalla na-

tura? A me basti l'avere toccati quei punti ove il Gallini qual astro fiammeggiante risplende nel medico cielo: a me basti l' avervi indicato ch' egli ben meritava la fama di grande fisiologo, di sommo filosofo, d' innovatore delle mediche discipline; e come tale lo ammirava l' Italia, lo riconosceva l'Europa, e voi giovani, ben giustamente tributavate a Lui i sentimenti più puri dell' amor vostro, della vostra venerazione.

Ma, o Signori, le nuove idee sulla vita risvegliarono in alcuni ignominioso sospetto, come se il Gallini alle semplici forze della materia ascriver volesse le sublimi azioni dell'anima, e dello umano intelletto. Ah questa fu ferita grave al cuore ed alla mente intemerata di Lui! La sua voce si alzò gridando l' indipendenza delle fisiologiche scienze dalla metafisica: la sua voce esclamò, che il fisiologo nella considerazione dell' umano organismo, cerca solo di scoprire le leggi con cui questo agisce, e si rende materiale istrumento di quello spirito, ch' è emanazione di Dio, e che sulla contemplazione di se stesso si confonde e si perde sempre abbagliato dallo splendore della divina sua sorgente. E come avrebbe Egli, moderatore della nostra Università, potuto decantare la perfezione dell' uomo su tutti gli altri esseri creati, se all'uomo medesimo negata avesse quella proprietà, che più lo avvicina alla natura di Dio? Ah se non temessi per sì ingiusti sospetti di turbare il placido riposo delle sue ceneri, ben io direi; o voi, che offuscare tentaste la purità della sua fama, la tranquillità del suo cuore, osservate qual' era. Chi v'ha tra noi, che ignori, com' egli fosse non tanto del suo pubblico ministero sollecito, quanto scrupoloso osservatore de' suoi speciali religiosi doveri? A chi non fu egli di edificazione, d'esempio nel Santuario nostro, premuroso prevenendone anche l' ora, qual che si fosse la stagione, benchè la declinata etade nel dispensasse, ed il donato riposo? La modestia qual sublime distintivo carattere del merito vero forse in lui si smentì giammai, nemmeno quando straniere pretensioni invidiavangli le sue scoperte? Negli uomini è naturale lo stimolo di mostrarsi

ad altrui, del Gallini avresti detto, che adoprava nascondersi persino a se stesso. La prudenza dava legge severa alle sue azioni, severa legge al suo labbro. Sincera pietà albergavagli in cuore, nell' anima la commiserazione, nella destra la liberalità. Inalterabile serenità tra le vicende di procellosi tempi, invidiabile costanza tra le angoscie di pericolosi morbi non tolse alla sua fronte l' ilarità, alla sua bocca il sorriso : amico fedele, tenerissimo congiunto dei cari nipoti alimentò le crescenti speranze con affetto di padre : delle quali virtù geloso osservatore fino agli ultimi istanti del viver suo, ben dava a divedere qual ei sentisse in se stesso semplice immortale principio, di cui aspirava alla perfezione nella certezza di ricongiungersi alla Divinità, ond' era emanato.

Nè certo fu vano un sì giusto desio ; per lo chè ci sia di conforto nella gravissima perdita l' idea della pace, che beato spirito or godi nel Cielo, e del gran lume, che utile coltivatore delle mediche Scienze in terra lasciasti.

E voi, giovani egregi, non più v'attristate se la ferità del morbo che lo rapì, non vi permise onorarne la presente spoglia con mesto corteggio (2). Egli invece di lassù richiama i vostri pensieri a quella che vi trasmise preziosa eredità, la patria comune al vostro nobile orgoglio, le opere all'assidua meditazione, lo splendidissimo esempio alla costante vostra imitazione.

---

(2) Si allude alla circostanza, che essendo l' illustre Professore mancato a' vivi il dì 26 Maggio 1836 colpito dal Cholera, non furono concessi pubblici e solenni funerali, quali vennero richiesti dagli Studenti dell' Imp. R. Università, onde onorare meritamente il venerato loro Maestro.

CATALOGO

DELLE OPERE STAMPATE

DEL PROFESSORE STEFANO GALLINI

Oratio inauguralis habita in Gymnasio Patavino 1786.

Saggio di osservazioni sui progressi della fisica del corpo umano sano, ed ammalato 1792.

Introduzione alla Fisiología, e Patología generale 1802.

Fisiologiche osservazioni. Saggio. 1807.

Nuovi Elementi della Fisica del corpo umano Tip. Sem. 1808. Tip. Crescini 1820.

Elementi di Fisiología del corpo umano. Per Bettoni, Volume unico.

Summa observationum Anatomic. ac Physico-Chaemic. ecc. 1824.

Compendium operis pro tertia vice editi anno 1825, cui titulus est, nova elementa Physicae corporis humani. 1827.

La superiorità dell' uomo sopra tutti gli esseri creati in questa terra. Orazione inaugurale.

Se e quanto il fluido elettrico, o galvanico influisca sulla produzione dei fenomeni della vita.

Osservazioni sul vapore espansile animale.

Sul poco conto, che di alcune proposizioni fondamentali della fisica del corpo umano venne fatto da molti dotti. Cenni. 1830.

Dell' educazione delle facoltà intellettuali suggerita dalla costituzione fisica del cervello. Orazione.

Considerazioni sulla utilità del metodo analitico per conoscere le cause e le leggi delle azioni morali dell' uomo.

Considerazioni sopra le esperienze, con cui Legallois, e Wil-

son Philipp giudicarono poter determinare la sede, e le leggi della forza vitale del cuore, e quindi l' origine di alcuni disordini nell' economia animale.

Discorsi due letti come Reggente dell' Imp. R. Università di Padova in occasione di laurea.

Sull' indipendenza delle Fisiologiche scienze dalla Metafisica.

Altre piccole memorie sparse in varj giornali.

C

CENNI STORICI

SULLA VITA E SULLE PRINCIPALI SCOPERTE

DEL CAV. LEOPOLDO NOBILI

SCRITTI

DAL PADRE EUSEBIO GIORGI

DELLE SCUOLE PIE LETTORE DI FISICA

E PROFESSORE D' IDRAULICA NELL' ISTITUTO XIMENIANO

IN FIRENZE

Ricevuti adì 1. *Agosto* 1837.

Necrologie, funebri elogj, sepolcrali iscrizioni ormai non sono che il contrassegno d' uomo che morì, qual che egli fosse d' indole, di costumi, d' ingegno. Legge il passeggiero sulle tombe, legge il letterato nei periodici fogli e negli opuscoli del giorno simili encomj ; e dacchè dei più fra i trapassati ignorava perfin l' esistenza, si ferma a lodare o criticare il panegirista, e da quelli che pur conobbe, e che adulazione accompagnò al sepolcro, forma di quelli che gli furono ignoti lo stesso concetto. Tanto è vero che tutto per l' abitudine o meglio per l' abuso perde di pregio ; tanto è vero che assoluta ingiustizia è il lodare chi non merita lode, poichè con ciò si sparge la diffidenza o almeno il dubbio sulle lodi che si tributano a chi di fatto le meritò. Buon per me che pronunzio queste poche parole d' elogio ad onorar la memoria di Leopoldo Nobili di Reggio , d' un uomo cui l' età nostra rispettava, del cui valore tutti furono testimonj, di quel Fisico in somma, di cui fu tale la forza d' ingegno, l' insistenza

LEOPOLDO NOBILI

Fisico

nell'interrogar la natura, che il Franklin, il Beccaria ed il Volta non avrebbero sdegnato di averlo a compagno e collaboratore. E non può illudermi o sedurmi sentimento d'amicizia ; chè nessun affetto potrebbe mai indurmi a dirigere una sola parola fuori della indeclinabile strada del giusto e del vero : tutto al più un tal sentimento, appunto perchè profondo, potrà forse turbare alquanto il retto ordine delle idee, ed impedirmi di presentar questo quadro con quella bellezza di composizione, con quella vivacità di colorito e con quella destrezza nei chiaro-scuri con cui saprebbe dipingerlo un pittore più esperto, ma mosso soltanto nel suo lavoro dall' amore del bello. Ma sia pur fioca e sommessa la mia voce ; sarà pur sempre l'eco fedele e pietosa che ripete le lodi tributate dalla dotta Europa all' uomo che ben meritò della Scienza per la luce con la quale riescì ad illustrarla.

Nasceva Leopoldo nel 1784 fuori del patrio tetto, e precisamente a Trassilico in Garfagnana, dove Pellegrino Nobili suo Autore, giusdicente profondo sedeva esercitandovi la suprema magistratura. Ingegno penetrante mostrava egli fin dalla più giovane età, e rettitudine straordinaria di mente nel pensare, nel riflettere e nel dedurre ; sicchè non contando egli che poco più di tre lustri, formò soggetto di non fallace prognostico, non dirò soltanto per un Cassiani e per un Caccianino, nomi allora celebri fra i più valenti Geometri, ma per lo stesso Cagnoli, nome che onora e onorerà sempre la storia delle Matematiche e dell' Italia.

Con questi preliminari entrava il giovane Alunno nella scuola militare del Genio a Modena, scuola dove si formavano, si conoscevano e si apprezzavano gl' ingegni ; e nei suoi studj portava quell' ardore e quell' attività di mente della quale la dotta Europa è stata in seguito testimone. Là cominciava a farsi sentire in lui un amore per quel vero, che spoglia l'anima dai pregiudizj, e la dispone a tutte quelle impressioni che è capace di ricevere ; e da questo amore derivava in lui un ardentissima tendenza alle ricerche, e una irresistibile ansietà

per le scoperte. Gustava egli mirabilmente quei metodi analitici che soli sono sufficienti a tener lo spirito in guardia contro le illusioni d' ogni genere. Fin d' allora egli si accorgeva che le Matematiche e la Fisica sono capaci di dissipar tenebre, che sembravano impenetrabili, e trasformare i soggetti apparentemente più sterili in sorgenti inesauste di cognizioni e di forze, solo con l'osservarli sotto diverso punto di vista, o per mezzo dell' applicazione di certi principj non ancor valutati. Fin d'allora egli formava nella sua mente il piano della sua vita futura, desideroso di consacrarla esclusivamente, appena il potesse, allo studio della Natura.

Intanto era già Uffiziale d' Artiglieria. Nella necessità di seguire in quel tempo la carriera dell' armi , Egli avea prescelto appunto questo ramo dell' arte militare , perchè esso più forse d' ogni altro dà luogo a occupazioni d' ingegno, e a far mostra di una mente combinatrice ; e con tale spirito egli si accingeva a tutte quelle operazioni che formavano il soggetto dei diversi ministeri ai quali venia destinato. Tale si mostrava nel ministero di Direttore della fabbrica d' armi a Brescia, dove l' Autorità lo chiamava ; e lo studio sulla natura dei metalli e sulle loro proprietà relative agli usi diversi, oltre ad accrescere la sfera delle sue cognizioni, lo conduceva a nuovi ritrovati e sui caratteri dei metalli stessi e sul modo di perfezionarli e di lavorarli.

Ma conosciuta anco meglio l'indole e la penetrazione del giovane Uffiziale, omai insignito del grado di Capitano, doveva egli esser posto in situazione non solo più brillante, ma tale che gli dasse campo di propagare i suoi lumi, e di formare sul suo modello le menti dei giovani alla disciplina e all' arte della guerra per mezzo di quelle scienze che corredano lo spirito delle opportune cognizioni ; poichè in questo caso soltanto una militare insegna onora chi ne è rivestito, e non quando non è accompagnata che da coraggio brutale, da cieca ignoranza e da automatica obbedienza.

Ecco dunque il Capitano Nobili Professore d'Artiglieria a

Modena per volere di chi allora reggeva i destini d' Italia; eccolo a diffondere quei lumi che i primi nello stesso luogo avevano poco fa rischiarata la sua mente; eccolo in stato di coltivare giovani piante alla scuola della virtù, dell' onore e della gloria.

Ma non vi è scuola più parlante dell' esempio. Per quanto zelasse egli il suo ministero d' Institutore, tuttavia vestire militare insegna e vivere alla tranquillità e alla pace, non era nè poteva esser confacente al suo ardore e alla sua fervida mente, quando altri affrontava pericoli e morte.

E allora appunto tromba di guerra suonò . . . . benchè con suono malaugurato: e a quella voce tutti si destarono nel Nobili i sentimenti di Cittadino, di Militare e d'Uffiziale, sentimenti per lui irresistibili, sicchè a fronte di tanti e diversi ostacoli che gli vengono opposti, vuol seguir quella voce che per la Patria lo chiama alla Campagna di Russia, mentre egli non conta ancora sei lustri d' età. Si copra di un velo quella spedizione di cui non a me ma alla Politica ed alla Storia appartiene parlare. Solo dirò del Capitano Nobili, il quale membro dello Stato Maggiore, combattè con la mano, più combattè con l'inalterabilità del suo coraggio, e più di tutto con la profondità del consiglio, chè profondità di consiglio non può contrastarsi neppure in quei Ministri dell' arte salutare, ai quali non riesce salvare una vita che o per nota disorganizzazione o per ignote cause è giunta al suo termine. E ben fu riconosciuto anco in mezzo alle sventure il suo merito da quel sommo, che il merito sapeva apprezzare e incoraggiare, e che in pegno di stima lo insignì della sempre rispettabile decorazione della Legion d' Onore.

Dopo varie militari vicende nelle quali il nostro Nobili fu costantemente inalterabile testimonio ed attore imperterrito, cambiò l' ordine delle cose, il Tempio di Giano si chiuse, ed egli prodigiosamente reduce in Patria riconcentrò di nuovo tutto il suo valore nello studio della Natura divenuto unico esclusivo soggetto di sue meditazioni, non essendo egli più

distratto da' militari doveri. Eccolo in una carriera ben più omogenea a lui, nella quale si getta con tutto quell' abbandono con cui un' anima veramente appassionata si dedica all' oggetto degli affetti suoi. Qui la vera gloria lo attendeva, qui ben più che sul campo di Marte gli era riserbato un nome italiano ed una celebrità Europea.

Egli partiva dalla massima fondamentale, che non i fenomeni, non i fatti isolati e indipendenti debbono esser lo scopo delle ricerche del filosofo, ma bensì i principj. E poichè la verità è semplice e sempre concorde con se stessa, un principio può venire stabilito egualmente da un fatto semplice e comune, come da un brillante e straordinario fenomeno. I colori di una bolla di sapone, i quali formano soggetto di trastullo per il giovanetto e di curiosità per ogni spettatore, presentano all' occhio del Newton un fatto derivato da leggi fin allora inosservate, e sul quale Egli getta i fondamenti della teoria della Luce. L' oscillar d' una lampada solleva la mente immensa di Galileo al ritrovamento delle leggi regolatrici del sistema planetario. Sì, io lo ripeto; ogni oggetto è capace di presentare al Filosofo un principio; ogni oggetto può istruirlo, e imprimere nella sua anima un nuovo sentimento d' ordine e d' armonia. Tale era la situazione di spirito del Nobili ridotto col pensiero nella periferia del suo gabinetto. Mille questioni, mille argomenti di ricerca si presentano alla sua mente: lo incanta l' aspetto della Natura e la vista dei fenomeni, ma non sempre si persuade dei modi con cui i Fisici interpretano l' una o spiegano gli altri.

E non erano decorsi neppur quattro anni dopo il suo ritorno dal teatro della guerra, che già con un ardire figlio soltanto dell' amor della Scienza, pubblica direi quasi un suo progetto, col quale mirava niente meno che a presentar la natura sotto un aspetto totalmente diverso da quello in cui era stata fin allora considerata. In questo suo pensiero, o meglio in queste sue indagini lo confermavano le intricate quistioni

e le opinioni discordi dei Fisici, specialmente in quanto ai così detti imponderabili. Tutti questi o esseri o fenomeni egli va in certo modo ammassando per istituire osservazioni assolute o comparative; in tutti ravvisa materia, in tutti rileva meccanici modi d' azione, su tutti induce un nuovo genere di spiegazione. Era ardita l' impresa, ma la stessa arditezza indicava la gran mente di lui; e se a somiglianza dei Grandi che lo precedettero Egli errò in molte sue vedute e in molti suoi concetti, io sostengo che senza nuotare così arditamente nell' Oceano immenso della Natura, non avrebbe forse conosciuti i diversi scogli nei quali ogni osservatore può rompere, e non avrebbe poi trovati quei fondi che contenevano nuove e così importanti ricchezze, le quali forse niun altri che un ardito nuotatore come egli era, non avrebbe portate alla luce del giorno.

Si riposava infatti stanco non sazio di ricerche, ma meno stanco per esaurimento di forze di spirito, di quello che per l' immensità del Caos, in cui avea creduto di poter penetrare. Si riposava, e volgeva l'occhio più pacato e più tranquillo su varj elementi di questo Caos, e prendeva intanto di mira per primo il magnetismo. Quì si dà ad esaminare la circolazione interna delle calamite, e ne determina la direzione; vede come la forza magnetica si diffonda intorno alle calamite stesse, e come due calamite esercitino azioni reciproche fra loro. Analizza e rischiara le belle scoperte elettro-dinamiche dell' Ampere, del Faraday, del Barlow, del De-la-Rive, e ne determina le leggi; e infine riduce tutte queste dottrine sotto il modesto titolo di *Quistioni sul Magnetismo*, le quali in sostanza ne contengono una vera e sana teoria.

Aveva Egli così determinata la sicura e distinta linea d' osservazione, sgombra di tutto ciò che poteva esaltare e rendere smoderato il suo desiderio di ricerca. Quindi sopra varj oggetti separati portando il suo occhio indagatore, ben vide quali punti richiedevano veramente di essere illuminati, e ben vide quale opportuna luce poteva mettersi in chiara

vista. Nè io anderò enumerandoli, tanto più che un aumento di tristezza risulterebbe dal riflettere che il destino gl'impedì di compiere molte osservazioni realmente nuove e sull'Ottica e sull' Elettricismo; e solo dirò di alcune delle più importanti scoperte che gli acquistarono una celebrità non limitata dal tempo.

Il magnetismo di rotazione, relativo all' azione che diversi metalli ruotanti esercitano sopra un ago magnetico, era stato già rilevato dall'Arago; ma l'analisi minutissima di questo fatto è dovuta al nostro Nobili, il quale forse lo aveva già osservato o prima o contemporaneamente al Fisico francese; e per quell' analisi appunto di tanta luce brillò questo nuovo ramo di Fisica.

Immensi schiarimenti da lui furono portati sugli effetti fisiologici della Pila Voltaica, dopo aver sottoposti gli organi animali a qualunque genere d' esperimento. Rilevò tutti i particolari che accompagnano l' azione di una corrente sopra gli organi stessi; vide come questa azione cambia al cambiare della direzione della corrente; come in questo medesimo cambiamento essa diviene più energica, e come si ravviva dopo che per un certo tempo ha proseguito a percorrere gli organi; e da tutti questi fatti resultava il gran canone, che la scossa dipende sempre da una repentina mutazione di stato nel sistema nervoso, sicchè essa accade tanto allorchè, includendo i nervi nella corrente, questi passano a un tratto dallo stato naturale ad uno stato elettrico, quanto allorchè, dopo essere stati lungamente in istato elettrico sotto la corrente continua, passano ad un tratto allo stato naturale per la riapertura della corrente medesima.

Con queste osservazioni tendeva il Nobili ad illustrare la scienza; ma nel tempo stesso mirava a giovare all'umanità, cercando di ritrarre un utile per essa da questo incognito agente. Con tal veduta credè di poter rilevare, che nelle malattie derivanti da poca eccitabilità, quale sarebbe la paralisi possa giovare una corrente scontinua prodotta dall'Elettricismo

sviluppato per confricazione; e che per quelle le quali derivano da troppa eccitabilità, quale sarebbe il tetano, potevano forse riuscir vantaggiose le correnti continue della pila, come capaci di deprimerne la causa. Ma nuove indagini fisiologiche, più accurate osservazioni dei fatti e delle circostanze che gli accompagnano, e secondo me, un esame comparativo con gli effetti dell' acupuntura potranno render più retti i troppo precipitati giudizj tanto degli empirici quanto degli scettici in questo proposito, e portare una luce sicura e vantaggiosa su questa importante dottrina.

Ma effetti così parlanti e così decisivi e generali resultamenti non avrebbe il Nobili giammai ottenuti senza strumenti di ricerca assai più delicati di quelli che erano fin allora conosciuti e adoperati. E dall' altra parte il suo ingegno doveva presentarci qualche cosa d'originale a pro della scienza. Persuaso egli che uno dei più indispensabili mezzi d' osservazione è un perfetto strumento di misura, e non contento del semplice moltiplicatore dello Schweigger, tanto perchè poco sensibile quanto perchè soggetto all' azione del magnetismo terrestre, imagina il suo Galvanometro a due aghi astatici paralleli, di egual dimensione, di egual forza magnetica e impiantati nello istesso filo in direzioni contrarie. Fu questo l'apparecchio per mezzo del quale egli potè svelare tanti arcani fisiologici che la natura ascondeva sotto tenacissimo velo, cui non era bastata a squarciare tutta la teoria dell' elettricismo; con questo apparecchio si presentarono all' occhio nel loro carattere e in tutta la loro efficacia le correnti idro-elettriche, le quali perseguitate con tanta insistenza dal nostro sperimentatore, furon costrette a parlar quel linguaggio al quale non aveva mai potute ridurle verun altro sistema d' osservazione. Come dunque potevano resistere alla prova di tale apparecchio gli organi anco meno dotati di sensibilità, e i corpi di natura anco più apparentemente omogenei?

Ma la comparabilità di uno strumento non è meno importante della sensibilità. Ad ottenerla con la maggior possibile

perfezione il Nobili riunisce intorno ad un solo telajo un certo numero di fili moltiplicatori egualmente sensibili; stabilisce il modo di calcolare numericamente le forze delle correnti segnate dallo strumento in gradi di cerchio, e la maniera di valutare l' eccesso delle ricche correnti nel passare a traverso del filo troppo sottile del moltiplicatore. Modifica l' apparecchio, lo rende atto agli usi diversi, e capace d' indicare in qualunque caso e in qualunque circostanza il progresso dei fatti per qualunque genere di correnti, e crea così il suo *Galvanometro comparabile;* sicchè può forse asserirsi senza ardire, che questo apparecchio non cede a verun altro nè in sensibilità, nè in comparabilità, e che non v' è forse altro apparecchio il quale riunisca in se tanto assolutamente questi due caratteri.

Si cerchi dunque, disse egli, di rilevare correnti anco più deboli, e che sfuggano ad ogni altro benchè delicato mezzo di ricerca. Conosceva le correnti termo-elettriche scoperte dal Dottor Seebeck; ma senza il suo Galvanometro ne era troppo limitato lo studio. Inoltre adoprando uno strumento più sensibile a risentire un effetto, possono bene trovarsi e studiarsi cause anco più delicate. E il nostro Fisico in fatti col suo Galvanometro rilevò che queste correnti a differenza delle correnti idro-elettriche divengono molto più deboli se debbano percorrere un circuito lungo e sottile. Quindi ritenendo in massima lo stesso sistema di costruzione per queste nuove correnti, formò il suo moltiplicatore con uno dei soliti fili di rame fasciati di seta, ma con minor numero di giri e d' un diametro maggiore. Con tal metodo egli il primo estese gli effetti termo-elettrici ai conduttori umidi; formò questi di due bastoncini d' argilla, e ne ottenne le previste correnti. A tal vista la sua mente si slancia nel magnetismo terrestre, campo già sì utilmente da lui coltivato, e con un occhio che può realmente dirsi l' occhio del genio, vede in questo fatto la spiegazione delle correnti magnetiche circum-terrestri dall' Est all'Ovest, alle quali mal si adattava una spiegazione dedotta

dal supporre la terra composta di soli metalli, mentre tanto più facile ne appariva l'interpretazione, deducendola da correnti termo-idro-elettriche.

Vedendo Egli che un tale apparecchio corrispondeva con tanta fedeltà e tanto pienamente alle sue vedute, doveva procurare di renderlo sempre più sensibile, giacchè comparabile lo aveva ridotto al sommo grado. Ottiene il suo intento moltiplicando gli elementi bismuto e antimonio dell' apparecchio del Seebeck; gli commette e gli unisce fra loro alternativamente ad angolo sempre più acuto, forma un insieme che per analogia con la Pila voltaica può chiamarsi ed è di fatto una Pila termo-elettrica, raccolta nel minor possibile spazio, e che si presenta in forma d'un cilindro, con le saldature di numero pari da una faccia, e dall' altra quelle di numero impari. E ciò non gli basta, per quanto anco sotto questa forma soltanto essa fosse capace di produrre delicatissimi resultamenti. La stabilisce in un cilindro metallico per raccogliere le minime quantità di raggi caloriferi che i corpi esterni possono raggiare sopra l'una o l'altra faccia di essa, e forma così il suo *Termo-moltiplicatore.* E perchè anco più intenso ne riesca l'effetto, insieme con l' illustre Fisico e straordinario osservatore Professor Melloni cambia una delle estremità di questo cilindro metallico in uno specchio conico rovesciato, e con tal modificazione l' apparecchio diviene sensibile all' ago del Galvanometro in un modo, direi quasi prodigioso, dacchè è capace di presentare un cambiamento di temperatura di $\frac{1}{6000}$ di grado del termometro di Reaumur. E proseguendo sempre quasi per abitudine a perseguitare una scoperta finchè quella non gli presentasse anco i meno sperati resultamenti, ridusse le sue pile termo-elettriche così delicate e così sensibili variandone in tanti modi le forme, che oltre allo sperare di poter con esse trovare i minimi fuochi delle lenti, si lusingava perfino di renderle sensibili al calor della Luna. Ma ciò non è per anco riescito neppure allo stesso Melloni, benchè col mezzo dello stesso Termo-moltiplicatore abbia poi

scoperte verità affatto nuove, relative al potere dei corpi per assorbire, per reflettere e specialmente per trasmettere il calore, delle quali cose il Nobili stesso parlava come importantissime: e l' Istituto di Londra col conferire al Melloni uno dei premj destinati per le più importanti scoperte, e l'Istituto di Parigi, di Pietroburgo e di Berlino con l' ascrivere il Melloni nel catalogo dei loro socj, attestano solennemente il merito di questo valente italiano scopritore.

Contento abbastanza il Nobili del perfezionamento di tale apparecchio, un anno dopo rivolgeva di nuovo le sue osservazioni e il suo studio sull'Elettricismo, e precisamente, come egli stesso mi diceva, andava indagando se l' elettricismo si polarizzava al pari della luce. Dopo varj esperimenti inefficaci per il fine al quale tendeva, vede a un tratto certe tracce regolari di colori diversi comparire sopra una lastra metallica immersa in una soluzione, e posta secondo le sue prime vedute nel circuito d' una corrente voltaica. A somiglianza del Newton e di Galileo non poteva sfuggire al Nobili l' importanza di un fatto apparentemente così semplice che gli si parava davanti. Ripete l'esperimento, cambia metalli, cambia soluzioni animali, minerali e vegetabili, e non solo vede sempre ripetuto l' effetto, ma lo trova sì variato, ma vede sempre sì decisi e diversi colori, che vi scorge un fatto nuovo, una nuova e impensata derivazione dell'azione della Pila del Volta. Concepisce allora il pensiero di ottenere in egual modo colori unici, distinti e isolati. Il ragionamento non poteva illuderlo dopo fatti così parlanti; e non solo ottenne quanto sperava, ma ottenne di più una serie inaspettata di colori da formare una scala graduata fino in numero di 44 varietà di tinte distintissime. Porta a Parigi la sua nuova scoperta, e ripete gli esperimenti alla presenza di quel dotto Istituto, il quale non poteva esprimere l' impressione che quella scala colorata produceva nell' animo, se non con un vocabolo analogo, dicendo che essa destava nell'occhio la vera voluttà del vedere. Si trattò in quella rispettabile adunanza di dare un nome a

quella gradazione o scala di colori, e fu detta *Scala Cromatica;* e *Metallocromia* questo totalmente nuovo ramo di Fisica.

Ombra onorata del sommo Newton, che diresti tu alla vista di questo imponente spettacolo, il quale presenta variata in parte e in parte tanto più estesa la tua bella teoria degli anelli colorati? E tu o gran Volta che diresti nel vedere questo resultamento della tua incomparabile scoperta della Pila? Quando mai avresti pensato che potesse servire a sviluppare per la via di chimiche scomposizioni un così brillante spettacolo di colori?

Nè dirò già che questa derivazione della Pila possa paragonarsi con l'applicazione più bella e più feconda di resultamenti che sia stata fatta della Pila medesima dal Sommo Davy, che riescì a scomporre con questo mezzo gli alcali, come già il Berzelius e l'Hisinger avevano in egual modo separati gli elementi degli acidi, dei sali e degli ossidi metallici. Era già noto il trasporto delle sostanze sottoposte all'azione della Pila; tuttavia la scoperta del Nobili non cessa di presentare un grado considerevole d'importanza, e perchè è pure questo un passo di più che la Chimica ha fatto, e perchè un'utile applicazione può farsi della Metallocromia alle Arti, al che già il Nobili mirava, e perchè con questo mezzo egli ha potuto scoprire, contro l'opinione generalmente adottata, che anco a traverso dei corpi si fa strada la corrente elettrica, come resulta dall'aver egli colorate uniformemente e interamente superficie metalliche introdotte come diaframmi in qualche soluzione, per la quale passava una corrente voltaica; e finalmente perchè questo passo potrà esso pure contribuire non poco ad accelerare quel momento tanto sospirato in Fisica, in cui resti incontrastabilmente provato che Luce, Elettricismo, Magnetismo e Calore non sono che modificazioni d'una sola e medesima causa diversamente operatrice.

Ma già il nome del Nobili suonava glorioso, il che serviva ad accendere sempre più il suo zelo indagatore, benchè già vivissimo. Il suo Gabinetto era divenuto sempre più ricco

in mezzi d'osservazione, che con non scarso dispendio si era procurato nei suoi viaggi, e da questo non era distratto che per qualche momento dalle cure d' ottimo figlio, di sposo affettuosissimo e di amorosissimo padre.

Ma da gran tempo vagheggiava egli il clima della Toscana e quì infatti si posò. Il Cielo che aveva coperto Galileo e gli Accademici del Cimento, lo vide e sen compiacque. Un genio celeste inspirò l' augusto moderatore Leopoldo II a favore d' uno stabilimento già centro delle Scienze, e memoria gloriosa per la Storia della Fisica, e fece sì che Egli richiamasse il Museo di Firenze a vita novella. Ma è nulla la vita ove sia condotta nell' oscurità e nella inazione: quindi bisognava richiamarlo a vita attiva e gloriosa; e ciò si ripromise il benefico Principe dal Nobili per il ramo della Fisica, nè s'ingannò. Ed ecco il nostro nuovo Concittadino destinato a sviluppare in quel venerabile santuario i grandi principj fisici di cui aveva così ripiena la mente; eccolo in grado di esercitare in un campo direi quasi senza limiti il suo spirito osservatore, di diffondere i proprj lumi, di rinnovare quell'Accademia di cui tanto Firenze si gloria, di sperimentare a piacere, e sperimentando trovare nuove verità.

E trovò di fatto una verità la quale chi sa quanto sarà per esser feconda di conseguenze. E invano è stato tentato di rapire a Firenze il merito e l' onore di tale scoperta; che la diversità dell' epoca, la differenza dei metodi e la varietà dell'effetto la vendicano luminosamente alla nostra Patria.

Il celebre Faraday, uno dei più rispettabili Chimici dell' età nostra, con lettera al Sig. Hachette a Parigi annunziava d' aver ottenuto un nuovo genere di correnti dalla calamita, *e in un caso particolare* anco la scintilla. Il nostro Fisico in compagnia dello zelante e intelligente Marchese Antinori providissimo direttore dello stesso R. Museo, in un' epoca notoriamente anteriore alla importantissima Memoria con la quale il Chimico inglese rendeva conto di tutta la sua operazione, pubblicò con tutte le particolarità il ritrovato, che per parte

loro aveva tutti i caratteri di novità, quantunque la prima idea di ricerca fosse stata a loro suggerita dall' annunzio del Faraday. Il Nobili infatti avea già trovato, ed era pur questa una nuova scoperta, l' induzione elettro-dinamica, cioè si era accorto che un filo metallico percorso da una corrente voltaica sviluppa o induce una nuova corrente in un altro filo libero parimente metallico. Lo aveva osservato nelle applicazioni alla scoperta dell' Oersted e nell' analisi del grande apparecchio dell'Ampère, che egli rese tanto più istruttivo quanto più semplice. Ragionando dunque col suo Collaboratore deduceva, che anco la calamita doveva esser capace d' indurre simili correnti in un filo metallico, e che queste correnti dovevano produrre effetti analoghi a quelli prodotti dalle correnti voltaiche; e quindi prevedeva o per dir meglio si riprometteva per convinzione la scintilla dalla calamita. E operando insieme con l'Antinori stesso, e tentando e ritentando l'ottennero infatti. E non in un solo caso particolare, come il Faraday annunziava, e non precariamente, ma sempre la *scintilla magneto-elettrica* si sviluppava nell'atto di staccar l'ancora dalla calamita, ossia nell' atto di rompere la corrente. Rese poi facile il modo di riprodurre il fenomeno ed ingrandirlo: ma ciò non gli bastò. Persuaso che cause simili debbano produrre simili effetti, e avvezzo a spinger sempre una scoperta oltre ai primi limiti che presentava, sperò, credette, fu anzi persuaso di ottenere scintille anco nell' attacco dell' ancora, ossia nell'atto di chiudere il circuito, ove riescisse a formare anco in questo genere un apparecchio moltiplicatore; e inoltre di ottenere tutti gli effetti che derivano dalle correnti voltaiche. Le speranze e le previsioni dell' uomo di genio è raro che illudano. Ingrandito l'apparecchio e reso facile il modo d' adoprarlo, dalle correnti magneto-elettriche ottenne scintilla nel distacco e nell' attacco dell' ancora, ottenne scomposizione dell' acqua, sapore acido e alcalino al palato, lampo davanti agli occhi e una scossa non sopportabile da verun essere organizzato. Per immaginarsi l'impressione

che gli scopritori dovettero provare a tal vista, basta ricordarsi di quella che provò il Franklin e che esprimeva nelle sue lettere al Professor Klingestierna, quando trasse le prime scintille dalla corda del suo Cervo volante.

Dopo tante luminose scoperte e con tanta fama di dottrina non è maraviglia, se quasi tutte le più celebri Accademie d'Europa ambirono d'ascrivere Leopoldo Nobili nel loro catalogo, come già ve lo avevano ascritto la Società Italiana dei Quaranta, e l'Istituto di Francia allorchè egli gli presentò la scoperta della Metallocromia.

E non meno delle illustri Società lo onorarono i Fisici in particolare. Uno solo io citerò fra tanti esempj, quello di uno dei più rispettabili Fisici dell'età nostra, cioè il Sig. Ampère. Associato questi nel 1833 alla illustre Accademia di Scienze Lettere e Belle Arti di Modena, scriveva lettera di ringraziamento al Segretario della medesima, e infine aggiungeva queste parole, che ad onore egualmente e dell'Ampère stesso e del Nobili io fedelmente trascrivo.

“ J' ai été on ne peut plus sensible à ce choix, qui en „ m' associant à un' Académie illustrée par tant de travaux „ utils, me donne pour collegues des savans si distingués, et „ entre autres le grand Physicien Leopoldo Nobili, que je „ m' honore de pouvoir compter au nombre des mes Amis. „

Questo era l' Uomo che l'Augusto Leopoldo II facea Toscano, eleggeva a Professor di Fisica nel suo R. Museo, e stimava con stima sincera, del che gli piacque dargli anco esterno contrassegno, decorando il merito di lui con l'insegna dell' Ordine del Merito sotto il titolo di S. Giuseppe. Il Nobili lo reciprocava con una tal gratitudine, che se potesse effigiarsi si riguarderebbe come di gratitudine parlante modello. Sì: egli sentiva profondamente per il suo nuovo Sovrano, perchè in Lui riguardava l' Autore della presente sua felice situazione relativamente alla Scienza che coltivava, e della perfetta e compiuta sua tranquillità sociale e domestica. Nè poteva sentire altrimenti, perchè dotato delle più belle virtù gli erano ingeniti i sensi d' un cuor gentile e ben fatto.

Questo era l' Uomo destinato a brillare astro novello sul cielo di Michelangelo e di Galileo; ma non fu invece che una passeggera cometa. Se non che, una cometa percorsa la sua orbita, dopo un più o meno lungo periodo ricomparisce sull' orizzonte; e il Nobili non più ricomparirà tra noi. Egli abbandonava l'orizzonte dei mortali, ma lo abbandonava con quella tranquillità che è propria del vero Filosofo. Ha però lasciate dietro di se tracce così luminose, che anco i più lontani nepoti osservando questo Cielo non potranno a meno di ripetersi l' un l' altro, quì fu, quì brillò di vivissima luce Leopoldo Nobili.

Anima cara e gloriosa accetta questa offerta dell'amico in compenso dell' ultimo vale, che egli ultimo da te ricevette. E tu Italia mia che meco dividi e stima e dolore per l'uomo che perdemmo, ravviva tu questo arido alloro con cui ho voluto intessergli corona, sicchè per l' onorata ricordanza dei prediletti tuoi figli sorga di tanto in tanto nella tua Famiglia chi ti conforti in qualche modo in mezzo alle tue tante amarezze.

CAV. ABATE ANGELO CESARIS

ELOGIO

DELL' ASTRONOMO CAVALIERE

ABATE GIOVANNI ANGELO CESARIS

SCRITTO DAL SOCIO

PROFESSORE GIUSEPPE BIANCHI

Ricevuto adì 12. Novembre 1838.

> Et, ut corporis est quaedam apta figura membrorum, cum coloris quadam suavitate; eaque dicitur pulcritudo: sic in animo opinionum judiciorumque aequabilitas et constantia, cum firmitate quadam et stabilitate virtutem subsequens, aut virtutis vim ipsam continens, pulchritudo vocatur.
>
> *Cic. lib. IV. Tuscul.*

Avvegnachè tristo e lacrimevole ufficio sempre sia quello di tributare il dovuto encomio alla memoria degli Uomini per virtù e ingegno preclari; nulladimeno egli è ufficio ancora di conforto a chi lo esercita, mentre pur sembra che il dolore, in parole disfogandosi, alcun poco si disacerbi: senza di che il cuore abbastanza riceve di nobile soddisfazione dal rivolgere il proprio commovimento ad onorare i pregi di un trapassato illustre, cui giovi additar eziandio intemerato esempio, scopo e modello d' imitazione a' superstiti e a' futuri nipoti. Per la qual cosa non poteva l' Italiana Società delle Scienze porgere a me più grato e onorevole invito, comecchè mesto e luttuoso insieme, quanto che io consegnassi nelle pagine de' suoi Volumi l' accademica prescritta laudazione delle rare doti, che fregiarono il defunto di lei membro, l'Abate Giovanni Angelo Cesaris, non ha guari Astronomo anziano e Direttore della Imperiale Specola di Brera in Milano, Direttore delle due classi del Cesareo Istituto di Scienze, Lettere ed Arti, e Cavaliere di terza classe dell' insigne Ordine Austriaco della Corona ferrea. E ben oltre le ragioni del compianto pubblico alla perdita di un Soggetto sì distinto e be-

nemerito; e quand' anche a celebrar di questo le amabili prerogative me validamente incitato non avesse l'altrui desiderio e impulso rispettabilissimo, io di spontanea elezione, anzi con fervida brama il pio incarico era per impormi, o più propriamente a me lo imponevano venerazione, gratitudine e amor di discepolo inverso chi per alcuni anni cortese mi fu di lume e consiglio negli studi giovanili, e a cui tal vincolo e sì dolcemente mi strinse che io ebbi da lui verso me a sperimentarlo, anzi che di Guida e Maestro, qual di Padre e Amico.

Nè io già temo che dall'aver quì premessa e dichiarata, per ingenuo sfogo e trasporto di animo riconoscente, la relazione intima e affettuosa, che al Cesaris mi congiunse, possa venirmene taccia e pregiudizio nell' altrui fede, presso di cui resti scemata l' estimazione per lo subjetto, giudicandosene parziale o alterata la lode nella mente preoccupata del lodatore. Perocchè, ove io non curassi pure, o, per calore di sentimenti e di fantasia, trascinato fossi ad obbliare legge e dover primo essere di chi detta un elogio il conformarsi appieno alla nuda e semplice realtà delle cose, nè convenire giammai a quella del vero mettere innanzi, nè a paro, l' amicizia di Platone, me ne avvertirebbe tosto e varrebbe sul punto stesso a correggermi il carattere schietto, leale, candidissimo del mio lodato, che, abborrente dall' ombra ben anche di finzione, o esagerazione qualunque, mi moverebbe rimprovero di non ritrarne fedelmente le sembianze. Ed oltre a ciò le opere mandate dal Cesaris a pubblica luce, quanto al sapere di lui; e il concorde testimonio de' contemporanei, che seco lui ebbero socievol frequenza e mutuo conoscimento, in riguardo alle virtù sue nobilissime, mi entreranno mallevadori che io nulla toglierò, nè sarò per aggiungere alla verità e naturale simiglianza coi lineamenti e colori dell' originale nell' immagine che mi son proposta e mi accingo ad offerirne in queste carte. Su l' appoggio pertanto di tali prove io confido poter dimostrare del Milanese Astronomo aver egli in se accoppiate le doti più belle, che rendono l'uomo scienziato degnissimo dell'

amore e della stima universale. Il che riuscendomi, come spero, sarà questa l'umil corona di pochi e modesti fiori per me tessuta e recata su la tomba di lui; chè di meglio non consente la povertà e debolezza di chi la compone, aggiungendovi però egli un sincero tributo di pie lagrime alla cara e venerata rimembranza del suo antico precettore.

Da Giovanni Antonio Cesaris e da Vittoria Remugotti, ambi di onesta e agiata condizione, ma solleciti sopramodo per l' ottimo allevamento de' figli loro, trasse primogenito i natali Giovanni Angelo il dì 30 di Ottobre dell' anno 1749 in Casale Pusterlengo, grossa borgata del territorio Lodigiano, dove per acquisti e possedimenti novelli aveva un tempo trasmigrato e stabilita erasi quella famiglia, originaria e più ragguardevole in Pizzighettone sul Cremonese. Fino dagli anni più teneri e dai primi passi nella vita convien dire che, adorno il fanciullo di leggiadro spirito, di grazie innocenti e di personale bellissimo aspetto, promettesse di se i migliori frutti nell' età matura; poichè gli amorosi di lui Genitori nutrenne speranza di sostegno e ornamento precipuo al proprio casato, affrettaronsi di collocarlo per l' educazione più colta e civile nel Collegio Patelano, che di que' giorni fioriva nella Capitale dell' Insubria, e così appellato dal suo Istitutore. Altrimente però Iddio disponeva del giovinetto, e a Se chiamandolo fuor degl' inciampi e perigli del secolo, per tal via guidavalo su la carriera, nella quale avrebbe egli anche più luminosamente adempiuti gli altrui voti e preludj, riuscendone l' onore della patria sua terra e de' parenti. Da lui quindi appresi con solido fondamento e con felice rapidità di progressi gli elementi delle umane lettere, avendone all' uopo frequentate le pubbliche Scuole, cui reggevano allora in Brera i Padri Gesuiti, sentissi egli di fatto eccitato l' animo da superna voce ad abbracciar lo stato religioso nella Compagnia di Gesù, attraendovelo pure con inclinazione reciproca il rispetto e amor suo per coloro, che istruivanlo, e la confidente affezione, che da essi gli conciliarono la sua perspicacia di

mente, la soavità dell'indole sua e l'ingenuità de' suoi modi. Di che ottenuto il rassegnato consentimento de' Genitori, non tardava egli di porre ad effetto la pia risoluzione, docile siccom' era al superiore impulso della Grazia, non meno che fermo e costante nei buoni relativi proponimenti. Giovine di non ancora tre lustri compiti, e coll'allegrezza nel cuore, che sul volto gli traspariva, egli moveva perciò al Noviziato de' Gesuiti in Chieri presso a Torino, e ve lo accompagnava un dotto professore di rettorica nel Collegio di Milano, il P. Pasquale Maria Agudio, che tosto rattemperavane al virtuoso Genitore il rammarico della separazione da sì caro figlio colle novelle più consolanti, e descrivendo le accoglienze lietissime de' Padri e de' Novizj all' Angioletto, di realtà più che di nome, cui egli aveva colà condotto. Infermava indi a non molto e moriva il padre di Giovan Angelo, il quale, abbenchè vivamente colpito dall' amara perdita, non ismarriva però nè punto mutava la presa deliberazione di vivere nel chiostro. E a cangiarnelo tornaron vuote del pari le iterate ragioni, industrie e preghiere della vedova madre, che, di lui tenerissima e sola rimasta fra le cure degli altri piccoli figli al reggimento della casa, col forte desiderio di riavvicinarsi l' amato suo primogenito sentiva continuo il bisogno di riceverne sollievo e consiglio nella domestica amministrazione. Alle quali sollecitudini e angustie non potendo cedere, da forza irresistibile trattenuto, non ommetteva il figlio tuttavia di confortarne la buona Genitrice con lettere spiranti puri sènsi di affetto e di fiducia nel divino soccorso della Provvidenza.

Ma intanto ch' egli religiosamente non pasceva il suo spirito fuor solo di cose celesti, il campo aprivasi delle scientifiche future di lui occupazioni, che pur doveano al cielo indirizzarlo coll' acume dell' occhio e dello intelletto. Come avviene talora delle umane imprese o istituzioni, che, da oscura e tenue origine, grandeggian in breve e risplendono di chiara luce a somma utilità e decoro de' paesi, ove si diffondono; così da umile cominciamento sorgeva la Specola di Milano,

che ben presto era per diventare uno de' principali Osservatorj d' Europa, e per la quale preparavasi al tempo stesso nel Cesaris una novella gloria italiana. L' astronomica scintilla, che in cotanta fiamma sarebbesi dilatata, venne da una Cometa inaspettatamente comparsa l' anno 1760, e cui s' invogliaron di seguire nell' apparente suo viaggio fra le note costellazioni e stelle due Gesuiti, lettori di Filosofia in Brera, li Padri Domenico Gerra e Pasquale Bovio. E la nobile curiosità del vero non arrestandosi mai, nè al più semplice scopo nè al risultamento primo delle investigazioni, massimamente ove l' arduo ed elevato subjetto vieppiù la conciti, e propizie arridano le circostanze per soddisfarla, di tal guisa per lo studio e zelo perseverante dei nominati due Padri formavasi in un angolo del Collegio Braidense un embrione, mi sia lecito dire, di Specola, che aveva in quelli i suoi Aristilli e Timochari, ai quali tantosto succeduti sarebbero gl' Ipparchi e Tolommei Milanesi. Oltre di fatti all' ardore e alla costanza dei due, che primi si applicarono alle osservazioni celesti, congiuntamente all' invito delle notti stellate e all' opportunità della dotta quiete propria dell' asilo religioso, non poco a sì prospero e celere avanzamento giovarono l'interesse, cui pose ad ottenerlo, il P. Pallavicini, esimio Rettore di quel Collegio, e il generoso impegno di promoverlo, che ne prese il celebre P. Boscovich, ornamento fin dal 1764 della Pavese Università, e passato dipoi ad illustrare in Milano le Scuole Palatine. Propose questi e disegnò egli medesimo l'astronomico edifizio da costruirsi; e, di ciò non pago, nel recarlo ad effetto e compimento, quale oggi ancora sussiste per la maggior parte, sovvenir volle cospicua somma de' proprj emolumenti alle spese dell' erezione, somministrandone tuttavia il Collegio quella più ampia copia di mezzi, che richiedevasi. Quindi provveduto l'Osservatorio novello di alcune macchine, abbastanza in quel tempo buone e pregevoli, confermavasi nella direzione di quello il Gesuita P. Lagrange, cui per tale ufficio, e qual Astronomo di sperimentata perizia, la religiosa Compa-

guia qualche anno innanzi fece in Brera si trasferisse dalla Specola di Marsiglia (*a*).

Aveva il Cesaris di que' giorni appunto pienamente risposto alla bienne prova del Noviziato, donde reduce, e fermata sua dimora in Milano, quivi tosto professava co' voti la regola di S. Ignazio, e poscia informandosi al grave tirocinio delle filosofiche e teologiche discipline arricchiva la mente del sapere più sustanzioso e utile, ornandola insieme col più eletto fiore di amena letteratura e di erudizione; al che fra' suoi confratelli di chiostro le migliori guide non gli mancarono. Però com' egli, appena conosciute le Matematiche speculative e applicate, ne concepì una speciale predilezione; e in se poi ne aveva la più felice attitudine per aggiustatezza d' idee e per ingegno pronto non meno che penetrante: così a tali scienze non esitò di rivolgere più particolarmente i suoi studi, e n' ebbe a maestri i lodati Boscovich e Lagrange, de' quali il secondo adoperò non indarno di prepararsi nel giovin discepolo un abile compagno e successore al suo astronomico magistero. Egli parve invero che sì liete speranze e cotai presagi di un glorioso avvenire fossero in un momento, quasi da fiero turbine investiti, dalla radice divelti e interamente distrutti. Imperciocchè dalle nequitose cospirazioni ordite nel segreto e nelle tenebre procurata finalmente nel 1773 per consultata prudenza e quasi costretta Papale autorità l'abolizione della Compagnia di Gesù, era purtroppo a temersi non il fulmine stesso, caduto a disperdere la religiosa famiglia di Brera, involgesse fra le ruine anche il recente Osservatorio e ne dissipasse coi dotti pacifici abitatori ogni vestigio e perfino la rimembranza. Ma, o fosse amica sorte, o, prevedendosi per avventura il caso malaugurato, pensato si fosse al riparo dall' eccidio estremo, certo è che un anno innanzi al provocato decreto di soppression de' Gesuiti la Specola Milanese, per

(*a*) Vegansi le Note in fine dell' Elogio.

disposizioni dell' Austriaco Governo partecipate al Rettore di Brera, posta venne sotto l' egida e gli auspicj di quella immortale Maria Teresa, che, per grandezza d' animo, eroismo di azioni e munifico favore alle scienze e alle arti accordato meritò nel suo vasto Impero, come altri disse, di dare al secolo il suo Nome. In conseguenza di che, noverata la detta Specola fra gl' Istituti e stabilimenti al giovamento rivolti e al decoro della Istruzion pubblica, erane di nuovo confermato, qual Direttore, il mentovato P. Lagrange, a cui davansi Astronomi aggiunti i Colleghi Gesuiti, Reggio e Cesaris, e tre anni appresso per allievo il celebre Abate Oriani; onde formossi una famiglia e coi susseguenti allievi una plejade, se permettasi così appellarla, di Astronomi, che sfavilla e onora l'europeo, non che il lombardo Cielo, in cui essa comparve e non cessa di risplendere. Ed è poi da quell' epoca di seconda fondazione dell'Osservatorio di Brera, innalzato a dignità di pubblico stabilimento, che le fatiche e vigilie incominciarono di Giovan Angelo nel coltivamento della scienza celeste, indefessamente da lui sostenute nel corso di anni presso a sessanta, e per le quali egli è a riputarsi uno fra i moderni Astronomi più laboriosi e intelligenti.

Serve la pratica Astronomia, e perciò l'erezione degli Osservatorj a doppio fine importantissimo: consistente il 1.° nel perfezionare di mano in mano colla raccolta serie delle migliori osservazioni le basi o gli elementi di fatto, su cui riposa la teorica, e calcolate ne derivan le tavole dei celesti movimenti: relativo il 2.° all' antivedimento e annunzio più preciso de' futuri luoghi e fenomeni de' corpi celesti per un dato punto della terrestre superficie; e l' ultimo di questi oggetti, corollario pure del primo, assai profittevole risultando per varj usi e bisogni della civile Società. Il perchè, ovunque la saggezza de' Principi e de' Governi provvide alla costruzione delle grandi Specole, e a fornirle de' mezzi e strumenti più idonei, non ommisero gli Astronomi in quelle occupati diligenza e lavoro per giovarne la Nautica, la Geogra-

fia, la Cronologia e a produrne l' incremento non meno che la generale diffusione della fisica scienza la più sublime. Nè fallirono essi il nobile intendimento, chè anzi per intero lo aggiunsero mediante la pubblicazione annua dell' effemeridi uscite dalle Specole maggiori di Londra, di Parigi, di Vienna, di Berlino; alle quali però non aveva mancato l'Italia di precedere e di darne altrui l' esempio coi celesti annunzj del Galileo, colle modenesi effemeridi del Montanari e colle bolognesi del Manfredi. Scorto il Cesaris e animato da questi riflessi non frappone indugio ad illustrar similmente il milanese Osservatorio; ed egli, solo dapprincipio e dipoi coadjuvato in piccola parte dall' altrui opera, imprende il calcolo faticoso di una compiuta effemeride, che racchiude per un anno le giornaliere posizioni del sole, della luna, de' pianeti, e ne previene con esatta indicazione le scambievoli apparenze più interessanti di congiunzioni, di opposizioni, di ecclissi; ne distribuisce con bell' ordine le quantità e ne accompagna i prospetti o le tavole con una dotta e chiara esposizione dei fondamenti e del metodo, ch' egli ha prescelti, non meno che del modo di usar le tavole stesse nelle date circostanze, o per gli oggetti da contemplarsi. Per tale impresa, che richiede invincibil pazienza e alacrità costante nello studio il più arido e nojoso, veduto quindi avresti il giovin calcolatore passar di seguito i mesi e oltre a quindici ore in ciascun giorco, com' egli talvolta mi affermò, raccolto nella sua stanza e continuamente immerso nell' accennata cura, ora dalle tavole del Mayer traendo i luoghi della luna, or il Lalande somministrandogli le vere posizioni del Sole e de' pianeti, e il Vargentin quelle de' Satelliti di Giove; non infastidito egli dalla lunghezza e ripetizione di tante numeriche operazioni, non rimosso dalla facilità e frequenza degli errori che vi commettono pure li più esperti, e tuttavia non istancandosi egli mai di verificar, di correggere e di rendere ognora più precise le sue determinazioni. Con sincerità e modestia eguale al merito premetteva egli poche righe di avviso al Volume primo dell'

effemeridi per l'anno 1775 e additavalo fra i libri che sarebbe dai più risguardato poco e respinto forse cogl' inutili; avvegnachè si affidasse che tale non sarebbe dagli Astronomi giudicato. Nè di certo mancar gli poteva il favorevole accoglimento e suffragio degli ultimi, come di fatti pienissimo l'ottenne al primo e ai susseguenti Volumi per la eccellente disposizione e perspicuità delle cose, che alla puntualità delle predizioni ognor accoppiate vi si ammirarono. Tanto che le milanesi effemeridi giustamente salirono in fama colle più accreditate opere di tal natura; onde proseguita essendone, mai finora non interrotta, la preziosa collezione, maggiormente col progresso arricchita e perfezionata, rendon esse onorevole testimonianza alla perspicacia e attività de' loro Autori, e sono in certa guisa un elogio di quella Specola. Ma su tale opera, di sessantaquattro Volumi attualmente composta, non è ad obbliare doversene al Cesaris l'origine in realtà e pressochè l'intera compilazione dei primi Volumi in numero di ventotto.

Frattanto, benchè assiduamente rivolto a soddisfare, mediante il calcolo dell' effemeridi, il secondo scopo summentovato della pratica astronomia, non perdette il Cesaris un momento di vista il primo e fondamentale di contribuire con incessanti osservazioni e ricerche al progressivo e più rapido avanzamento della Scienza. Conciossiachè le scienze naturali siano a guisa d'immenso edificio maestoso, del quale i creatori colla potenza dell' ingegno divisaron bensì la struttura in complesso e l'armonica proporzione delle parti più essenziali, restandone però nell' indefinita vastità dell' oggetto la piena confezione interminabile, se non quanto le succedentisi età e i cumulati forzi degli uomini studiosi aggiungano felici successi d' investigazioni al compimento approssimato di questa o di quella parte. Di che gli Astronomi di Brera convinti, e fra loro perciò convenutosi di fregiar l'effemeridi proprie, a imitazione dell' estere, con utile appendice di osservazioni e Memorie di scientifico argomento, il Cesaris pure, quasi dell' ufficio non gravato de' precedenti calcoli, scese animoso a

correre il novello arringo, e ne colse allori che vieppiù crebbero la riputazione di lui preclarissima. Nella copia nondimeno de' meriti, che lo distinsero, dovendo io sorpassar di volo i minori, non mi arresterò su la varietà e importanza delle moltissime osservazioni da lui eseguite, e a pubblica luce tramandate. Quindi nulla io dirò delle sue osservazioni di altezza meridiana del Sole fatte per un triennio al sestante di Canivet e per quattro consecutivi lustri al quadrante murale di Ramsden; nulla di oltre a venti fra congiunzioni e massime digressioni da lui osservate e calcolate dei due inferiori pianeti rispetto al Sole, e di presso a trenta opposizioni similmente determinate dei pianeti superiori; nulla di una moltitudine di occultamenti di pianeti e di stelle per la luna, e di stelle per alcuno de' pianeti, e de' satelliti di Giove per l'ombra di questo; come altresì dello sparimento nel 1789 dell'anello di Saturno, e dei due solari ecclissi negli anni 1787 e seguente; fenomeni da lui diligentemente contemplati e discussi; nulla delle sue indagini e misure su l'orbita del nuovo pianeta di Herschel, risguardato dapprima qual cometa, e cui egli perciò applicava l'ipotesi e il calcolo parabolico secondo il metodo Boscovichiano; e nulla infine delle sue osservazioni su la Cometa scoperta nel 1786 da Carolina Herschel. Dalla quale sola e rapida indicazione abbastanza rilevasi non esservi stata parte, nè oggetto di cielo, cui non rivolgesse il Cesaris coll'armata pupilla il pensiero e le meditazioni.

Quello però, di cui egli è a commendarsi maggiormente, e che lo assicura di un grado e titolo di gloria non manchevole presso gli estimatori della scienza, sono gli scritti, opuscoli e commentarj di astronomico argomento diverso, onde per lui si adornarono e le ricordate appendici dell'effemeridi più di frequente, e talvolta gli atti delle Accademie. Fervido egli e pieno d'amore alla sua Specola, si accinge in un primo commentario a descrivere di questa l'erezione, l'architettonica struttura e la scelta suppellettile di macchine, di che la

munificenza del Principe, e il favore dell' Imperiale Ministro, il Conte di Firmian, ebbela doviziosamente fornita. Con quella giudiziosa brevità, più bella quanto più a seguirsi malagevole, che rifugge dalle nojose minutezze senza trascurar ciò che aggiunge alla chiara e perfetta intelligenza, mostra egli adempiute nell' Osservatorio di Brera le indispensabili condizioni della solidità e del più robusto collegamento dei muri, della richiesta comodità nel ripartimento per gli usi e fini astronomici, e dell' esterna decorosa eleganza, che pur si addice al tempio d' Urania. Dipoi, da' pregi dell' edificio trascorso a quelli degli strumenti, quì è dov' egli dispiega la cognizione profonda e la sagace sperienza da se acquistate intorno alla natura e squisitezza delle macchine, su la corrispondenza delle loro parti e su gli ufficj di ciascuna, e circa il modo migliore di adoperarle. Notomizza egli di fatti, con occhio meccanico il più fino e scrutatore, l' antico quadrante murale del raggio di sei piedi di Canivet; ne ravvisa l' artificio dell' immobile sospensione al muro meridiano, il collocamento preciso, i mezzi di rettificazione; vi esamina la giusta posizione del centro, l' esattezza del piano, in cui distendesi il lembo circolare, la regolarità delle divisioni; esplora i deviamenti dalla verticale e dal meridiano, l' orizzontale giacitura e il moto del cannocchiale; considera il sistema dei contrappesi per la distruzion degli attriti, il congegno per la notturna illuminazione del campo ottico in cui discernere i fili del reticolo; e in tutti questi oggetti egli rileva gli elementi e le influenze, che alla relativa bontà contribuiscono delle osservazioni. Passa quindi a rivista le altre macchine, il sestante del mentovato artefice, il grande settore equatoriale di Sisson, lo strumento de' passaggi di Megele; sopra ognuno de' quali si trattiene con ingegnosi riflessi e avvertimenti opportuni; annovera in appresso il restante del corredo astronomico, orologj, cannocchiali, campioni di misure, atlanti; e termina preludendo al superbo murale di otto piedi di raggio, commesso poco innanzi al celebre Ramsden in Inghilterra. E che non aspettarci, egli con-

chiude, a compimento e corona de' nostri voti, dal proteggimento dell'Augusta nostra Imperatrice?

Giunse di vero, comecchè tardo all' impazienza de' suoi voti, spedito dall' inglese Fabbricatore il magnifico strumento anzidetto; e non appena fu esso collocato al posto dell'altro di Canivet, dall' austral parte più interessante del meridiano trasferito a risguardar la boreale, che tosto il Cesaris diede mano ad altro Commentario per offerirne al pubblico un' adeguata idea e descrizione. Al qual intendimento e, per servire a chiarezza, diviso il soggetto in sei paragrafi, ne svolgeva egli ciascuno con maestria e penetrazion singolare. Per lo che quasi gl' ignari medesimi di queste cose in leggendole, comprenderebbero qual fosse la struttura o composizione, e quale il modo per la sospension del quadrante; come in esso centrato e mobile il cannocchiale, sorrettovi in ogni punto da contrappesi; come nitide ed esatte le divisioni del lembo, e quanto la posizione dell' intera macchina meravigliosamente giusta ne risultasse. Tanto l'Autore dell' opuscolo vi spone con parole, concetti e ordine limpidissimi fino alle più riposte ragioni e ai più sottili accorgimenti, cui l'Artefice soddisfaceva in quel suo Capo-lavoro. Ma quanto rapito egli stesso di ammirazione fosse il Cesaris dagli esterni e intrinseci pregi del grande strumento, udiamone da lui medesimo l' ingenua protesta. *Ego quidem,* così egli, *in summam eorum admirationem saepenumero rapior, et continentes interdum horas jucundissime detineor, contemplando illos circulorum ductus prorsus geometricos, justissimas intervallorum rationes, punctorum et lineolarum infinitum prope numerum tam rotunde, tam nitide, tam aequaliter, tam recte signatum ut nihil supra dici potest.* Nè recheranno stupore, o enfatici sembreranno questi sensi, chi ben riflette che gli uscirono dopo aver egli per minuto analizzato il nuovo quadrante e variamente sperimentatolo nelle osservazioni. Ed è pur così che altri esimj osservatori nutrivano una specie di entusiasmo pei loro strumenti, siccome Oriani verso il circolo moltiplicatore di Reichenbach,

da cui ripeteva la bontà di tante sue pratiche determinazioni, e Piazzi verso quel grande circolo di Ramsden, a cui tutta commise la propria fama nella costruzione del suo Catalogo siderale, e nello scovrimento della sua Cerere. Intorno a che non va per avventura lunge dal vero il credere o figurarsi un simile compiacimento e trasporto di ammirazione per un' eccellente macchina da ciò nascere che su di essa, per mò di dire, vengono scambievolmente a consulta, e in fine pienamente concordan fra loro la mente dell'Artefice nell' immaginarla ed eseguirla, e quella dell'Astronomo nell' usarla.

Un perenne monumento, che vieppiù di Giovan Angelo attesta la perizia dell' ingegno e la pubblica benemerenza da lui riscossa, ti si offre allo sguardo, appena il piede avanzi dal limitare di quella meraviglia del milanese Tempio metropolitano a tutti nota. Io intendo dire della meridiana linea tracciata nel pavimento marmoreo, trasversalmente e di poco non parallela alla facciata del Tempio, declinandone alquanto a ponente,

Che durerà, quanto il moto, lontana;

e per la quale il Duomo di Milano fregiasi non altrimente che la bolognese Basilica di S. Petronio, o siccome quella di S. Maria del Fiore in Firenze, o non meno della Chiesa di S. Maria degli Angeli in Roma, e del pari coi nomi del Danti, del Cassini, dello Ximenes, del Bianchini, quelli vanno del Reggio e del Cesaris. Che se comune fu tra questi l' onore di tale opera, dal Governo ai medesimi comandata nel tempo che il terzo collega, Oriani, pure di superiore incarico, dottamente peregrinava in Germania, Francia e Inghilterra, non ad altri appartiene che al Cesaris l'elaborata dissertazione che ai posteri trasmette dettagliata rimembranza e spiegazione di quanto concepito e posto venne ad effetto nella costruzione della meridiana e che, in più ristrette proporzioni o in minor volume, non è per avventura men pregevole del Ximeniano libro *l' antico e il nuovo Gnomone Fiorentino*. E quì dal nostro Autore ordinata e distribuita la materia dello scritto ne'

principali punti, quali erano la scelta del luogo e l'appostamento del gnomone, la determinazione del supremo termine verticale, ossia del centro, e la direzione della corrispondente meridiana linea orizzontale, il metodo per conoscere l'altezza precisa del gnomone, la formazione e astronomica divisione della linea lunghesso il pavimento e il livellamento infine di essa linea, egli rammemora sopra ciascun punto le relative ricerche istituite; ne accenna le difficoltà, non poche ne' tenui, superate, gl' immaginati espedienti, le precauzioni delicate, le dissipate dubbiezze, e il pieno conseguito successo, destando egli sempre colle sue maniere di esprimersi, concise e leggiadre, interesse, convincimento e diletto. Bello, ad esempio, udirgli accennar le cautele nel situar e infiggere ai muri la traforata lamina, costituente il vertice del gnomone, in guisa che lo spettro solare mai non fosse tolto per l' interposizione col Sole di alcun lato o spigolo fra il bosco di aguglie e statue, che adombrano il tetto, e affinchè lo spettro medesimo internamente, nè uscir potesse ad alcuna delle porte indirizzandosi, nè mai cadesse projettato su gli ampj colonnati gotici della Chiesa. E bello pure quando egli riferisce le usate diligenze e industrie per tracciar nel suolo la direzione della meridiana mediante segnali e istanti dall'Osservatorio al Duomo visibilmente comunicati, e l' attenzion impiegatavi e il perfetto accordo nelle ripetute prove, malgrado il trovarsene gli Astronomi attorniati da una corona di Spettatori e curiosi. Egli è vero frattanto che le pubbliche meridiane, o questi strumenti di lunghissimo raggio, che oltrepassa in Milano la quantità di 73 piedi parigini, ed è altrove maggiore, vero è, io diceva, non essere più oggigiorno tali strumenti di alcun uso e vantaggio alla Scienza; da poi che l'Ottica e la Meccanica ne somministrarono altri, ne' quali molto è compensata la brevità del raggio dall' evitata influenza degli errori e difetti di que' primi; cionullameno lode pur si deve a coloro, che le grandi meridiane accuratamente stabilirono, le quali restano, e sono da risguardarsi per vestigie di scientifica storia e di

nazionale grandezza; siccome tale reputerebbesi, ove dato fosse di rinvenirlo, fra le antiche memorie egiziane, l' aureo famigerato Cerchio di Osimandìa.

Era il tempo in cui non meno che in quello del Galileo, un uomo di genio straordinario, Guglielmo Herschel, da sè consacratosi all' ottica e all' astronomia, coll' arricchir quella di telescopj e specchi potentissimi dilatava i confini visibili di questa, nuovi mondi scuopriva, e pressochè ad ogni osservazione annunziava stupendi ritrovamenti. Con uno strumento di tanta forza guardata la luna, egli ne scorgeva e riferivane apparenze di attuali vulcaniche deflagrazioni; e non erano già il poderoso mezzo da lui usato e gli enunciati lunari fenomeni una tela di ridicolose assurdità e finzioni, al par di quella, che più tardi, e indecentemente, attribuita si volle al non minore di lui Figlio; non essendo però questa riuscita che momentaneamente a illudere una leggiera popolare credulità. Erano invece fatti e osservazioni reali, che allora producevansi; ma tuttavolta il Cesaris, levatosi al grido sparso delle ignee lunari eruzioni, e fattosi a trattarne l'argomento in apposito Commentario, con saviezza e circospezion filosofica premetteva, quanto esser biasimevole il negar fede nelle ammirande cose narrate all' oculare testimonianza di un Uomo sì preclaro e ingenuo, essere pericoloso altrettanto lo accoglierne ciecamente e il sostenerne le opinioni e i giudizj. Quindi egli all' attenzion richiamava gravi e potissime le ragioni per non ammettere intorno alla luna un' atmosfera simile alla terrestre, e di gran lunga più deboli esser quelle per concederla; dal che arguiva, conforme a' vigenti principj chimici di Scheele e di Bergmann, mancar nella luna l' indispensabil alimento della combustione, il flogisto dell' aria; di modo che il fuoco e un incendio lunare, ove pur sussistesse, avrebbe natura e condizioni a noi del tutto sconosciute. Che però il generale aspetto della superficie lunare e le speciali avvertite circostanze dei lunari accidenti offerir sembrino qualche riscontro e analogia coi fenomeni delle vulcaniche eruzioni, egli

desumevalo dalle altrui non meno che dalle osservazioni sue proprie. Fra le quali ricorderemo quella in occasione dell'occultamento della stella, denominata η de' Gemelli, per la luna; conciossiachè, appena dopo l'emersione della stella che avvenne in prossimità della lunare macchia detta il *Petavio*, vedesse il Cesaris dal minor cratere di questa macchia, dal Sole illuminata, una fiammella di viva luce slanciarsi e discorrere fin presso il margine del cratere più ampio; fenomeno in parte rassomigliante a quello del candido lume, cui mirò nel 1725 il Bianchini sul margine della macchia detta il *Platone*, e che prolungavasi con rosseggiante lista a traverso dell' oscuro centro del cratere fino al margine opposto. E in riguardo alla naturale cagione più verosimile di queste e simili apparenze della luna, osservate più specialmente negli ecclissi del Sole, dichiarava egli prodotte forse tali apparenze per un giuoco di raggi riverberati, dipendentemente dalle inclinazioni delle superficie nelle cavità lunari, dalla rispettiva posizione del Sole e dal rapido moto della luna. In quella guisa, ei soggiungeva, e io amo ripeterne le adatte similitudini colle sue vivaci espressioni volgarizzandole, in quella guisa che formansi lampi e scintillamenti al mutarsi d' improvviso l'inclinazione d'illuminato cristallo, o come avviene delle facce luccicanti di polita gemma variamente ai raggi presentata, e soprattutto come in una superficie acquea, dal vento increspata, veggiam accadere alla deforme immagine del Sole, che ripercossa ne viene, trabalza irrequieta, ora languida, ora vivida, e alternamente quà e là rifolgorando e disparendo. Al quale ultimo pensiero egli venne forse dal leggere o ricordarsi que' versi di un Classico italiano,

Qual d' acqua chiara il tremolante lume
Dal Sol percossa o da notturni rai
Per gli ampli tetti va con lungo salto
A destra ed a sinistra e basso ed alto.

Ma nel recar cotali fisiche spiegazioni era poi egli guardingo quanto conviene per non proporle se non quali ipotesi e più

omeno probabili congetture, ben avvisando nulla di meglio e di più certo essere quaggiù all'uomo accordato. E così pur fosse che ingegni eziandio elevati e dottissimi talvolta non si perdessero dietro vane ombre d'illusorj sistemi, nè ostinati li difendessero, scambiando per quella della verità una ingannevole persuasione dell'amor proprio. Se non che, dopo escogitata una cagione oscura ed ignota di naturali avvenimenti, ben pochi sono coloro, che abbian col Cesaris l'umiltà di confessare a se stessi, forse niuno la sua sincerità nel confessare altrui: *haec, quae insomnis nocte cogitavi, erubui mane*.

Dagli oggetti puramente fisico-astronomici si piaceva il Cesaris di ritornar ogni tratto alle sorgenti dell'esattezza nelle pratiche indagini e misure dei moti celesti, o, è quanto dire, allo studio dei pregi e difetti delle macchine all'osservazione inservienti. Frutto di sua costante assiduità in questo genere di cure uno scovrimento si fu, modestamente da lui appellato una tenue cosa, e tuttavia di tale importanza che, dall'ignorarlo o non farne caso, forti errori e inesplicabili anomalie affetterebbero le osservazioni; laddove per opposito, dal considerarlo, utili norme e cautele se ne ritraggono per la costruzione più idonea degli osservatorj e per l'ottimo collocamento in essi delle macchine; a nulla dire delle restanti non trascurabili correzioni, che per quello nelle quantità osservate si apportano. Ad un cannocchiale così detto dei passaggi, orizzontalmente appuntato sopra un terrestre scopo, lontano questo e immobile che *mira meridiana* è denominato, egli, il primo, si accorse di un oscillamento diurno e periodico della mira stessa; intorno al qual moto, che poscia riconobbe diverso nelle varie stagioni, ora progressivo, or retrogrado, e con effetti, che in un anno si compensano e si rinnovellano, egli segnò ancora le linee, annua e diurna, del percorso cammino, le osservazioni rappresentandone, al giovine e valente Astronomo Brioschi da lui affidate. Nè di ciò pago, e, come sempre nelle scientifiche ricerche addiviene, una questione altre suscitandone, concepito il dubbio di analoghi movimenti nel

grande murale di Ramsden, egli di questo imprese la più sottile disamina, e riuscì a cangiarne in fine il suo sospetto nella fisica più fondata dimostrazione. Per lui tanto conchiudevasi dai successivi deviamenti di un filapiombo accuratamente misurati, e dai medesimi rimosse le influenze e perturbazioni estranee, dalle prolungate ispezioni di un livello a bolla sensibilissimo, dal raffrontar queste con quelli, dal determinar i moti parziali nel piano del meridiano e perpendicolarmente ad esso, e componendo entrambi nell'unico e vero moto. Alle quali determinazioni comparando poi le notazioni simultanee delle vicende atmosferiche, dalle regolari, e più spesso confermate relazioni fra le une e le altre, egli di conseguenza ne trasse l' opinione di un moto periodico e oscillatorio delle fabbriche, e argomento ne fece di due consecutive Memorie, che pregio hanno di novità. Perciocchè, oltre i nuovi fatti avvertiti, non ad altri per fermo prima di lui era caduta in pensiero l' opinione anzidetta, la quale, ove meglio ancora si raffermasse, alla spiegazione servirebbe di singolari fenomeni, come fra gli altri di quello, celebre cotanto e controverso, della reciprocazione de' pendoli, per cui si agitarono il Calignon di Peirius, il Gassendo e il Caramuele.

Ora non parrà egli forse ad ognuno verosimile pienamente che solidissimi e ben connessi edificj, quali architettati sono e torreggiano gli Osservatorj, nell' intera compagin loro, e altresì parzialmente nell' interno lato dei grossi loro muri manifestino considerabile quantità di una periodica, sì diurna che annua, oscillazione dipendente da igrometriche mutate circostanze di appoggio negl'imi fondi sotterranei, e nelle parti eccelse da investimento e percussione dei diretti raggi del Sole su l' esteriori faccie del fabbricato. E tanto più che innanzi di ricorrere ad un' azione remota, complessiva ed estrinseca su i cardini degli strumenti astronomici fissi, vuol ragione che tutte si esplorino le possibili parziali alterazioni delle macchine stesse, o, è quanto dire, le prossime e intrinseche azioni, per accertarsi non derivar da niuna di queste gli os-

servati spostamenti nella collimazione de' cannocchiali, ne' filapiombi e nei livelli. Il qual avvertimento però sfuggito non era nè anche alla perspicacia del Cesaris, che nel quadrante murale reputò doversi una ricerca instituire su la invariabilità dei perni e punti di sospensione, più accurata eziandìo di quella, ch' egli ne offeriva. Ma di que' tempi abbastanza non si rivolgevano le fisiche indagini e considerazioni al calorico variamente accumulato, ripercosso e trasmesso dai vicini corpi alle diverse parti di uno strumento; e noti ancora non erano massimamente i moti di un livello stabile prodotti dalla cagione medesima di una, comecchè lievissima, ineguaglianza di calore agli estremi della bolla. Checchè per altro ne sia di una cagion fisica, tuttora forse recondita e di oscurità involta, gli effetti ne sono fuor di questione quelli dal Cesaris riconosciuti, e a lui si deve di averne avvisata nelle osservazioni una sorgente di fallacie, cui è duopo schivare o correggere opportunamente. A sentir delle quali cose l'utilità e importanza gravissima nulla più si richiede che il riflettere, come talvolta si rivocaron in dubbio risultamenti di osservazioni e annunzj di celesti fenomeni, appena si trovò esserne le quantità fra i limiti dei probabili diurni oscillamenti delle macchine, a calcolo dapprima non sottoposti. E tale fu il caso della rimarchevole, ma dipoi smentita paralasse di alcune stelle, che il grande Astronomo di Palermo aveva pubblicamente indicata, la cognizion diffondendone in questi medesimi Volumi dell' Italiana Società.

Se non che trasvolato abbiamo alcuni soltanto de' lavori scientifici, cui diede opera il Cesaris e che alle stampe commise. Dalla copia ognora incalzati dell' argomento noi non possiam quindi se non gettar uno sguardo anche più rapido sui molti altri, che di lui parimente pubblicati ci pervennero. In ognuno de' quali, oltre i titoli di costante commendazione per ordine, precisione e chiarezza di ragionamento, motivo avrebbesi di vieppiù encomiarlo per qualche, o giudiziosa riflessione, o nuovo punto di veduta, o utile pratico suggerimento.

che egli vi dispiega. Ricorderemo adunque com'egli, a prove di fatto e con fisico raziocinio, insussistente dimostrava l'ipotesi di taluno che, accadendo la congiunzion inferiore di Venere in sul cominciar della primavera, l'aria se ne rincrudisca e retrocedane la stagione alle jemali rigidezze. Nè colle ottiche leggi confutava egli meno vittoriosamente, scrivendone lettera al Cagnoli, la strana opinione di tal altro che i raggi lunari, perchè riflessi e più deboli, al confronto di quelli del Sole, soffrir debbano a traverso dell' atmosfera terrestre un rifrangimento maggiore, sì che all' orizzonte ne appaja la luna del Sole più elittica. Rispettoso però e urbano Censore altrui, qual si addice ai modi e all' indole della buona critica per giovarne le scienze e la letteratura, non per vilipenderle, moveva egli eziandio ponderate obbiezioni al Calandrelli per l' enorme assegnata paralasse dell' arco di 9'' alla stella principale o brillante della lira. Se altre volte accingevasi egli ad illustrar le varie macchine all' Astronomo inservienti, scopo erano a' suoi scritti, ora il più forte ingrandimento degli oggetti lontani mediante gli strumenti catadiottrici, ossia i telescopj, dall' Herschel alla possibile perfezione innalzati; ora l' esatta e più regolare misura del tempo (elemento non che dall' Astronomia, inseparabile dalla Natura) mediante gli orologj dall' Harrison invariabili ridotti col principio stesso, che tenderebbe a turbarne l' uniformità (*b*); ed ora la più scrupolosa e certa collimazion orizzontale negli strumenti fissi, mediante una nuova specie di livello a filapiombo dal Ramsden ingegnosamente applicata al suo quadrante. Che se invece a soggetto di sue discussioni proponevasi gli errori e le dubbiezze delle osservazioni astronomiche, i mezzi rintracciando per correggere gli uni e impicciolir le altre, non mancava egli di recarne ottimi risultamenti e precetti; quì additando come le stelle circompolari opportunissime si prestano alla rettificazione dell' istromento de' passaggi e alle ricerche della latitudine, della rifrazione, dell'aberrazione della luce; là con trigonometrica dimostrazione le formole producendo per conoscere la

distanza e posizione del polo di uno strumento equatoriale in riguardo al vero polo celeste; ove le particolari avvertenze dichiarando che deggion aversi ad un fine determinato, come nella delicata questione e misura degli osservati diametri del Sole per inferirne qual sia di esso precisamente la figura; e in generale poi sceverando nelle osservazioni le varie sorta di errori, quali al sensibile giudizio dovuti dell' osservatore, e quali all' imperfezione inerenti delle macchine, e componendone finalmente l' error totale coll' espressioni analitiche o formole di probabilità. Malgrado tutte le quali e le altre di sopra menzionate fatiche del nostro Astronomo, egli nulladimeno richiesto di opera e di osservazioni corrispondenti dai colleghi nazionali o dagli esteri, pronto e volonteroso ne prendeva l'incarico e con ogni fervor adempivalo. Per siffatto modo al Catalogo di stelle, concepito e formato il primo in Italia dal Cagnoli, egli contribuì scelta e copiosa messe di siderali osservate posizioni; sussidio di tanto peso e valore da questa Società delle Scienze riputato, che il Cesaris per esso dalla classe degli emeriti, a cui passar doveva, in quella dal comun voto fu conservato de' membri attivi. (*)

Il chiarissimo di lui Necrologista un tratto ne delineò caratteristico e individuale, affermando che nella spartizione delle cure co' suoi compagni la più noiosa e pesante di esse quella era, ch' egli spontaneamente assumevasi. Questa, come si è detto, egli sostenne per l'annua compilazione dell'effemeridi, e questa pure con paziente alacrità sostenne diligentissimo pel corso di presso a sei lustri e fino quasi all' estremo suo giorno proseguendo il quotidiano registro meteorologico dal Reggio incominciato. E ben a lui apparteneva di raccogliere il frutto di una sì lunga serie di osservazioni, ricavandone dai prospetti delle massime, minime e medie altezze del barometro e del termometro, non che da quelli della direzion

(*) V. Mem. della Società Ital. T. X, e a pag. x. la Nota appiè di pagina.

e forza del vento e della quantità della pioggia, i fisici elementi che il clima costituiscono della Lombardia, siccome egli fece nell' interessante Memoria, cui la Società Italiana di noverar si compiacque fra le sue. Per la quale, oltre il profitto e lustro alla scienza recato, ebbero di che acquetarsi le doglianze di coloro, che, traendo argomento dalle più crude intemperie di alcuni anni, all' ipotesi e al timor si abbandonavano di un terrestre progressivo raffreddamento. Imperocchè rassicurolli il Cesaris con opposte conclusioni e con filosofico sorriso maggiormente confortolli, scrivendo. " Noi sentiamo il presente più che il passato, trasportiamo il generale al particolare, e mentre ne' nostri inverni i nostri fiumi scorrono liquidi, ci dimentichiamo che un secolo fa furono agghiacciati, e facciamo sistemi sul raffreddamento successivo del globo. „ Nè minor prova egli sostenne d'induramento e di applicazione perseverante ai più faticosi esercizj nell'occasione che, dall'Austriaco Governo comandata la formazione di una grande carta Lombarda topografica, le relative misurazioni e il generale ordinamento agli Astronomi di Brera se ne affidarono. Ben compresero questi l' importanza e arduità insieme di un lavoro di tal natura; le pratiche difficoltà ne premeditarono e i mezzi di vincerle: all'esecuzione quindi si accinsero, durante la quale avrebbe detto un' antico anche di essi, *pernoctant in nive, in montibus uri se patiuntur;* con isquisita e raddoppiata operazione una lunga base misurarono, segnandone gli estremi punti, non ha guari (*) diboscati e disepolti; le stazioni si divisero, combinati fra loro gli angoli da osservarsi; e per l' aggiunta infine di nuove Province lombarde alle antiche, ripassata per intero la primitiva rete dei triangoli, vieggiù la estesero e condotta l' ebbero a compimento. Di quì la carta, che a tutta ragione appellasi degli Astronomi, che regge in comparazione colle migliori e più accreditate di altri luoghi, e della quale,

---

(*) V. Effem. di Mil. per l' anno 1837. Appendice pag. 67.

in attestazione di valutata preziosità, il Governo Imperiale a se riserbò la diffusione, assai ristretta e non accordata che a' personaggi e alle istanze più rispettabili. Pertanto di tale Opera ebbe comune il merito e la lode co' suoi colleghi, Reggio ed Oriani, il Cesaris, che ne spôse anche in un letterario Giornale alcuni suoi cenni (*); e a lui perciò va in gran parte l'Austriaca Lombardia debitrice della propria meteorologica non meno che topografica rappresentazione.

Stante ora tutto il sin quì per noi rammentato, a taluno che movesse dimanda, se dunque Giovan Angelo abbia dritto veracemente ad un posto fra gli Astronomi più distinti, con sicuro animo risponderemmo. Dateci voi un uomo che siasi tanto e sì costantemente affaticato per la scienza celeste, quanto il Cesaris, e noi vi faremo sul medesimo l'interrogazione, che ci avete diretta. Però a pronunziar giustamente riflettete innanzi che, oltre l'umana limitazione e la conseguente impossibilità di moltiplicar con se stesso gli studi e il tempo, non è poi, chi ben discerne, meno stimabile in se e altrui profittevole, di una celebrità che risuoni per istrepitosi, ma eziandio rari, discuoprimenti, un modesto merito, che accompagni una lunga carriera, un'attività indefessa e una chiara mente ragionatrice. Le quali ultime proprietà e condizioni riscontrandosi appunto nel milanese Astronomo, ne compendiano perciò l'encomio, siccome la vita ne nobilitarono. E neppure si vorrà dargli taccia e rimprovero di non aver egli coltivata dell'Astronomia la parte più dignitosa e sublime, qual è la Fisica o Meccanica celeste analiticamente considerata, e tanto dai Geometri, al Newton successori, promossa. Quando ciò fosse colpa, in se derivata l'avrebbe allievo egli e formato alla scuola del Boscovich, il cui sagacissimo ingegno, esclusivamente nudrito dall'evidenza e dal rigore della sintesi antica, piegarsi mai non seppe o non volle alla rapidità e potenza

(*) Memorie di Religione, morale e letteratura. T. V. pag. 530.

dell'analisi moderna. Egli è inoltre mestieri osservare che, nella distribuzione degli uffici astronomici, scelta per se avendo il Cesaris la parte pratica più gravosa, dalla quale il disbrigarsi per dar opera profondamente alla teorica non è tanto agevole, come da questa il rivolgersi a quella; egli dall' altra parte si astenne, fors' anche per un delicato riguardo, e di certo poi consapevole quanto in essa il solo collega Oriani sostenuto avrebbe l' onore del milanese Osservatorio e dell' Italia.

A illustre fama scientifica mancar non suole comunemente, ultima sua prova e quasi ombra di sbattimento all'opposto lume, l' ignobil ira di una critica sconsigliata; nè al Cesaris pure mancò questa, comecchè umana deplorabil corona. Troppo è nota di vero la controversia, che acerrima un tempo si agitò ed arse intorno ad un volume delle milanesi effemeridi, per la quale trovossi divisa dapprincipio, non che l' opinione dei dotti, la protezione altresì di alti Ministri, e a cui non fu straniera, cooperando anzi al trionfo della verità, la modenese letteratura. Che se nella parte, a provocare la prima e colla peggio rimasta, un caso ebbe a commiserarsi di comune frallezza, cui non oppone schermo valevole neppure il meritato grido e nome di Geometra, dubbiosa non fu per l'altra parte la duplice vittoria, che le ottennero ineluttabil forza di addotte ragioni e decorosa temperanza di modi nelle difese adoperati. E così appunto sentenziava in ultimo appello a favore degli Astronomi di Brera il tribunale e giudice più competente, dal Governo incaricatone, Gregorio Fontana, che accusar certamente non potevasi di parzialità verso quello dei due campi, nel quale due allora ex Gesuiti combattevano, ed era il Cesaris uno di essi. Ben è a dolere che da cieche passioni sieno talvolta suscitate fra li dotti uomini simili guerre, donde la scienza nulla ritrae di vantaggio e di onore, derivandone anzi non di rado conseguenze le più biasimevoli e perniciose. Per tal modo infatti avveniva che il più gagliardo e glorioso de' vincitori, com' era stato del pari preso maggiormente di mira, Oriani, divenuto perciò bersaglio a nuovi colpi,

ne fu al segno amareggiato che già in procinto stavane di abbandonar patria e Specola; onde sì l' una che l' altra di queste a lamentar sempre ne avrebbe la perdita, sul fior delle speranze, di un vanto e ornamento suo preclarissimo, se trattenuto quegli non si fosse a preghi e consigli altrui autorevoli (*c*). Non toglie tuttavia il precedente riflesso che, fuor di giustizia e pubblicamente impugnati, gli Astronomi di buon diritto ne rivendicassero colla propria la riputazion offesa dell' Osservatorio, sì che avendolo essi fatto entro i limiti di bella moderazione, il voto perciò e l' encomio dei saggi ne riportassero. Il perchè su questo particolare non ben istrutto, e quindi non equo si appalesò l' egregio Scrittore delle vite degl' Italiani per dottrina eccellenti, nell' incolpar egli di essere stati gli Astronomi alla disfida i provocatori; mentre per opposito le Frisiane postille all' effemeridi dall'Autor loro e non da quelli si divulgarono (*d*). Altra censura dipoi toccò al Cesaris di soffrire per la ricordata sua Memoria sul clima della Lombardia: ma nulla questa volta egli rispose; o sia che non amasse di turbare la tranquillità degli ultimi suoi anni; o indicar volesse, tacendo, venir a lui l' aggressione da chì meno temerla e attendere la doveva; o urbano egli e gentile, di romper lancia disdegnasse con chì nelle sue maniere sì poco era di gentilezza curante e di urbanità. Nè s' ingannò egli punto; chè di tutte risposte la migliore è il silenzio in certi casi e con certi avversarj, de' quali sarebbe a ripetere che *videantur ita demum se victores in causa futuros, si in maledicendo fuissent.*

Se pertanto al nostro Soggetto negar non si può lode e merito singolare di Astronomo, forza è altrettanto questo e quella concedergli di scrittore colto, elegante, animato. Nudrito da' più verdi suoi anni e incessantemente allo studio de' Classici, egli appreso ne aveva limpidezza e vigore di concetti, dignità e correzione di stile, gusto e proprietà di elocuzione, de' quali pregi adornar seppe le sue Memorie altresì di scientifico argomento; quelle in ispecie, e furono la maggior

parte, ch' egli dettava con purissima latinità. E di argomento letterario da lui trattato ricorderemo gli elogi storici, ond'egli ad onorar prese le virtù e l' ingegno di due suoi religiosi Confratelli, il Collega suo Francesco Reggio e il Preposto Anton Luigi De Carli. Intorno al primo de' quali elogi, scritto latinamente, ci basterà il dire averne fatto confidenziali congratulazioni all'Autore, per nobiltà di sentimenti non meno che per eccellenza di favella, ottimo apprezzatore, il Draghetti, che l' amico esortavane ad offerir altre simili sue produzioni; e in riguardo al secondo, cui l'Autore tesseva italianamente, il giudizio pure bastandoci di altro distinto letterato il Baraldi, che quello disse aureo e affettuoso lavoro (*). Ma senza un cenno particolare non trapasseremo i discorsi da lui, Direttore di ambe le sezioni di Scienze e arti dell' I. italico Istituto, composti, e recitati per le solenni biennali distribuzioni de' premj alle manifatture e opere d'industria del Regno Lombardo. Qual convenivasi a sì benaugurata circostanza egli un tema si prefisse di utili considerazioni, e in cinque discorsi, che tanti furono, completamente lo svolse. Imperocchè alla realtà delle cose avvisando, stabiliva egli per triplice causa o condizione, a favoreggiar atta la prosperità dell' agricoltura e dell' arti nell'Austriaca Lombardia, la copia e qualità primamente della produzione del suolo, indi il commerciale movimento e la meccanica industria senza di che la dovizia de' naturali prodotti ristagnerebbe, e il coltivamento infine delle Scienze, che i mezzi additano di aumentar ognora la produzione del suolo e di perfezionare le arti. Limitatosi nel primo ragionamento alle due condizioni prime, ivi egli da una parte con rapido pennello e maestrevolmente un fedel quadro ti colora e lumeggia, in cui scorgi la felice topografica esposizione e la ubertà dei terreni per gl' indigeni ricolti di erbe, di legumi, di sete, di vini e di frutte; il corso e la diramazione

(*) V. Mem. di Relig. Mor. e Letterat. T. III. pag. 522.

delle acque di laghi e fiumi per infinità di canali a doppio uso di navigazione e d' inaffiamento; le miniere del ferro; le cave del granito, detto *migliarolo*, in durezza emulo all'orientale; e le altre cave della *Gandolia*, onde trasferito, un monte di marmo cangiossi, tutto dallo scalpello a fregi configurato, nel Duomo di Milano. E per l' altra parte allo sguardo egli ti spiega del pari l'incremento e la floridezza dell'Agricoltura, dell' arti, del commercio, il suo assunto confortandone coll'evidente attestazione de' fatti, col sicuro indizio, secondo Plinio ed Ausonio, del cittadino lusso (fin che onesto e ragionevole) nei pubblici festeggiamenti, nei templi, nei palagi, ne' giardini e ne' teatri, e colla dimostrazione pur manifesta delle grandi Opere di nuove strade fra gli stessi dirupi alpestri comodissime, di edificj a idraulica relativi, e di magnifici ponti: condannati però da ultimo l' intemperante lusso e il contrabbando. Ad esaurir quindi nel secondo suo discorso la trattazione propostasi, egli ti rammenta, immortali glorie dell' Insubria, le poetiche nei nomi di Virgilio, di Catullo, di Fracastoro, di Tasso, di Parini; le filosofiche e letterarie in quelli dei Plinii, di del Maino, di Alciati, di Maffei, di Vida, di Castiglione, di Settala, di Beccaria (*e*), dei Verri, di Tiraboschi, di Giovio, di Morcelli; e le matematiche in quelli di Cardano, di Cavalieri, di Castelli, e dell'Agnesi: nè ommettendo l' altra e più forte prova de' pubblici stabilimenti alla molteplice istruzione consacrati, egli altresì ti rammemora e le Palatine, poscia Canobiane, e le scuole Arcimbolde, e l'Ambrosiana Biblioteca, e i Collegj Borromeo e Ghiselieri, e l'Accademia o Società Palatina illustrata dal dotto Argelati e dal Muratori dottissimo; e fra le fondazioni moderne la Biblioteca, l' Istituto, la Pinacoteca, il Museo Numismatico, l' Orto botanico, e l'Osservatorio, che di Brera il Palazzo delle Scienze costituiscono. Che poi le Scienze, come alla sociale, così alla felicità individuale degli uomini efficacemente concorrano, l'Autore nel terzo discorso te ne persuade a un punto e alletta; o nella sublime contemplazione dello spettacolo celeste

lo studio ti accenni che la curiosità del vero, l'innato e più nobile degli umani bisogni rende soddisfatto, che all'animo dona calma e obblìo dal terreno tumulto d'indomite passioni e di cure irrequiete, che il cuore e la mente infiamma di religiose idee, ove non siane spenta la scintilla da mortal gelo di un cinico indifferentismo; o degli altri naturali studi egli a riconoscere ti scorga l'amenità esteriore, non che l'ordine meraviglioso e la recondita economia di leggi, cui giungon quelli a discoprire; o al Pantheon invitandoti della Sapienza, in una Biblioteca, di tutte le scientifiche discipline ivi adunate le principali ti noveri e brevemente di ognuna ti discorra l'oggetto e il magistero. Tocca il Cesaris nel quarto discorso, quasi a decorarne il soggetto de' precedenti, su l'origine e i progressi delle scienze e dell'arti; ma vertendo egli per la circostanza maggiormente intorno alle seconde, rapir ti senti alla più gradevole ammirazione quando, caldo egli il pensiero e la penna, dall'antico ardimento delle Piramidi egiziane di volo scende a ricordar quello di moderne moli maestose, e, così a titolo d'onore come ad eccitamento de' nazionali artisti, volge passando uno sguardo all'obelisco d'Eliopoli sul Tevere dall'insubre Fontana innalzato; al simulacro del Genio Moscovita, che il Greco-Veneto Carburi locò su la Neva; indi alle superbe colonne granitiche tratte dalle rive del Verbano all'uopo di rinnovarne l'incendiato arco di Placidia; e a quell'arco marmoreo finalmente, Opera di Romana grandezza, che sorge in Milano, e cui testè alla Pace, nel cingersi il longobardico Diadema la Maestà di Ferdinando I. inaugurava. Poche parole da ultimo di esortazion e d'incoraggiamento agli artisti soggiungeva l'Autore nel quinto de' suoi discorsi, conchiudendo a mostrar loro quanto la morigeratezza e l'assidua occupazione dei cultori dell'arti procurin ad essi, alle famiglie, all'intera Nazione uno stato di contento e tranquillità invidiabile. Del che recando egli ad esempio la rustica felicità nella vita de' laboriosi coloni e delle affaccendate villanelle, così adornavane di leggiadre immagini e grazie la

maturità de' suoi detti e consigli che acceso ne rassembrava di vivace brio giovanile; avvegnachè oltre varcato egli avesse il sedicesimo lustro dell' età.

Negli studi ancora di erudizione varia e di critica si appalesò il Cesaris versato; e raccoglierne poteva distinte palme, siccome ne fa fede la postuma interessante di lui Memoria su l' antichità delle storie egiziane. Perocchè in tale scritto, sebben egli lealmente avvertiva di prendere a scorta il valente archeologo San Martino per conciliare in un discorde passo Erodoto, Manetone, Diodoro, e a confutarne la vantata sussistenza dell' egizio popolo da parecchie migliaja d'anni, tuttavia egli vi aggiunse altresì le proprie giustissime riflessioni. E soprattutto con astronomiche prove irrefragabili egli dimostrò assurdo e impossibile quanto, a Erodoto narrato, da lui *bonamente* creduto venne e riferito nella sua Storia; che l' ecclittica cioè nei tempi anteriori era stata coll' equatore perpendicolarmente disposta, e che due volte in Egitto veduto erasi il Sole tramontare all' Orto e nascere dall' Occaso dell' epoche recenti. Fenomeni prodigiosi, che da se cadono assolutamente; de' quali nondimeno il secondo reggerebbe a buon senso e fors' anche alla storica verità degli annali egiziani conformerebbesi, mediante la plausibile congettura dall' Autor nostro promossa, che per l'accaduto invertimento dei luoghi del Sole all' orizzonte intendere si debba l' opposta situazione successiva delle stagioni, quale di fatto e in un breve giro di secoli risultava dalla trascurata frazione dell' anno tropico presso l' egiziana cronologia: congettura che ugualmente disparir fece la remotissima vetustà dello Zodiaco di Dendera; onde tanto rumor si levò, non ha molto, per l'Europa erudita. Si arroge ancora che familiare il Cesaris all' elegante purezza e maestà della lingua di Cicerone, usò di questa non rare volte a esercizio di epigrafia, e ne dettò iscrizioni di Nepotiano gusto e semplicità. Nè schivo egli o straniero agli ameni recessi di casta Musa, vi pose anzi piede a suo diporto, e ne colse alcun fiore di Tibulliana fragranza; nel che però gio-

vandosi egli con miglior successo de' latini modi e accenti, ebbe anche in ciò a seguir l'orme del suo Maestro il Boscovich. E di tale sua vena poetica dava estremo saggio con pochi, ma tenerissimi versi, che, infermo egli e a morte presso, ad un suo nipotino intitolava; quasi nel dipartirsi da questa vita una vecchiezza incontaminata la mano placidamente stringesse all' innocenza giovanile. Che anzi conviene appunto si congiungano siffatti estremi, ove una lunga mortale carriera tutta sia di virtù e di nobili azioni sublimata, come quella si fu di Giovan Angelo.

Più del percorso, ampio mi si aprirebbe ora il campo, e più degno l'encomio ne verserebbe, quanto d'intrinseco pregio la virtù avanza il sapere. A non soverchiare però di molto la conveniente brevità, io non farò se non delibar la materia e additarne il Cesaris insigne e virtuosissimo, posto il principio, radice e continuo alimento essere alla virtù l'amor del vero bene. Se l'amor quindi si ricerchi, onde Natura ci ragiona col sangue, niuno più del Cesaris a' suoi parenti affezionato; docile figlio, fratello cordiale, zio sollecito di opra e di affetto all' ottimo riuscimento di ognuno de' suoi numerosi nipoti, tra' quali ben gli risposero que' due gentili ed egregi (*), cui divise testando l'accresciuta sua parte di censo paterno, ad entrambi trasmessa indivisa una migliore dovizia, l'onore e l'illibatezza del nome. Ove alla carità del natìo loco si rimiri, egli pure ne fu, quant' altri, penetrato; e ogni anno, col desiderio almeno, a rivedere il suo Casale Pusterlengo si trasferiva; e di scelti arredi sacri quella Chiesa parrocchiale donava; e per una Cappella di essa gli ornati marmi di propria spesa commetteva; e a' suoi borghigiani largo era sempre di oneste accoglienze e di favore. In Milano avendo egli nondimeno per la costante dimora più che una seconda patria,

(*) L' Illustrissimo Sig. Giovanni Cesaris, I. R. Consigliere del Tribunal Supremo di Milano, e il Sig. Francesco Cesaris di lui minore fratello, che gode la stima e l'amore di tutto il suo paese di Casale.

sanno di questa i cittadini, com' egli ne fosse di amor trasportato, godendo o rattristandosi con essa, per lustro celebrandola, e in molti oggetti non inferiore ad altre accennandola egli stesso allo straniero, non curante o invidioso, unica o superiore in alcuni. E se la dilezione si consideri, che degli uomini una sola famiglia costituisce per vincolo di comune origine e somiglianza, fervido egli n' ebbe e generoso il cuore, come pronta l' opera ed efficace a sollievo degli altrui mali; onde in ispecie la squallida indigenza a lui non si volse ch' egli pietoso e abbondevolmente non la sovvenisse (*f*). Vuolsi amore di gratitudine? Sul minor limitare del Palazzo di Brera entrando, eccone a destra una chiara prova nel monumento fatto erigere dal Cesaris e da' suoi colleghi alla memoria del celebre loro antecessore, il Geometra di Ragusi. Bramasi amor di giustizia, d' integrità d'animo, di sincerità, di modestia ? Traspira esso negli editi scritti letterarj del Cesaris ; e ognuno poi che questi conobbe s'accorderà nel dire quello essere stato il moral carattere che lo distingueva. O l'amore infine domandasi all' adempimento de' pubblici offici, e lo zelo per lo splendore dello Stabilimento a sè affidato non che pei vantaggi più estesi della scienza ? Nel Cesaris pure un modello se ne ravvisa ; e basti avvertir in particolare che per lui è superba la Specola milanese de' suoi due maggiori strumenti, il quadrante murale e il circolo meridiano, de' quali il secondo alla verbale ossequiosa inchiesta di lui la munificenza del glorioso Francesco I benignamente concedeva (*g*). Nè del pari egli ristette di avvivar anche in altri l' amore dell' Astronomia, come attestar possono gli Osservatorj di Napoli, di Firenze, di Padova, di Torino, e il mio specialmente cui egli giovò assai di raccomandazioni e di consigli. Qual meraviglia perciò che infiammato egli di tanto amore del vero e del bene le proprie azioni costantemente a virtù conformasse ?

E tanto meno è da meravigliarne quanto egli ebbe di mira sempre nel suo amore il solo e vero Bene Infinito; senza di che la virtù o è un' ombra e un' apparenza, o debile mal

reggerebbe alla seduzione e all' impeto degli umani affetti contrarj. Conciossiachè per quantunque coll' occhio e col pensiero egli ogni tratto rivolto fosse alle celesti cose sensibili, tuttavia nella sentenza di Socrate conveniva, sì che " *coelestia autem vel procul esse a nostra cognitione censeret, vel, si maxime cognita essent, nihil tamen ad bene vivendum conferre.* ,, O più presto col nostro sommo Alighieri si dilettava egli di ripetere:

Io veggio ben che giammai non si sazia
Nostro intelletto, se il Ver non lo illustra
Di fuor dal qual nessun vero si spazia.

Fedele quindi il Cesaris alle illustrazioni superne di tal Vero, e pieno lo spirito e il petto dell' ottima filosofia, punto non cangiò egli mai nè di principj, nè di pratiche religiose, fra le mutate vicende eziandio di tempi deplorabili; onde a fronte degli Astronomi di Brera, che soprattutto gloriavansi apertamente dello stato e delle vesti Sacerdotali, si vide arrossire talvolta una sciagurata e vile apostasia. Quindi pure alla Società religiosa, che lo arruolò giovinetto, non cessò egli mai virtualmente, come solo poteva, di appartenere; abolita la pianse, dispersa ne' suoi membri si affrettò con ogni suo mezzo di soccorrerla, risorta ne giubilò, e volato sarebbe a terminar in essa i suoi giorni, tutto abbandonando, come ne scrisse al suo Generale, se alte autorità e ragioni altrimente di lui deciso non avessero. Ben istrutto poi egli, e sostenitore delle più sane dottrine cattoliche, l' error abborriva, in un la proterva cecità commiserandone de' seguaci; e avvegnachè per la prepotente influenza di una riprovata Scuola vicina la voce non levasse, a que' generosi però applaudiva, che, siccome il Baraldi, campioni insorsero contro il mal seme, di cui non sol Borgofontana, ma d' Italia

Ne brulica e ne pute anco il terreno.

Incombeva egli ancora con sollecitudine al sacro ministero, e l'evangelica sua carità di sovente spontanee cure gliene offeriva; mentre nell'ampio recinto di Brera e colle varie famiglie,

che vi dimorano, si faceva egli tutto di tutti, componendo animi discordi, prodigalizzando sussidj a' bisognosi, visitando gli egri, e persin i moribondi negli estremi aneliti di sante parole confortando, tra' quali egli accorse, e chiudersi mirò le terrene luci al sublime Cantor del mattino: il perchè fra quelle mura veniva egli risguardato ed accolto, qual Angelo consolatore. Oltre a ciò delicata egli ebbe, e appunto angelica, la coscienza di guisa che lui a conforto spirituale parecchi anni si tennero alcune pie Monache in una parte unite del chiuso Convento di S. Agostino ai tre Monasteri, presso le quali egli a celebrar quotidianamente la S. Messa nelle prime ore mattutine di ogni stagione recavasi. Ed oh l' edificante obbietto, a meditarsi degnissimo, che io medesimo avventurato fui di ammirare! Un illustre personaggio, dimessamente vestito, con lume in mano saliva tacito e solo nell' alto silenzio della notte su la Specola, ove in disparte io lo scorgeva, e presso una macchina coll' armata pupilla sollevava la mente a quelle prodigiose opere di Scienza, cui accenna e spiega l'una all'altra notte. Appena dipoi uscito il Sole in Oriente mi scontrava io di nuovo col personaggio stesso, che, in lungo e nero vestimento, da nulla distratto e tutto compreso dei tremendi misteri di Religione, gravemente incedeva per maneggiar fra poco ad un accento da sè pronunziato, palese a Fede quanto più a' sensi nascosto, il Creatore e l' eterno Geometra de' Cieli; e che, il gran Sagrificio compiuto, si rinchiudeva nel domestico suo gabinetto a librar col calcolo i mondi, fra cui avea la notte spaziato. Era Oriani quell' Astronomo, e non diversamente del Cesaris accadeva.

Questi due uomini esimj, al temperamento, all' ingegno, all' aspetto e al costume delle maniere differentissimi, furono strettamente fra loro congiunti colla più rara e invariabile amicizia; la virtù in simil caso facendosi, per converso, alimento e radice dell'amore. Focoso l'Oriani e irritabile; tranquillo e mite il Cesaris; quegli d'acuto intendimento, vieppiù sviluppato nelle ardue profonde astrazioni dell'analisi; dotato

questi di mente limpida bensì, ma inclinata maggiormente al piano, al concreto e al dilettevole delle questioni; concentrato in sè il primo, di sopracciglio severo, di brevi parole ne' socievoli trattenimenti e selvatico di modi; aperto e sempre ilare il secondo, facile di sorriso e vivace non men che urbanissimo nel conversare con chi si fosse; detto sarebbesi questi due uomini esser costituiti per urtarsi e respingersi, ove insiem convivessero. Annidava però in entrambi rettitudine, carità, religione, insomma la Virtù vera; e quindi per oltre il mezzo secolo del comune loro convitto così furono essi vincolati di fiducia, di benevolenza e di dolce intimità scambievolmente, che ne' primi trent' anni comprendendovi, terzo fra cotanto senno, il Reggio, nell'elogio di questo si protestava il Cesaris li sei lustri anzidetti essere fra loro trascorsi *amicissime, sine contentione, sine ira, sine invidia.* Rispettava il Cesaris nell' Oriani, venuto alla Specola dopo di lui, la superiorità dell'intelligenza, e ingenuamente pure la proclamava, di lui, Astronomo appena, scrivendo, *qui qualis futurus esset statim apparuit;* ma con bellissimo cambio rispettava l'Oriani del pari nel Cesaris, l'anzianità; e sorsando essi ogni giorno insieme il caffè dopo la mensa, l'acre carattere dell' uno si moderava, e, a così dire, fondevasi nell' indole dell' altro soavissima. Tanto crebbe l' affetto loro vicendevole che, ito Barnaba negli ultimi anni a salutare ancora una volta il cielo di Galileo, e colà non avendo ricevuto novelle di Giovan Angelo, che, nel dipartirsi a malincuore, lasciato aveva di salute non pericolosamente inferma, nel dubbio, nel timor, nell' angoscia di tale silenzio fece subito ritorno in Lombardia; senza che valessero un momento a ritardarlo, nè il toscano soggiorno delizioso, nè l' altrui desiderio ch' egli alquanto nel viaggio si soffermasse, fin che non giunse in luogo, dove inteso con sicurezza lo stato non peggiore del caro amico, egli a calma si ricompose. Se non che indi a poco ci parve per avventura una sì rara coppia di amicizia non dovesse unqua disgiungersi; di guisa che l'Astronomo

di Casale al tramonto della terrena vita già declinato, di seguirlo si affrettasse l'Astronomo di Garegnano, e cessasse quasi a un punto di risplenderne questa gemina stella del cielo Milanese (*h*).

Benchè robusto di complessione, nell'avanzar dell'età e per le tante fatiche sostenute contrasse il Cesaris una forte affezione di asma, da cui assalito fieramente ne' senili anni, a terra ne fu talvolta stramazzato semi-esanime, e a cui su l'ultimo si aggiunse altro morbo, che atroci dolori cagionavagli, ed era infiammazione alla vescica. Dall'acerbità e violenza di questi mali, ch'egli sempre con cristiana pazienza e serenità d'animo imperturbabile sopportò, agli estremi fu ridotto un anno circa innanzi ch'egli vi succombesse, e, scampatone allora presso che a prodigio, di modo se ne riebbe che uscir poteva la mattina per celebrare la messa nella piccola vicina Chiesa di S. Eusebio; comecchè ottenesse poscia facoltà, e se ne giovasse, di celebrarla con apposito altare nelle sue stanze. Ma, brevi ahi! troppo svanirono le speranze di conservare una vita sì preziosa; chè dalla tregua ripigliato furore, acquetato prima e non vinto, il crudel morbo, e suscitata pure con esso una minaccia di flogosi al petto, l'infermo di nuovo se ne aggravò, e, munito di tutti i conforti della Religione, la mattina dei 18 Aprile dell'anno 1832, fra le braccia dei due desolati Nipoti, che di ogni amorosa cura mai non gli mancarono, rese a Dio placidamente il suo spirito. All'annunzio della qual morte, avvegnachè innanzi al Signore la più avventurosa, se, come ne' parenti del Defunto, così una mestizia si diffondesse negli estimatori del suo merito e di sue virtudi, nei moltissimi da lui beneficati e nell'intera Città, io non mi tratterrò a descriverlo; e solo a formarne criterio il portarsi ricorderò che personalmente faceva il Cardinale Arcivescovo di Milano alla dimora di Giovan Angelo moribondo, e il vero suo contristarsene alle novelle di peggioramento; non men afflitta di questa perdita essendosi pure addimostrata l'Imperiale Altezza dell'Arciduca Ranieri Vicerè, da cui udissi

che uomini, siccome il Cesaris, per comun bene a bramar sarebbe quaggiù si perpetuassero. E intanto fra le sacre funebri liturgie la fredda spoglia dell' estinto dalla Chiesa parrocchiale di S. Marco al pubblico Cimitero fuor di Porta Comasina si convogliava, e accompagnandone lagrimosi il feretro alcuni membri dell' Istituto di Scienze, gli addetti alla Specola e una parte dell' accorso popolo, era fra tutti un ragionar flebile e sommesso, qual di generale sventura. Coll'accento del cuore proferiva dipoi su la tomba del Collega rapido encomio chi più n' era degno, il Cavaliere Carlini, a cui rispondeva di certo, solitario nella sua stanza e inconsolabile, l'Oriani. Da quello di morte, il decimo giorno spuntato, con decorosi funerali nella mentovata Chiesa di S. Marco (*i*) in Milano l' eterna pace pregavasi alla bell'Anima, così disponendo la pietà e il dolore de' Nipoti eredi, che, non paghi, altri suffragi e solenni esequie tributavano all' amato loro Zio nella Parrocchiale di Casalpusterlengo, li cui Fabbricieri eziandio il mesto rito fecero si rinnovasse in memoria e ad argomento di gratitudine verso l'insigne benefattore di quella Chiesa.

Tale fu l'Astronomo Abate Cesaris, che io mi sono studiato, non senza una lagrima, di fedelmente ritrarre in queste linee. Alto egli e proporzionato della persona, di carnagione bianco e di naturali rose colorito sempre le guance, di fronte spaziosa, di nera pupilla e di sguardo vivace a un tempo, ingenuo e modesto, era a vedersi la stessa amabilità; sì che raccogliendo i pregi dell' animo che di lui abbiam ricordati, egli appieno di sè avverava il tipo della fisico-morale bellezza, da Tullio definita, e che ponemmo perciò a epigrafe di questo scritto. Quindi anche ne resta, mi sembra, per intero dimostrato quanto io mi proposi dapprima, e val a dire avere il Cesaris tutte in sè accoppiate le doti egregie, che rendono l' Uom di scienze universalmente di stima degno e di amore. Nè, lui vivente, le attestazioni furongli negate di tai sensi; chè anzi egli luminose le conseguiva in ogni epoca,

ma specialmente dal favore, di cui lo degnarono l'Augusto Monarca e i Principi dell'Imperiale Austriaca Dinastia, a' quali egli serbò in cuore l'antica fede e un' inviolabile devozione. Lui del pari, e mi gode il saperlo, di singolare benignità onorarono i Reali Eccelsi Figli della magnanima Estense Beatrice, che Lui sovente ravvisando giovinetti, si allegrarono di ravvisarlo a sè stesso eguale dopo le procelle dei tempi. Lui con venerazione risguardavano e di accoglierlo, trattenerlo e colmarlo di gentilezze ospitali si festeggiavano le persone e famiglie più cospicue della Milanese Nobiltà (*k*). Lui prontamente a sè aggregando, illustravansi li due primarj Corpi scientifici d' Italia, dal suo nascere e stabilirsi questa Società dei quaranta, e dal suo rifiorire il bolognese, poscia italico, Istituto; per tacere delle minori Accademie, che l' acclamarono fra' loro Socj corrispondenti. A lui quindi anche i pubblici Moderatori confidarono talvolta importanti e delicate funzioni, qual fu, ad esempio, di formar egli parte della Commissione per ordinar e disporre a Palazzo delle Scienze l' edificio di Brera; e le Sovranità finalmente lui della decorazion insignirono della corona di ferro, fra' Cavalieri nominandolo di terza classe; distinzione tanto più bella e onorifica, quanto più meritata e meno da lui bramosamente o con raggiri sollecitata. E, lui defunto, la generosa e riconoscente Milano una pietra non consacrerà, che la rimembranza perpetui col nome del suo sapiente, virtuoso e amantissimo cittadino? Non è fors'egli di ciò meritevole a riputarsi, uno tra i fondatori della magnifica sua Specola, il calcolatore instancabile delle sue effemeridi astronomiche, il Cassini della sua meridiana del Duomo, il Picard della sua lombarda topografica descrizione, il sagace osservatore, lo scrittore leggiadro, e chi la metà possedeva del cuore d' Oriani? Ben egli è vero, nè vuol negarsi, che maggiormente a quest' ultimo il marmoreo monumento si doveva, poc' anzi erettogli su l' esterno muro e vestibolo della braidense Biblioteca; ma del nobil tributo non si allieta per avventura lo spirito dell' Oriani, e colla patria si duole che

non gli ponga vicino, scolpito pure nel sasso, il dolcissimo amico.

Oh Giovan Angelo, io mi aggirava, non ha molto, per la splendida insubre Capitale, allora splendidissima e della incoronazion esultante del suo Re; men adorna però a' mesti miei sguardi, che ad essa indarno ti richiedevano. Di te mi ragionavano tristamente alla memoria que' luoghi e tempi, ne' quali tante volte con familiare piacevolezza meco non isdegnavi d' intertenerti, onde io mi partiva di tue candide virtù edificato e istrutto de' solidi tuoi lumi. Fervido poi soprattutto e indelebile di te ognor mi ragiona l'amplesso, col quale amorevolmente stringendomi l' estrema volta, quasi presagir mi sembrasti che più oltre su la terra dato non mi sarebbe rivederti, e che mi attenderesti a specolare insieme da miglior punto le maraviglie del Cielo. Oh possa io raggiungerti, ove tu salisti, e conversi di presente con altri egregi spiriti a me pur cari! Chè dolci sempre mi risuonano i nomi del Cesaris, dell'Oriani, del Ruffini, del Baraldi; preclari e benemeriti Soggetti, la cui privazione quaggiù mi è acerba ferita, che il tempo non potrà, se non difficilmente, rimarginare.

NOTE.

(*a*) pag. CXXII. Nella corrispondenza epistolare del celebre Ab. Cav. Tiraboschi, la quale conservasi manoscritta e in molti Volumi ordinatamente raccolta presso questa R. Biblioteca Estense, ho potuto vedere parecchie lettere degli Astronomi di Brera, Cesaris e Oriani, allo Storico dell' italiana letteratura, e da esse ho tratte le precise notizie di epoche e di avvenimenti, che non mi sembrano privi di curiosità e di qualche importanza nel qualsiasi elogio precedente. Scriveva pertanto il Cesaris al Tiraboschi (1) « che il P. Lagrange passò dalla Specola di Marsiglia a Milano nel 1762, e cominciò ivi subito nell' antica specoletta le sue osservazioni; e che il Boscovich venne da Roma, chiamato all' Università di Pavia, nel 1764. » Quivi pur leggesi che la Specola fu eretta a spese del Collegio di Brera; però contribuendovi anche particolarmente il P. Boscovich per la somma di circa duecento Scudi, e avendo poi questi concepito e diretto il disegno della novella Fabbrica superiore che si eseguiva nel 1765. Rilevasi ancora che il P. Lagrange era stato nominato Direttore dell'Osservatorio non solo dai Superiori Gesuiti, ma ben anche nel nuovo Regolamento intimato dalla Corte Imperiale al Rettore del Collegio nel 1772. E infine aggiungevasi gli attuali Astronomi di Brera (cioè, per la data della lettera, nel 1787) non esser entrati per nulla in quegl' intrighi, o immaginarj o reali, pei quali il P. Boscovich partì disgustato da Milano, prima dell' abolizione de' Gesuiti, e dalla Specola ritirati alcuni strumenti di sua proprietà gli vendette all' Osservatorio di Padova. Tutte le quali dichiarazioni affermava il Cesaris potersi all' uopo confortare di prove e documenti irrepugnabili; e ne comunicava poi egli le notizie al suo antico Maestro e Confratello Gesuita, eccitandolo perchè imprendesse a scrivere l' elogio del P. Boscovich, e ne fossero così prevenute le altrui false o inesatte relazioni sopra certi punti, le quali di fatto si divulgarono indi a non molto con ingiuste accuse e taccie all' intemerata condotta e onestà dei Milanesi Astronomi verso un loro Collega, ch'eglino anzi non avevano mai cessato di rispettare e di ammirar quanto meritavasi.

(*b*) pag. CXXXVI. All' occasione di menzionare l'orologio astronomico dell'inglese Molyneux, acquistato da questa R. Specola, e nel quale alla verga composta del pendolo per la compensazione il fabbricatore surrogò la verga semplice, portante un peso di mercurio che fa le veci di compensatore, io resi onore al Cesaris di aver egli immaginato un simile artificio, semplicissimo, e che ora si preferisce a quello dell'Harrisson (2). Quantunque però l'idea ne fosse dal Cesaris concepita fin dall'anno 1783, come dichiarava egli stesso nelle sue belle Riflessioni sopra gli orologi astro-

(1) Lettera del 31 Marzo 1787.

(2) Atti del R. Osservatorio di Modena. Disc. prelim. Nota alla pag. XXVI.

nomici (3), nondimeno mi avvertì gentilmente in lettera il ch. Astronomo Cav. Schumacher,' che primo a scuoprir e indicare un tal mezzo di compensazione alla lunghezza de' pendoli fu il celebre meccanico Graham, che nel 1721 lo inventò e lo fece di pubblica ragione nelle Transazioni Filosofiche dell' anno 1726 (4). E questo appunto, mi soggiunse il Sig. Schumacher, è stato il primo pendolo a compensazione che siasi eseguito, e anteriore al pendolo composto di due metalli, del quale venne pure a Graham il pensiero nell' anno 1715, benchè poi egli l' abbandonasse. Gratissimo io a queste rettificazioni e notizie del dotto professore di Altona, rifletterò tuttavia l' invenzione del Graham essere forse caduta in dimenticanza, e che di certo il Cesaris la ignorava nell' atto di ricordare il pendolo-termometro da sè divisato. Ciò è tanto più a credersi che perfino l' inglese Tommaso Blacker proponendo e annunziando al pubblico nel 1806 la costruzione, che disse da sè immaginata, del pendolo a mercurio, alla quale sono precisamente conformi gli orologi moderni, non fece alcuna menzione della scoperta del Graham (5); al che l' effemeride di Berlino, in cui quello scritto comparve, non appose annotazione di sorta. Ma ora si attribuisca pure il suo a ciascuno, e torni al Graham l' onore dovutoli del primo scuoprimento in discorso; però fraudar non dovendosi neppur il Cesaris di qualche parte di merito nel divisare un artificio di compensazione ch' egli non seppe concepito e descritto per altri prima di lui; mentre la sua lealtà e schiettezza non gli avrebbe mai consentito di tacere il nome di chi l' aveva preceduto in quel suo concetto. Convien poi aggiungere questo nuovo esempio alla storia di tutte le umane invenzioni, su le quali o per obblivione o per altro motivo qualunque non se ne citano e abbastanza non se ne onorano gl' inventori primi e veri.

(*c*) pag. CXLI. Il grande Oriani che, educato nelle prime Scuole de' Barnabiti, avviato negli elementi di Matematica dal P. Re, uditore per un solo anno alle lezioni di calcolo sublime del P. Frisi, aveva del resto progredito sempre da sè nell'alta Geometria pura e applicata, fu ammesso allievo della Specola nell'anno 1775 e promosso Astronomo Aggiunto nel 1781 (6). Due anni appresso, in seguito delle spiacevoli contestazioni col Frisi, egli era determinato e fermo di spatriare e accettato aveva l'invito fattogli, per mezzo del Tiraboschi, dal Sig. Crevenna, facoltoso Negoziante di libri in Amsterdam, di recarsi presso di lui con qualità e impiego di bibliotecario; della qual cosa egli rallegravasi e ne protestava tutta la sua gratitudine al Tiraboschi pei buoni uffici usatigli col Crevenna suddetto (7). Già egli era sul

---

(3) Effemer. di Mil. per l' anno 1814. Appendice.

(4) Veggasi riportato un sunto della Memoria di Graham nelle Philosophical Transactions. Abridged. T. VI. P. I. pag. 297.

(5) Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1810 pag. 221.

(6) Lettera di Cesaris a Tiraboschi del 2 Marzo 1782.

(7) Lettera di Oriani a Tiraboschi del 29 Marzo 1783.

dipartirsi da Milano, allorchè per un ordine della Corte Imperiale chiamato innanzi al Governo, quivi, parte con lusinghe e promesse di avanzamenti e parte con minaccie di suprema indignazione, obbligato egli fu, piuttosto che persuaso, di annunziar al Crevenna le mutate sue circostanze e di pregarlo che lo sciogliesse dalla data parola. Ubbidiva egli nel render nota questa Governativa disposizione sopra di lui, aggiungendo nondimeno che, quanto a sè, preferito egli avrebbe di andarsene; ma il Crevenna, saggio del pari e generoso, rinunziando a tanto acquisto, gli rispondeva consigliandolo di restar al suo posto e di proseguire nella sua luminosa carriera di studi (8). Nè il Governo gli mancò di fede; chè poco dopo nominavalo professore di calcolo infinitesimale, nell' I. Ginnasio di Brera, gli raddoppiava lo stipendio e finalmente spedivalo ad arricchirsi di lumi e cognizioni all' estero col visitare i pubblici Istituti e trattare co' grandi uomini della Germania, della Francia e dell' Inghilterra. Alle ricerche poi e per l' impiego del Sig. Crevenna si trovò altro abile e distinto letterato, il Sig. Tommaso De Ocheda, che di fatto passato in Olanda vi assunse quell' incarico ed essendone assai lieto, di colà dichiaravasi riconoscente alle commendatizie del Tiraboschi e del Cesaris (9), che lo avevano proposto per tal ufficio. E di questa guisa l' Italia non ebbe a lamentare di cedere allo straniero un Oriani, come qualche anno innanzi essa con dolore veduto aveva da sè allontanarsi un Lagrange.

(*d*) pag. CXLI. L' illustre Monsignor Fabbroni celebrando cogli eleganti e aurei suoi modi latini le opere e la vita dell'ingegnosissimo P. Boscovich, disse di lui. « *Quod miraberis, vel de suis Jesuitis justam querendi caussam habuit, quorum aliorumve invidorum artibus factum est, ne amplius preesset Astronomiae Speculae, in quam non mediocres labores atque sumptus impenderet* (10). » E nell' elogio, che del medesimo poco appresso egli dettava italianamente, riconosceva nel Boscovich il Direttore della Specola di Brera, che in gran parte a spese di lui asseriva essere stata ingrandita e a perfezione ridotta: dopo di che soggiungeva: » Associò (il Boscovich) alla sua gloria alcuni giovani suoi Colleghi che, tranne uno (l'Ab. Puccinelli) il più diletto e il più costante de' suoi Scolari ed Amici, cui aveva chiamato a questo fine, divennero presto suoi nemici, tanto più molesti quanto più francheggiati dalla protezion del Governo (11). » Prive le quali gratuite asserzioni di fondamento e da veruna prova non accompagnate, contraddette ora sono e smentite nella Nota precedente (*a*). E servono poi esse a mostrare come anche uno Scrittore, d' altronde il più savio e rispettabile, possa talvolta prestar fede troppo facilmente a voci e no-

---

(8) Lettera di Oriani a Tiraboschi del 21 Maggio 1783.

(9) Lettera del Cesaris al Tiraboschi del 3 Novembre 1784.

(10) Vitae Italorum Doctrina excellentium. V. XIV. pag. 353.

(11) Elogi di Uomini illustri. Pisa 1786-89. T. II. pag. 54.

tizie, che nulla han di vero se non la passione da cui son create, senza riflettere che, accettandole e accreditandole del proprio Nome, vieppiù aggravasi l'indebita offesa e il danno all'altrui onorata riputazione. Il Fabbroni erasi trovato infatti a Milano quando vi ardeva la controversia fra il P. Frisi e gli Astronomi, e prevenuto egli a favore del primo, neppur erasi curato di visitar il magnifico Osservatorio di Brera al quale, senza vederlo, anteponeva quello di Firenze; e benchè poscia nell'elogio del Frisi egli disapprovasse le maniere ingiuriose che questi usò nel suo elogio di Galileo contro i Gesuiti, nondimeno per l'accennata controversia incolpò egli falsamente gli Astronomi che fossero stati essi, e non il Frisi, gli aggressori, dicendo che le critiche del secondo erano state fatte quasi in segreto; mentre i primi stimaron di renderle palesi col ribatterle pubblicamente (12). In Milano però ben sapevasi non solo aver gli Astronomi ricevuto il volume dell'effemeridi postillato e censurato di propria mano dal Frisi; ma che inoltre quelle critiche circolato avevano fra gli scolari e per le conversazioni; onde chi n'era percosso non poteva starsi celato e ne fu astretto alla giusta difesa di sè, che del pari non doveva più farsi privatamente o in segreto; il perchè le risposte degli Astronomi furon inviate da essi e comparvero nel *Giornale de' Letterati* che si pubblicava in Modena.

E quì non possiam preterire in silenzio che l'egregio Sig. Gabba, professore di matematiche in Brescia, nel suo dotto elogio di Barnaba Oriani avendo per la natura del soggetto ricordata la questione, troppo famosa per non ommetterla, degli Astronomi di Brera col P. Frisi, e su la medesima essendosi trattenuto con saviezza di criterio ed espressioni moderatissime, un moderno scrittore, il Sig. Barone Custodi insorse con una lunga Nota contro di lui e pretese dimostrare aver il Gabba « ridestato mal a proposito e inesattamente, dopo il trascorso di un mezzo secolo, l'obbliata questione astronomica del 1782 » (13). Pertanto a stabilire giudizj più esatti, secondo il Custodi, rimonta questi all'origine della controversia e dice aver il Frisi, eccitatone dal Conte di Firmian, proposto il piano delle effemeridi che non fu seguito; ma che nulladimeno le premure del primo rivolte all'incremento della Specola il resero benemerito degli Astronomi di essa, che gliene professarono la loro gratitudine. E ciò sarà stato in parte anche vero; sebbene l'incremento della Specola derivò realmente ne' primordj dal Rettore de' Gesuiti, poscia dai PP. Boscovich e Lagrange, e in seguito dalla munificenza dell'Austriaco Governo. ma è poi calunnioso e falso quel che prosegue a dire il Custodi, che « i sentimenti di benevolenza (negli Astronomi verso il Frisi) presto si estinsero e si mutarono in rancore ed astio » (14). Imperocchè non si potrà citare alcuna espressione delle lettere Astrono-

(12) Elogi di Uom. Ill. T. I. pag. 392.

(13) Notizie del Conte Pietro Verri, premesse alle Opere filosofiche e politiche del Verri. Milano 1835. Soc. tipogr. de' classici ital. — Dalla pagina XXIII alla XXIX.

(14) pag. XXIV. Op. cit.

miche, nè parola o azione alcuna comprovata de' loro Autori, che dimostri allignato in essi un sentimento, vile cotanto e riprovevole, qual è l' odio alla persona; ed io, che a lungo e familiarmente ebbi a trattar coi medesimi, non mi accorsi per fermo che nell' animo loro conservato eglino avessero nè mai nudrito verso il Frisi un principio nemmeno di astio e rancore. Si smentisce inoltre da sè il Custodi coll'aggiungere indi a poco e confessare che il Frisi avendo pubblicato nel 1778 l' elogio del Cavalieri, in esso *trascese* a render noto il concetto spregevole in cui egli teneva l' Istituto de' Gesuiti (15). Come dunque avrebbero potuto gli Astronomi Gesuiti accettare il piano e credere alle premure per l' incremento dell'Osservatorio, che partivano da chi, allora segretamente, non risguardava di buon occhio il loro Istituto? E perchè tardaron eglino quattro anni dopo la pubblicazione dell' elogio di Cavalieri, a manifestar un sentimento così forte e mal infrenabile, qual è l'astio covato in cuore, e ne aspettarono, da essi non provocata, la fortuita circostanza della questione scientifica e delle postille del P. Frisi all' effemeridi? Noi non seguiremo il Signor Barone in altri suoi argomenti di natura e forza non dissimili dal riportato; e piuttosto compiangeremo ch' egli siasi lasciato trasportare a schernir cose e persone le più degne di rispetto: quantunque non ci rechi maraviglia il veder dileggiati, insieme cogli uomini più stimabili per nota illibatezza di virtù e per ingegno preclaro, l'intera Famiglia religiosa o l' Istituto Lojolitico, i costumi e l' educazione dei Chierici de' Seminarj, e perfino (come leggesi in altra Nota del Custodi) la sacra dignità de' Romani Pontefici e della Chiesa. Il perchè anzi non reputeremmo per noi gloria e lode maggiore di un disprezzo e d' ire somiglianti che ad attirar ci valessero la nostra meschinità e la franchezza di queste nostre parole.

Ma l' argomento nuovo (giacchè sono vecchie le ingiurie contro i Gesuiti e gli Astronomi di Brera) il grave argomento, e che il Custodi risguardò nella sua Nota per ineluttabile a favore del Frisi circa la questione famosa, è una lettera del Matematico P. Jacquier, nella quale il celebre commentatore di Newton, mosso per avventura dal desiderio e dalle inchieste dei Conti Verri, occupossi di rendere una testimonianza d'onore al merito e al sapere del Milanese Autore della Cosmografia. Ora scorrendo tal lettera, che sarà qual si garantisce autografa e riportasi per intero nella Nota del Sig. Custodi (16), nulla vi si rinviene che propriamente e immediatamente sia relativo ai particolari punti della disputazione fra gli Astronomi e il P. Frisi. O l'Autor della lettera ignorasse la vera e particolare questione su le effemeridi, o per compiacere altrui facesse mostra d' ignorarla, nulla quindi conchiude circa la questione medesima un tal documento. Entra bensì il P. Jacquier e si trattiene ad encomiar il P. Frisi per le sue opere ed invenzioni, celebrandolo specialmente di aver

(15) pag. XXV.

(16) pag. XXVII e XXVIII.

il primo scoperto ed assegnato il limite alla diminuzione dell' obbliquità dell' ecclittica; su di che niuno moveva contrasto, e in riguardo all' ultimo special titolo di gloria il nostro Cesaris all'opportunità ne celebrava egli pure il P. Frisi (17), del quale godeva dirsi concittadino. Nè sarà poi sfuggito al Sig. Custodi, che il Jacquier nella sua lettera usa di ogni rispetto eziandio verso gli Astronomi di Brera; e certamente non avrebb' egli accusata nel giovine Oriani *la rozza petulanza de' chierici de' Seminarj*, nè proclamata la mediocrità de' suoi Colleghi; ben conoscendo egli che, quando ancora questa mediocrità e quella petulanza realmente si fosse trovata sussistere, il rinfacciarle altrui non avrebbe potuto procedere che da una mediocrità, orgogliosa e di un ordine molto a quella inferiore.

Quello però che da oltre un mezzo secolo inappellabilmente decise la controversia delle postille Frisiane furon le sode ragioni esposte nelle lettere astronomiche, e il fatto ben certo dal Cesaris attestato e così riferito. " Una persona di merito maggiore d' ogni invidia per la profondità della scienza e per imparzialità nella questione essendo stata superiormente deputata a esaminar le cose, la risultanza del giudizio è che le nostre risposte sono *ragionate e giuste nella parte scientifica*, *moderate e savie nella morale* (18). ,, La quale sentenza officialmente dal Governo venne agli Astronomi parteeipata, sebbene per prudenziali motivi non si credesse opportuno che il Governo stesso la divulgasse (19). E il Giudice nominato, che tal voto pronunziò, e sul quale cader non poteva eccezione di sorta, fu appunto il P. Gregorio Fontana delle Scuole Pie, come lo abbiam detto, e il Cesaris amichevolmente svelavalo al Tiraboschi.

(*e*) pag. CXLIII. Fra le insigni glorie letterarie di Milano scontrandosi nel nome di un Beccaria, non lasciò il Cesaris a questo proposito di rammemorare il libro che levò in tanto grido il suo Autore presso i pensatori moderni, e del quale accennava pure la facondia dell'Oratore che cento edizioni se ne procurarono in cento lingue, e cento bocche filosofiche altamente risuonar ne fecero in Europa i teoremi. Su di che però egli tosto e avvedutamente dichiaravasi, scrivendo « a me, al mio carattere, a' miei studi altri teoremi si convengono. » All' udir le quali parole di breve, sincera e accorta protesta forse allora non sarà mancato chi sotto il nero abito di costume, prescritto ai Membri ecclesiastici dell' Istituto e dall'Oratore indossato, si avvisasse riconoscere l' antico Gesuita. Ma in qualunque senso una tale osservazione potesse muoversi, d' ironia o di lode, io per me rifletto e fermamente opino che nella seconda vita, a cui trapassarono entrambi, avrà il Cesaris con intuitiva evidenza scorti e giudicati i teoremi a se prediletti ben più immutabili, salutari e giocondi, di quello che siansi offerti al Beccaria i suoi.

---

(17) Su l' antichità delle Storie egiziane. Append. all'Effem. di Milano per l'anno 1834. pag. 119.

(18) Continuazione del Giorn. de' Letterati d' Italia. Modena. T. XXV. pag. 63.

(19) Lett. del Cesaris a Tiraboschi del 20 Marzo 1782

(*f*) pag. CXLVII. Generosi e frequenti furono gli atti di cristiana carità dal Cesaris esercitati a soccorso dell' indigenza: mi limiterò a ricordarne quì uno, del quale io medesimo fui testimonio. Un giorno che io passeggiava in Milano per l'ampia via che appellasi il corso di Porta Romana, e perciò a molta distanza dalla Specola di Brera, mi abbattei a sorte nel venerando Sacerdote Astronomo, che moveva colà sollecito il piede e con affannoso respiro, come chi all' asma è soggetto. Venga meco, mi disse piacevolmente, se ad alcun luogo non deve recarsi, e avendolo io seguito, dopo trascorse alcune più strette contrade, alfin entrammo una povera botteghetta, ove una Donna, forse vedova, miserabil di certo, era da' suoi piccoli figli attorniata. Col sorriso nel volto, e salutandola, disse il Cesaris alla donna, che si facesse da lui vedere la ventura Domenica e all'ora indicata; mentre le avrebbe consegnato ciò di cui erano intesi; e tosto di là usciti, a me rivolto, egli così spiegavami il motivo di quella sua camminata. La famiglia, che abbiam or ora visitata è tanto miserabile che, malgrado il lavoro e l' industria della madre, non saprebbe come soddisfare alle scadenze del suo debito d' affitto per la casa; e quindi son venuto ad avvertirla esser io adesso in circostanza di poter somministrarle, secondo il consueto, la rata dell' affitto, e che aspetto per Domenica la madre a cui sborsarla. E parlandomi confidenzialmente, il mio Maestro non violava perciò l'evangelica segretezza della limosina; l' altro Divino consiglio adempiva: *sic luceat lux vestra coram hominibus ut videant opera vestra bona et glorificent Patrem vestrum qui in Coelis est* (20), toglieva da me qualunque fantasia nata mi fosse intorno a quel fatto, e a me, giovine allora, egli porgeva insieme una pratica lezione di carità. Oh, quanto siffatte lezioni sono più sublimi di quelle dell'Astronomia!

(*g*) pag. CXLVII. Allorchè nel 1825 il paterno e augusto Imperatore Francesco I per la seconda volta rallegrava di Sua Sovrana Presenza la Capitale del Regno Lombardo, fra le visite ai pubblici Stabilimenti la M. S. I. recatasi pure all'Osservatorio di Brera, prima di salirne le scale si volse al Direttore Cesaris; ed è quasi inutile, disse, che ascendiamo; giacchè mi sovviene di aver veduto l' altra volta questa Specola sì riccamente di macchine corredata, che ora essa non può abbisognare di nulla. Al che ossequiosamente l'Astronomo rispondendo, solo dipendere tuttavia dalla Munificenza della M. S. che la Specola fregiar si potesse di nuovi e utili acquisti: manca dunque, replicò l' Imperatore, qualche macchina interessante? Qual è questa? E il Cesaris: la macchina di ultimo perfezionamento, attualmente di maggior uso in Astronomia, il circolo meridiano: " Ebbene, faccia Ella di questa la domanda, che le sarà conceduta. „

Ho amato io riportare quì un tal fatto, di cui ho certezza, e perchè dimostra quanto l' ottimo Monarca largo fosse del suo augusto favore ai buoni studi, e perchè

(20 S. Matt. Cap. V. v. 16.

torna il fatto stesso a grande onore del suddito fedele, a cui S. M. diriggeva sì umane parole e su l'istante accordava l'oggetto, che quegli con rispettoso candore chiedevale. Non maraviglia poi che, immediatamente dopo, dal Cesaris presentata all'I. Governo la petizione per ottenere il circolo meridiano, questo magnifico strumento su l'atto venisse ordinato e commesso per la Specola milanese all'Istituto politecnico di Vienna.

(*h*) pag. CLI. Intorno ai due milanesi Astronomi encomiati mi permetta l'egregio Sig. prof. Gabba di avvertire due piccoli errori che gli sfuggirono e leggonsi nel suo pregevole elogio di Barnaba Oriani (21). Alla pagina 62 ivi si legge che l'Oriani « *poco più di un anno sopravisse al De Cesaris:* » il che non è vero; mentre il Cesaris essendo morto adì 18 Aprile del 1832, e l'Oriani adì 12 Novembre dello stesso anno, dalla morte dell'uno a quella dell'altro non passarono che circa sette mesi. E l'altra men giusta proposizione incontrasi alla pagina 65, ove, in proposito del grande affetto sempre da Oriani per Cesaris nudrito o dimostrato, si accenna persino « *quel suo averne prevenute le richieste colle larghe proferte del suo danaro.* » Il fatto potrebbe esser vero, e onorerebbe vieppiù il bel cuore dell'Oriani, interpretando ch'egli, in qualche straordinaria circostanza e per soccorrere all'altrui miseria, prevenute avesse le richieste del suo amico, a cui fosse noto il caso, con una limosina insigne; ma il Cesaris per se non si trovò mai in tale bisogno, essendo egli anzi stato sempre fornito di quanto è d'uopo al vivere agiato, e godeva, oltre i suoi emolumenti, la propria parte di beni dell'eredità paterna, lasciati a lui nell'antivedimento dell'abolizione de' Gesuiti.

Grossolani poi furono gli abbagli e molteplici le inesattezze in cui scorse la penna del Sig. Ticozzi sul conto dei nostri due Astronomi (22). Perocchè del Cesaris dice questo Scrittore che « *all' epoca della morte dell'Astronomo De Regis* (*sic* invece di *Reggio*) *fu nominato Astronomo aggiunto a Barnaba Oriani* » nelle quali parole stanno tre grandi sbagli, che si ripeton eziandio nel seguente articolo sopra Oriani. Di quest' ultimo affermasi che « *ebbe a precettore il celebre Lagrange* (scambiato qui il modesto Astronomo di Marsiglia nell'immortale Geometra di Torino), *che lo ebbe poi a suo successore nell' impiego di Astronomo.* E del Cesaris ricordati alcuni scritti e lavori di minor pregio si trapassano in silenzio i principali di lui meriti ne' Commentarj che pubblicò; siccome di Oriani pure non si accenna che la trigonometria sferoidica, e in dimenticanza si lasciano le tante di lui profonde Memorie che pubbliche sono e conservate nelle Appendici delle effemeridi milanesi.

(*i*) pag. CLII. Per le solenni esequie, celebrate a suffragio del defunto Ab. Cesaris nella Chiesa di S. Marco, si leggeva su la porta maggiore del Tempio la seguente Iscrizione:

---

(21) Elogio di Barnaba Oriani, scritto da Alberto Gabba, ec. Milano. 1834.

(22) Ticozzi. — Continuazione dei Secoli della letteratura italiana del Corniani. T. II. pag. 656.

ANGELO . CESARIS
SOC. QVAE . FVIT . JESU
EQVITI . CAESAREAE . CORONAE . FERREAE . ORD. III
BRAIDENSIS . SPECVLAE . ASTRONOMO . PRIMARIO
VTRIVSQVE . CLASSIS . R. INSTITVTI
SCIENTIIS . LITTERIS . ARTIBVS . AVGENDIS
PRAEFECTO
IN . XL . VIROS
ITALICI . SCIENTIARVM . CONLEGII
COOPTATO
QVI . IN . EXEMPLVM . PIVS
POLITIORIS . HVMANITATIS
ET . MVLTIFARIAE . DOCTRINAE . LAVDEM
VIRTVTIS . PERPETVAE . COMMENDATIONE . CVMVLAVIT
INDOLIS . ET . VVLTVS . ALACRITATE
SVAVI . CONSVETVDINE
MORVM . ELOQVII . DIGNITATE . PRAESTANS
CIVIVM . ET . PRINCIPVM . GRATIA . FLORVIT
MORBI . DIVTINI . VIM
FORTITER . AD . EXITVM . VSQVE . PERPESSVS
IN . IPSO . SENIO . OPEROSVS . PERVTILIS
DECESSIT . ANNVM . AGENS . LXXXIII
HACTENVS . BONORVM . OMNIVM . AMOR
NVNC . DESIDERIVM . AETERNVM
JOANNES . ET . FRANCISCVS
PATRVO . BENEMERENTI . AMANTISSIMO
EXEQVIARVM . JVSTA . COLLACRVMANTES

Nella quale iscrizione, che abbiam fedelmente ricopiata dalla Biblioteca Italiana (23), ci sembra che con errore alla seconda riga siasi scritto *Quae* in luogo di *Qui*. Conciossiachè si può ben dire del Cesaris che appartenne alla Società di Gesù, non essendovi egli rientrato al ristabilimento della medesima, nè dipoi; ma non istà egualmente che alla morte di lui la detta Società più non sussistesse, come significa il *Quae . Fuit*; mentre se un Decreto Pontificio aboliva la Compagnia di Gesù nel 1773, un altro Decreto Pontificio nel 1815 la rimetteva solennemente in vigore per

(23) N. CXCV. Fasc. Marzo 1832. pag. 407.

l' Orbe Cattolico; e se fino al 1832, e anche dopo, i Gesuiti non erano stati richiamati in Milano, essi però assai prima del 1832 accolti erano per Sovrana Disposizione in altri luoghi dell'Austriaco Impero.

Quanto agli Ufficj di suffragio alla bell'Anima di Giovan Angelo, fatti celebrare in Casale Pusterlengo dai parenti di lui o dai Fabbricieri di quella Parrocchiale, compose le Iscrizioni affisse alla porta della Chiesa un mio dolcissimo Amico (amato pure e singolarmente pregiato dal defunto Astronomo) il ch. Sig. Gio. Antonio Maggi milanese: ed io quì mi reco a piacere di riportar quella di tali Iscrizioni che l'Autore latinamente dettava, le altre da lui essendo state formate ed espresse nel nostro idioma: ecco la prima.

JOHANNI . ANGELO . CESARIS
SOCIETATIS . JESV . OLIM . SACERDOTI
EQ. CORONAE . FERREAE
PROPERATAM . COELESTIVM . BEATITATEM
QVAM . VIRTVTE . OMNIGENA . PROMERVIT
FRATRIS . FILII
TANTI . PATRVI . NVMQVAM . IMMEMORES
ANNIVERSARIA . SVPPLICATIONE
ADPRECANTVR.

(*k*) pag. CLIII. Tacendo, per amore di brevità, i nomi delle persone e famiglie più cospicue di Milano, presso le quali godeva il Cesaris di tutta la stima e confidenza, non possiam trattenerci dal ricordare fra quelle S. E. il Sig. Conte Giacomo Mellerio, Consigliere Intimo di S. M. I. R. A. e Cavaliere Gran Croce della Corona Ferrea, che, splendido e colto Mecenate de' gravi studi, delle buone lettere e dell' arti gentili, agli Astronomi di Brera pregiavasi di professare una più speciale e ingenua benevolenza. E ricorderemo altresì un lietissimo giorno, in cui accordatisi Oriani e Cesaris coi miei due cari amici, il sullodato Maggi e il nobile D. Gabrio Piola, ottimo letterato il primo e profondo Geometra il secondo, tutti quattro si dipartivano in cocchio da Milano, e accolti venivano con vera festa di schiettissima amicizia dal Conte Mellerio nella deliziosa e magnifica sua Villa del Gernetto, che, in su l' ingresso ai ridenti colli della Brianza, sorge sopra un verde poggio dalla riva sinistra del Lambro, che discorre al suo piede limpido e serpeggiante nel piano. Oh quali ore beatissime colà passarono i due Astronomi coi loro Amici e l'Ospite loro, e nell'amenissima Gernetto quanto allora si trovò adunato di cortesia, di sapienza e di ogni maschia virtù!

ELENCO

DELLE OSSERVAZIONI E DEGLI OPUSCOLI, MEMORIE, DISCORSI EC.

COMPOSTI DALL' ASTRONOMO

CAVALIERE AB. GIO. ANGELO CESARIS

SCRITTI EDITI

NELLE EFFEMERIDI DI MILANO.

1. Il calcolo, ossia la parte numerica degli annunzj, dal 1.° Volume del 1775 a quello del 1803 inclusivamente: ed è pure del Cesaris il discorso: = Explanatio et usus tabularum = inserito e talvolta variato nei primi volumi fino al 1783.
2. Eff. 1775 = Opposition de Saturne en l' annèe 1773.
3. Eff. 1776 = Observationes eclipsium satellitum Jovialium.
4. Eff. 1777 = Observationes Cremonae peractae pro determinanda longitudine et latitudine geografica.
5. Eff. 1778 = Determinatio oppositionum Martis et Saturni anni 1777.
6. Eff. 1780 = De aedificio et machinis speculae astronomicae mediolanensis, Commentarius.
7. Eff. 1781 = Observationes satellitum Jovis habitae ab anno 1777 et cum tabulis comparatae: Observationes Veneris circa maximam ejus a Sole digressionem habitae mensibus Martio et Aprili an. 1779: Observationes Jovis circa ejus cum Sole oppositionem: Observationes cometae qui apparuit mensibus Martio, Aprili, ec. 1779.
8. Eff. 1782 = De cometa anni 1781.
9. Eff. 1783 = Oppositio Martis anni 1781: observationes satellitum Jovis.
10. Eff. 1784 = Distantiae a vertice limbi superioris Solis in meridiano observatae ab anno 1773 ad finem 1782. (Non sono del Cesaris che quelle del primo triennio; le altre appartengono al Reggio): occultatio Veneris observata etc.
11. Eff. 1785 = Occultationes fixarum observatae et supputatae.
12. Eff. 1786 = Positiones Mercurii observatae an. 1782: oppositio Martis an. 1783: Conjunctiones inferiores Veneris cum Sole annis 1782 et 1783.
13. Eff. 1787 = Oppositio Jovis et ejusdem conjunctio cum stella σ Aquarii an. 1784: conjun. super. Veneris cum Sole an. 1784: occultatio Veneris sub luna an. 1785: occultationes stellarum ϕ Sagitarii et ε Geminorum sub luna an. 1785.

14. Eff. 1788 = De linea meridiana descripta in Templo maximo Mediolani anno 1786, commentarius: observationes Mercurii sub Sole habitae die 3. Maii an. 1786.

15 Eff. 1789 = Observatio cometae anni 1786: observatio eclipsis Solis die 15 Junii an. 1787.

16. Eff. 1790 = Observationes Veneris in ejus conjunctione cum Sole mense Augusti an. 1788: De montibus Vulcaniis Lunae, Commentarius.

17. Eff. 1791 = Observationes Veneris post ejus conjunctionem mense Augusti ad maximam digressionem mense Octobris 1788: observatio eclipsis Solis die 4 Junii 1788: observationes Mercurii in elongatione a Sole mensis Octobris 1788. Occultationes stellarum in occursum Lunae observatae tubo 10 pedum: observationes anuli Saturni mensibus Augusti et Octobris 1789.

18. Eff. 1792 = Occultationes stellarum in occursum lunae observatae Mediolani tubo achromatico pedum octo: De Quadrante murali quem Speculae Mediolanensi construxit Jesse Ramsden, Londini, Commentarius.

19. Eff. 1793 = Conjunctio inferior Veneris cum Sole anno 1790: oppositiones Martis et Jovis anni 1790: Occultationes Jovis in occursum lunae anno 1792: oppositiones Martis et Urani anni 1792.

20. Eff. 1794 = De phaenomeno meteorologico.

21. Eff. 1795 = De telescopio Herscheliano et de praecipuis telescopiorum elementis.

22. Eff. 1796 = Observationes Mercurii et Veneris annis 1791-2-4-5: occultationes stellarum in occursum lunae observatae ab anno 1792 ad annum 1795: oppositiones Saturni, Urani et Martis annis 1793 et 1794.

23. Eff. 1797 = Oppositiones Saturni et Martis observatae quadrante murali pedum octo annis 1795 et 1796.

24. Eff. 1798 = Conjunctio inferior Veneris et Solis mense Augusti 1796: oppositio Saturni mense Decembris anni 1796: oppositio Urani mense Februarii anni 1797.

25. Eff. 1799 = Observationes Mercurii anno 1797: De diametro Saturni: Occultatio ϕ Sagittarii in occursum lunae 21 Augusti 1798: Observationes Veneris circa ejus conjunctionem inferiorem cum Sole mense Martio 1798.

26. Eff. 1800 = Observationes Satellitum Jovis et Lunae.

27. Eff. 1801 = Occultationes planetarum in occursum lunae anno 1801.

28. Eff. 1802 = De usu observationum stellarum circumpolarium: occultatio α Virginis sub luna die 30 Martii 1801.

29. Eff. 1804 = Osservazioni del Sole al Quadrante murale dall'anno 1791 all'anno 1802.

30. Eff. 1805 = Opposizioni di Urano e di Giove nel 1804.

31. Eff: 1806 = Elogio storico dell'Abate Francesco Reggio Astronomo della Specola di Milano (col titolo italiano, ma scritto in latino). Di una nuova specie di livello a filapiombo per la verificazione dei quadranti astronomici.
32. Eff. 1807 = Sulla paralasse delle stelle, Riflessioni.
33. Eff. 1809 = Metodo per verificare la posizione della macchina equatoriale: Osservazioni meridiane del Sole negli anni 1791-2-3.
34. Eff. 1810 = Continuazione delle osservazioni meridiane del Sole al quadrante murale di 8 piedi.
35. Eff. 1811 = Riflessioni sul limite degli errori probabili nelle osservazioni astronomiche.
36. Eff. 1812 = Osservazioni per determinare i solstizj e l'obbliquità dell'ecclittica negli anni 1810 e 1811.
37. Eff. 1813 = Sul movimento oscillatorio e periodico delle fabbriche.
38. Eff. 1814 = Riflessioni sopra gli orologi astronomici.
39. Eff. 1815 = Continuazione delle osservazioni meridiane del Sole al quadrante murale.
40. Eff. 1816 = Continuazione delle osservazioni sul movimento oscillatorio e periodico delle fabbriche.
41. Eff. 1818 = Occultazioni di stelle nello scontro della luna, osservate a Milano.
42. Eff. 1819 = Riflessioni pratiche sulla misura del diametro del Sole.
43. Eff. 1822 = Occultazioni di stelle nello scontro della luna osservate a Milano.
44. Eff. 1823 = Opposizioni di Urano osservate a Milano negli anni 1817 e 1818: opposizioni di Saturno e di Giove osservate a Milano nell'anno 1821.
45. Eff. 1834 = Sull' antichità delle Storie egiziane (Memoria postuma).
46. . . . = La serie delle osservazioni meteorologiche non interrottamente fatte dal Cesaris, dall' anno 1804 al 1830 *inclusive*, è inserita nelle effemeridi, a cominciar dal 1808 fino a quelle dell' anno 1833.

NELLE MEMORIE DELLA SOCIETÀ ITALIANA

47. = Sopra la congiunzione inferiore di Venere col Sole del 20 Marzo 1782, osservazioni e riflessioni. T. II.
48. = Osservazioni di stelle pel Catalogo di Cagnoli. T. X.
49. = Supplemento di osservazioni pel Catalogo suddetto. T. XI.
50. = Lettera al Sig. Antonio Cagnoli intorno alla rifrazione lunare. T. XIV.
51. = Del clima di Lombardia, osservazioni. T. XVIII.

IN ALTRE COLLEZIONI, O A PARTE.

52. = La prima delle lettere astronomiche per servir di appendice all' effemeride di Milano dell' anno 1783. T. XXIV del Nuovo Giornale de' letterati d'Italia.

53. = Discorsi cinque per la distribuzione dei premj d' industria nel dì 4 Ottobre degli anni 1822-4-6-8 e 1830.

54. = Elogio storico del Preposto Anton Luigi De Carli, premesso all' opera: il Vangelo delle Domeniche spiegato dall' encomiato Parroco.

55. = Brevi cenni intorno alla costruzione della Carta topografica della Lombardia: T. V. delle Memorie di Religione, Morale e Letteratura: pag. 130.

SCRITTI INEDITI

CONSERVATI PRESSO L'I. R. ISTITUTO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI IN MILANO.

56. = Sui cannocchiali Galileani: Memoria letta il 4 Agosto 1814 all' adunanza dell' Istituto.

57. = Su la misura della refrangibilità della luce, letta il 17 Agosto 1814.

58. = Sui vetri periscopici di Wolaston, letta il 4 Febbrajo 1819.

59. = Esperienze colla macchina di Christian per dirompere il lino: stampata in piccol numero d' esemplari.

60. = Sull' inutilità della ricerca della quadratura del circolo, letta il 15 Febbrajo 1821.

MEMORIE
DI
MATEMATICA

NOTA
A DUE CAPITOLI DELL' OPERA DI EULERO
CHE HA PER TITOLO
THEORIA MOTUS CORPORUM RIGIDORUM

DI GABRIO PIOLA

Ricevuta adì 26. Dicembre 1837.

Espongo in breve l' oggetto del seguente scritto. Leonardo Eulero giunse a comprendere che nel moto qualunque di un corpo rigido doveva aver luogo una certa interessantissima proprietà. Accintosi però a darne per via d' analisi la diretta dimostrazione, trovò che questa riduceasi a provare identica una equazione che assegnò, ma poi sconfortato dalla lunghezza dei calcoli, rinunciò all' impresa. Ben vi tornò sopra più d' una volta, ma sempre invano, siccome apertamente dichiarò con quella ingenuità che traluce in tutte le sue opere. Allora si volse ad un altro giro di ragionamenti, e ottenuta una dimostrazione rigorosa, quantunque indiretta del suo teorema, sempre più si persuase in massima dell'identità di quella equazione, che non avea mai potuto riconoscere di fatto. Munitosi in seguito di nuovi mezzi, replicò il tentativo, e ancora infruttuosamente, talchè finì coll' invitare i geometri perchè esperimentassero anch' essi le loro forze contro una difficoltà

analitica, la cui resistenza parevagli avere alcun che di singolare. Dopo Eulero, un altro grande geometra, Gaspare Monge, rinvenne sei elegantissime relazioni fra le quantità analitiche che entrano a comporre l'equazione di cui si è detto: e ciò fu, avendo egli di mira altre applicazioni. Ora io mostrerò che giovandoci delle nuove relazioni di Monge possiamo arrivare senza stento a vincere finalmente quella difficoltà analitica, e a dare così la diretta dimostrazione dell' insigne teorema Euleriano. Non essendo senza interesse il tener dietro attentamente al naturale progresso delle nostre cognizioni, cercherò dapprima di dare con qualche chiarezza un'idea della questione, e dello stato in cui fu lasciata da Eulero, e riferirò i varj passi del suo libro che attestano quanto ho quì sopra asserito, innanzi di esporre la dimostrazione da lui desiderata.

1. Ecco di che si tratta. Si considera il corpo rigido in due diverse posizioni corrispondenti a due epoche di tempo, per la prima delle quali si prende il principio del tempo, e per la seconda un tempo qualunque finito. Designato nel corpo un punto arbitrario che chiamasi centro, si può sempre assegnare una retta passante per esso, e fissamente muoventesi col corpo stesso, la direzione della quale per la seconda epoca sia parallela alla direzione ch' essa ebbe già nella prima epoca. Talchè la determinazione della posizione del corpo per la seconda epoca si ridurrà soltanto a sapere la traslazione del punto preso per centro, e l'angolo di conversione dei diversi punti del corpo intorno a quella retta come ad asse. (Veggasi Eulero nelle Aggiunte dell'opera citata: cioè il Capo 1.° intitolato: *Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum* dal n.° 974. in avanti; e il Capo 2.° intitolato: *Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi*, nei primi tre numeri.

2. Eulero partì dalle seguenti formole ora conosciute da tutti gli studiosi della meccanica razionale

$$x = f + \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c$$

(1) $$y = g + \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c$$

$$z = h + \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c;$$

le x, y, z sono le coordinate di un punto qualunque del corpo riferito a tre assi ortogonali fissi nello spazio; f, g, h le coordinate particolari del punto preso per centro; a, b, c le coordinate di un punto qualunque del corpo relativamente a tre assi aventi l' origine nell'anzidetto centro, fissi nel corpo e mobili con esso nello spazio, e che al principio del moto erano in coincidenza coi tre summentovati; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ nove quantità angolari vincolate dalle sei equazioni

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

(2)

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0$$

$$\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0$$

$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0.$$

3. Al principio del moto sono rispettivamente espressi da

(3) $$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

i tre coseni degli angoli che la retta passante pel centro e pel punto (a, b, c) fa coi tre assi fissi nello spazio.

I coseni degli angoli fatti dalla stessa retta cogli stessi tre

assi fissi alla seconda epoca sono espressi da

$$(4) \qquad \frac{\alpha_1 a+\beta_1 b+\gamma_1 c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{\alpha_2 a+\beta_2 b+\gamma_2 c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \frac{\alpha_3 a+\beta_3 b+\gamma_3 c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Se la direzione della retta nella seconda posizione deve essere parallela alla direzione che ebbe al principio del moto, bisogna che le espressioni (4) siano rispettivamente eguali alle (3). Di quì le tre equazioni

$$(5) \qquad \begin{aligned} a &= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c \\ b &= \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c \\ c &= \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c, \end{aligned}$$

che serviranno a determinare i valori a, b, c delle coordinate di un punto della retta cercata relativamente ai tre assi mobili; valori che contenendo una indeterminata, apparterranno a una successione di punti e non a un punto solo, e ci faranno così conoscere tutta la retta in questione.

Ma l' indole delle equazioni (5) è tale che quantunque vi appajano tre incognite a, b, c, si possono colle opportune divisioni ridurre a non presentare d' incognito che i due rapporti $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$: talchè eliminati questi due rapporti fra le tre equazioni, rimane un' equazione di condizione fra le nove quantità angolari $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. Pertanto se la proprietà supposta ha veramente luogo, conviene che l' anzidetta equazione di condizione sia vera di per se stessa, sia cioè un' equazione sempre identica, nulla togliendo alla generalità delle quantità analitiche che la compongono: il che è quanto vuolsi dimostrare.

4. È facile eseguire fra le (5) la descritta eliminazione, e assegnare così l' equazione di condizione: si vedrà che due termini nel risultamento finale si distruggono, e che i rima-

nenti sono divisibili pel fattor comune $1 - \alpha_1$; per tal modo risulterà l' equazione cercata sotto la forma

$$
\begin{aligned}
& \alpha_3\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 \\
(6) \qquad & + (1 - \alpha_1)\beta_3\gamma_2 + \alpha_3(1 - \beta_2)\gamma_1 + \alpha_2\beta_1(1 - \gamma_3) \\
& - (1 - \alpha_1)(1 - \beta_2)(1 - \gamma_3) = 0,
\end{aligned}
$$

che combina perfettamente colla riferita nel nostro testo al n.° 976. Ivi Eulero svolge i prodotti, per il che la (6) diventa

$$
\begin{aligned}
0 = - 1 + \alpha_1 - \alpha_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_3 & \\
+ \beta_2 - \alpha_1\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 & \\
+ \gamma_3 - \beta_2\gamma_3 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 & \\
(7) \qquad + \alpha_3\gamma_1 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 & \\
+ \alpha_2\beta_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 & \\
+ \beta_3\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 . &
\end{aligned}
$$

Questa differisce di due termini da quella del testo dove sono mancanti: ma giacchè siamo d'accordo sulla equazione (6), è evidente doversi ciò attribuire ad un errore di stampa incorso nella edizione da me posseduta dell' opera di Eulero. (Gryphiswaldiae, litteris et impensis A. F. Röse. MDCCXC.)

5. L' equazione (6), o (7) è la cercata, che deve riuscire identica. Di essa però disse il nostro Autore. *Hic autem non liquet quomodo ista expressio ad nihilum redigatur ; ac nimis taediosum foret loco litterarum eorum valores penitus evolutos substituere. Missa igitur hac investigatione*, *ec.* Poco dopo Eulero soggiunse. *Aequatio inventa* (la nostra (6)) *tantopere*

est implicata, ut nimis molestum foret loco singularum litterarum valores quos ipsis assignavimus substituere. Interim tamen aliunde certum est, quomodocumque corpus rigidum ex uno situ in alium transferatur, semper dari ejusmodi rectam cujus directio nullam mutationem patiatur. Pose in seguito la dimostrazione geometrica rigorosa ma indiretta del suo teorema, da lui ottenuta attaccando mentalmente e invariabilmente al corpo una sfera mobile con esso : poi scrisse : *Cum igitur solidissimis rationibus sit evictum in omni situ translato semper dari ejusmodi lineam rectam cujus directio non discrepet a directione quam eadem recta in situ initiali tenuit, etiam certi esse possumus aequationem datam* (la solita (6)) *semper locum esse habituram, postquam scilicet loco omnium litterarum valores assignati fuerunt substituti ; hoc enim facto necessario venire debet, ut omnes plane termini sponte se mutuo tollant, etiamsi hoc ex sex illis conditionibus principalibus* (le nostre equazioni (2)) *quibus satisfieri oportuit, neutiquam appareat. Quamobrem ista eximia proprietas, cujus veritas geometrice tam facile est ostensa, ratione formularum analyticarum pro maxime abscondita est habenda ; atque ob hanc ipsam rationem ex ea pulcherrima incrementa per totam mechanicam merito expectare possumus.* Standogli però a cuore anche dopo la dimostrazione geometrica di condurre a compimento la dimostrazione diretta, prese a svolgere sott'altro aspetto i valori delle quantità analitiche che compongono l' equazione di condizione (6), e ciò per la speranza di riuscire all' intento desiderato, come si rileva dalle seguenti parole. *Interim tamen formulas quas pro illis litteris supra invenimus, diligentius evolvamus, quo inde forsitan facilius perspici queat quemadmodum aequatio illa* (la solita (6)) *adimpleatur.* Ma non gli giovò la trasformazione di quelle espressioni, giacchè fu costretto a soggiungere. *Verum etiamsi hos valores in aequatione* (nella (6)) *substituamus, nullo tamen modo perspicitur quomodo ejus membra se mutuo destruere queant.* Finalmente dopo aver descritto con parole quale dovrebbe essere il lavoro di quella verifica-

zione, giudicandolo eccessivamente prolisso, conchiuse. *At vero nemo facile stupendum hunc laborem in se suscipere volet; quamobrem egregia ista proprietas omnium corporum rigidorum multo magis ardua est censenda, et Geometris pulcherrimam occasionem praebere potest, vires suas in ista proprietate penitus enucleanda exercendi.* Quì si arrestò Eulero.

6. Monge ha trovato che essendo le nove quantità angolari $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ legate fra loro dalle equazioni (2), se ne possono a dirittura determinare sei in funzione delle residue tre, senza ricorrere, come fecero Eulero e tutti i geometri dopo di lui, ad altri tre angoli secondarj, pei quali vengano quelle nove ad essere espresse. Ecco le sue formole (veggasi Lacroix, Traité du calcul différentiel et intégral. T. I. pag. 533.)

Per le tre di cui le altre sei si considerano funzioni, furono dal geometra francese scelte le $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$. Egli dimostrò che assunte per brevità le denominazioni

$$(8)\qquad \begin{aligned} M &= 1 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 \\ N &= 1 + \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3 \\ P &= 1 - \alpha_1 + \beta_2 - \gamma_3 \\ Q &= 1 - \alpha_1 - \beta_2 + \gamma_3 \end{aligned}$$

si hanno le sei

$$(9)\qquad \begin{aligned} \beta_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{NP} + \tfrac{1}{2}\sqrt{MQ} \\ \alpha_2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{NP} - \tfrac{1}{2}\sqrt{MQ} \\ \alpha_3 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{NQ} + \tfrac{1}{2}\sqrt{MP} \\ \gamma_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{NQ} - \tfrac{1}{2}\sqrt{MP} \\ \gamma_2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{PQ} + \tfrac{1}{2}\sqrt{MN} \\ \beta_3 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{PQ} - \tfrac{1}{2}\sqrt{MN}. \end{aligned}$$

Io quì non reco la dimostrazione a *priori* di queste elegantissime formole, ma una ne suggerisco a *posteriori:* il lettore provi, e vedrà che questi valori (9) soddisfanno alle equazioni (2).

7. Ora mostrerò che i medesimi valori (9) sostituiti nella equazione celebre pei tentativi di Eulero la rendono effettivamente identica, come quel grande Geometra avea preveduto. Stando tutto l' oggetto della presente ricerca nel risultamento che si ottiene dopo l' esecuzione materiale dei calcoli algebrici, dovrà essere permesso d' entrare relativamente ad essi in quelle minute particolarità che di solito non si ammettono se non nei libri elementari. Ciò dunque io farò, e per maggiore chiarezza distinguerò il primo membro della equazione (6) in tre parti ponendo

$$(10)\qquad \begin{aligned}(\mathrm{I}) &= \alpha_3\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1\\ (\mathrm{II}) &= (1-\alpha_1)\beta_3\gamma_2+\alpha_3(1-\beta_2)\gamma_1+\alpha_2\beta_1(1-\gamma_3)\\ (\mathrm{III}) &= -(1-\alpha_1)(1-\beta_2)(1-\gamma_3)\end{aligned}$$

di maniera che la (6) sarà la stessa cosa della seguente

$$(11)\qquad (\mathrm{I})+(\mathrm{II})+(\mathrm{III})=0$$

8. Mi propongo di trattare le parti (I), (II), (III) separatamente.

La (I) per la sostituzione dei valori (9) diventa

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}) = &\tfrac{1}{8}(\sqrt{NQ}+\sqrt{MP})(\sqrt{NP}+\sqrt{MQ})(\sqrt{PQ}+\sqrt{MN})\\ &+\tfrac{1}{8}(\sqrt{NQ}-\sqrt{MP})(\sqrt{NP}-\sqrt{MQ})(\sqrt{PQ}-\sqrt{MN})\end{aligned}$$

Ora osservisi che in generale ha luogo l'equazione identica

$$(a+b)(c+d)(e+f)+(a-b)(c-d)(e-f)=2(ace+adf+bcf+bde)$$

del che ognuno agevolmente si convince eseguendo i prodotti.

Per questa la precedente ammette una notabile riduzione, combinandosi le quantità così felicemente che spariscono i radicali, e si ha

$$(12) \qquad (I) = \tfrac{1}{4}(NPQ + MNQ + MNP + MPQ).$$

Scrivasi il quadrinomio del secondo membro sotto la forma

$$PQ(M+N)+MN(P+Q),$$

poi si osservi che le (8) danno prontamente

$$M + N = 2(1+\alpha_1)$$

$$P + Q = 2(1-\alpha_1)$$

$$MN = (1+\alpha_1)^2-(\beta_2+\gamma_3)^2$$

$$PQ = (1-\alpha_1)^2-(\beta_2-\gamma_3)^2.$$

A motivo di tali espressioni la (12) si riduce

$$(I) = \tfrac{1}{2}((1+\alpha_1)(1-\alpha_1)^2+(1-\alpha_1)(1+\alpha_1)^2)$$
$$-\tfrac{1}{2}((1+\alpha_1)(\beta_2-\gamma_3)^2+(1-\alpha_1)(\beta_2+\gamma_3)^2)$$

ed eseguendo i prodotti e le potenze indicate

$$(13) \qquad (I) = 1-\alpha_1^2-\beta_2^2-\gamma_3^2+2\alpha_1\beta_2\gamma_3.$$

Passiamo al calcolo della seconda delle (10). Sostituendo i valori (9) si vede, anche senza nulla scrivere, ch'essa si cangia nella

$$(14) \qquad (II) = \tfrac{1}{4}(1-\alpha_1)(PQ-MN)+\tfrac{1}{4}(1-\beta_2)(NQ-MP)$$
$$+\tfrac{1}{4}(1-\gamma_3)(NP-MQ).$$

Di subito le (8) ci somministrano

$$PQ - MN = (1-\alpha_1)^2 - (\beta_2 - \gamma_3)^2 - (1+\alpha_1)^2 + (\beta_2 + \gamma_3)^2$$

$$NQ - MP = (1-\beta_2)^2 - (\alpha_1 - \gamma_3)^2 - (1+\beta_2)^2 + (\alpha_1 + \gamma_3)^2$$

$$NP - MQ = (1-\gamma_3)^2 - (\alpha_1 - \beta_2)^2 - (1+\gamma_3)^2 + (\alpha_1 + \beta_2)^2$$

le quali espressioni, se si svolgono i quadrati, si riducono

$$(15) \qquad \begin{aligned} PQ - NM &= 4(\beta_2\gamma_3 - \alpha_1) \\ NQ - MP &= 4(\alpha_1\gamma_3 - \beta_2) \\ NP - MQ &= 4(\alpha_1\beta_2 - \gamma_3). \end{aligned}$$

Per queste la (14) diventa

$$(II) = (1-\alpha_1)(\beta_2\gamma_3 - \alpha_1) + (1-\beta_2)(\alpha_1\gamma_3 - \beta_2) + (1-\gamma_3)(\alpha_1\beta_2 - \gamma_3)$$

ed eseguendo i prodotti indicati

$$(16) \qquad \begin{aligned} (II) = &- \alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3 + \alpha_1^2 + \beta_2^2 + \gamma_3^2 \\ &+ \alpha_1\beta_2 + \alpha_1\gamma_3 + \beta_2\gamma_3 - 3\alpha_1\beta_2\gamma_3. \end{aligned}$$

L' ultima delle (10) non abbisogna di alcuna sostituzione, giacchè le quantità che la compongono sono le sole tre, di cui risultano le altre sei: eseguito il prodotto indicato, abbiamo

$$(17) \qquad \begin{aligned} (III) = &- 1 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 \\ &- \alpha_1\beta_2 - \alpha_1\gamma_3 - \beta_2\gamma_3 + \alpha_1\beta_2\gamma_3. \end{aligned}$$

Ed eccoci alla bramata conclusione. Se si sommano le precedenti (13), (16), (17) otteniamo una equazione, il cui primo membro uguaglia il primo della (11); la somma poi dei secondi

membri si vede a colpo d'occhio risultare zero, giacchè tutti que' termini *se mutuo tollunt*, come Eulero disse dover accadere. Così la (11) ossia la (6) è verificata.

9. Quantunque io abbia di già raggiunto lo scopo a cui mirai dal principio di questo scritto, non tralascerò di mettere le due equazioni dietro le quali si può assegnare la posizione dell' asse Euleriano relativamente agli assi mobili col corpo. E ciò tanto più volontieri in quanto che mediante l' uso delle nuove formole di Monge anche quelle due equazioni si riducono ad una notabile semplicità.

Combinando le equazioni (5) si ottengono le due

$$(18)\qquad \frac{a}{(1-\beta_2)\gamma_1+\beta_1\gamma_2}=\frac{b}{(1-\alpha_1)\gamma_2+\gamma_1\alpha_2}=\frac{c}{(1-\alpha_1)(1-\beta_2)-\beta_1\alpha_2}$$

Il primo di questi denominatori, se mettasi per $1-\beta_2$ l'espressione equivalente $\frac{1}{2}(N+Q)$, e sostituiscansi a γ_1, β_1, γ_2 i valori dati dalle (9), si trova dopo facili riduzioni eguale alla quantità

$$\tfrac{1}{4}(M+N+P+Q)\sqrt{NQ}.$$

Il secondo denominatore, ponendo $\frac{1}{2}(P+Q)$ per $1-\alpha_1$, e usando dei valori (9), risulta similmente eguale all'espressione

$$\tfrac{1}{4}(M+N+P+Q)\sqrt{PQ}.$$

L' ultimo denominatore prende la forma

$$\tfrac{1}{4}(M+N+P+Q)Q.$$

Si osservi che dalle (8) caviamo

$$M+N+P+Q=4.$$

Quindi le espressioni dei tre denominatori saranno rispettivamente

$$\sqrt{NQ},\quad \sqrt{PQ},\quad Q;$$

se ne faccia la sostituziene nelle (18), e dopo avere moltiplicato per $\sqrt{Q}$, avremo le equazioni di quella retta ridotte alla forma

$$(19) \qquad \frac{a}{\sqrt{N}}=\frac{b}{\sqrt{P}}=\frac{c}{\sqrt{Q}}.$$

Queste due equivalgono alle tre

$$(20) \qquad a=\lambda\sqrt{N};\quad b=\lambda\sqrt{P};\quad c=\lambda\sqrt{Q},$$

dove λ è l' indeterminata di cui parlammo più sopra subito dopo aver registrate le equazioni (5).

10. I tre coseni degli angoli che la retta in questione fa coi tre assi delle a, b, c, sono in virtù delle (3), (20), espresse dalle formole

$$(21) \qquad \sqrt{\left(\frac{N}{N+P+Q}\right)};\quad \sqrt{\left(\frac{P}{N+P+Q}\right)};\quad \sqrt{\left(\frac{Q}{N+P+Q}\right)},$$

ovvero in virtù delle (8) dalle

$$(22) \quad \sqrt{\left(\frac{1+\alpha_1-\beta_2-\gamma_3}{3-\alpha_1-\beta_2-\gamma_3}\right)};\quad \sqrt{\left(\frac{1-\alpha_1+\beta_2-\gamma_3}{3-\alpha_2-\beta_1-\gamma_3}\right)};\quad \sqrt{\left(\frac{1-\alpha_1-\beta_2+\gamma_3}{3-\alpha_1-\beta_2-\gamma_3}\right)}.$$

In queste espressioni non si dà generalmente più luogo ad alcuna riduzione, perchè le quantità angolari che le compongono sono soltanto le tre prese a base della determinazione di tutte le altre. Di queste tre, α_1 è il coseno dell'angolo, che dopo il tempo che separa le due epoche, l' asse mobile delle a fa coll' asse fisso delle x; β_2 il coseno dell'angolo fatto contemporaneamente dalle asse delle b coll' asse delle y; γ_3 il coseno dell' angolo fatto dall' asse delle c coll' asse delle z.

11. Il teorema di Eulero si può ora enunciare così. Alla fine di un tempo qualunque la retta che fa coi tre assi attaccati al corpo rigido angoli i cui coseni sono dati dalle espressioni (22), ha nello spazio la stessa direzione che vi ebbe al prin-

cipio del moto e del tempo. Il lettore però non si dia a credere che essendo parallele le direzioni di questa retta per le due epoche considerate, siasi essa sempre conservata nella stessa direzione durante il tempo intermedio; questa retta è realmente alla seconda epoca nell' egual posizione in cui si sarebbe trovata se si fosse mossa sempre parallelamente a se stessa; ma il parallelismo non è continuo, se non ammesse certe condizioni che non sussistono in generale.

12. Eulero sperava che trovata una volta la dimostrazione analitica della identità di quella equazione, il suo teorema avrebbe fatto strada a nuovi ritrovamenti. Io credo vero anche quest' altro suo presentimento, e in appoggio della mia asserzione farò ora vedere che il teorema Euleriano non è che un caso particolare di un teorema più generale il quale si verifica non solo fra l'epoca del principio del moto e quella di un tempo finito dopo la medesima, ma tra due epoche qualunque prese a piacere nella durazione di un moto. È poi un fatto singolare che la dimostrazione del teorema generale riesce più facile della data precedentemente, non avendosi per essa bisogno di ricorrere alle relazioni di Monge, ma soltanto alle seguenti notissime

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2; \quad \alpha_2 = \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3; \quad \alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1$$

$$(23) \quad \beta_1 = \alpha_3\gamma_2 - \alpha_2\gamma_3; \quad \beta_2 = \alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1; \quad \beta_3 = \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2$$

$$\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2; \quad \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3; \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$$

che sussistono insieme colle (2) e non sono che combinazioni delle medesime (si trovano dimostrate in molti libri, ver. gr. nel Lacroix al luogo citato più sopra N. 6.)

13. Le due epoche siano quelle della fine dei tempi t, $t+\theta$. Siano a, b, c le coordinate di un punto qualunque della retta in questione relativamente ai tre assi fissi nel corpo, e mobili con esso; α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3; γ_1, γ_2, γ_3 rispet-

tivamente i tre coseni degli angoli che alla fine del tempo t ciascuno degli assi delle a, delle b, delle c fa cogli assi delle x, y, z fissi nello spazio. Tra queste nove quantità angolari sussistono le equazioni (2), (23), e sono in generale tutte funzioni del tempo.

I tre coseni degli angoli che la retta in questione alla fine del tempo t fa coi tre assi fissi nello spazio, sono espressi dalle formole sopra segnate (4). I tre coseni degli angoli che la stessa retta fa coi tre assi fissi nello spazio alla fine del tempo $t+\theta$, avranno le simili espressioni

$$(24)\qquad \begin{aligned} &\frac{(\alpha_1+\Delta\alpha_1)a+(\beta_1+\Delta\beta_1)b+(\gamma_1+\Delta\gamma_1)c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,;\\ &\frac{(\alpha_2+\Delta\alpha_2)a+(\beta_2+\Delta\beta_2)b+(\gamma_2+\Delta\gamma_2)c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,;\\ &\frac{(\alpha_3+\Delta\alpha_3)a+(\beta_3+\Delta\beta_3)b+(\gamma_3+\Delta\gamma_3)c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{aligned}$$

dove le $\Delta\alpha_1$, $\Delta\beta_1$, ec. sono le differenze finite di cui crescono le α_1, β_1, ec. quando il tempo t si cangia in $t+\theta$; e siccome per supposizione le direzioni della retta nelle due epoche sono fra di loro parallele, queste espressioni (24) debbono eguagliare rispettivamente le (4), e così vengono le equazioni

$$(25)\qquad \begin{aligned} a\Delta\alpha_1+b\Delta\beta_1+c\Delta\gamma_1&=0\\ a\Delta\alpha_2+b\Delta\beta_2+c\Delta\gamma_2&=0\\ a\Delta\alpha_3+b\Delta\beta_3+c\Delta\gamma_3&=0 \end{aligned}$$

le quali tengono il luogo delle (5). Queste come quelle ci serviranno a determinare le a, b, c; e quì pure avrà luogo una equazione di condizione fra le nove differenze finite $\Delta\alpha_1$, $\Delta\beta_1$, $\Delta\gamma_1$, $\Delta\alpha_2$, ec. In varie maniere può trovarsi la mento-

vata equazione di condizione : eccone una. Eliminando la a dalle (25) si hanno le due

$$\frac{b\Delta\beta_1 + c\Delta\gamma_1}{\Delta\alpha_1} = \frac{b\Delta\beta_2 + c\Delta\gamma_2}{\Delta\alpha_2} = \frac{b\Delta\beta_3 + c\Delta\gamma_3}{\Delta\alpha_3},$$

che possono mettersi sotto la forma

$$b(\Delta\beta_1\Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_1\Delta\beta_2) = c(\Delta\alpha_1\Delta\gamma_2 - \Delta\gamma_1\Delta\alpha_2)$$

$$b(\Delta\beta_1\Delta\alpha_3 - \Delta\alpha_1\Delta\beta_3) = c(\Delta\alpha_1\Delta\gamma_3 - \Delta'\gamma_1\Delta\alpha_3).$$

Divise queste l' una per l'altra, si ha la cercata equazione fra le sole differenze finite, ma non ridotta alla forma più semplice. Si ottiene tal riduzione cacciando via primieramente i denominatori ; viene allora una equazione i cui due membri sono due quadrinomj e vedesi che un termine può essere cancellato da ambe le parti perchè eguale. I termini restanti sono tutti divisibili per $\Delta\alpha_1$, dopo di che si ha

$$(26)\qquad \Delta\alpha_1(\Delta\beta_2\Delta\gamma_3 - \Delta\beta_3\Delta\gamma_2) + \Delta\alpha_2(\Delta\beta_3\Delta\gamma_1 - \Delta\beta_1\Delta\gamma_3) + \Delta\alpha_3(\Delta\beta_1\Delta\gamma_2 - \Delta\beta_2\Delta\gamma_1) = 0.$$

Ecco l' equazione che sta invece della (6), e deve sempre esser vera, se debbono sussistere le (25), ossia essere reale il parallelismo supposto.

14. Volendo provare l' identità della equazione (26), ci è d' uopo premettere la ricerca di alcune formole preparatorie. Dai primi rudimenti del calcolo delle differenze otteniamo

$$\Delta\beta_2\Delta\gamma_3 = \Delta(\beta_2\gamma_3) - \beta_2\Delta\gamma_3 - \gamma_3\Delta\beta_2$$

$$\Delta\beta_3\Delta\gamma_2 = \Delta(\beta_3\gamma_2) - \beta_3\Delta\gamma_2 - \gamma_2\Delta\beta_3.$$

Sottraggansi queste equazioni l'una all' altra, e osservando che

i due termini $\Delta(\beta_2\gamma_3)-\Delta(\beta_3\gamma_2)$ possono compenetrarsi nel solo $\Delta(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)$, e che questo per la prima delle (23) diventa $\Delta\alpha_1$, conseguiremo

$$(27)\quad \Delta\beta_2\Delta\gamma_3-\Delta\beta_3\Delta\gamma_2=\Delta\alpha_1-\beta_2\Delta\gamma_3+\beta_3\Delta\gamma_2-\gamma_3\Delta\beta_2+\gamma_2\Delta\beta_3.$$

In maniera affatto simile, servendoci d' altre equazioni fra le (23), proveremo la verità delle seguenti due equazioni

$$(28)\quad \begin{cases} \Delta\beta_3\Delta\gamma_1-\Delta\beta_1\Delta\gamma_3=\Delta\alpha_2-\beta_3\Delta\gamma_1+\beta_1\Delta\gamma_3-\gamma_1\Delta\beta_3+\gamma_3\Delta\beta_1 \\ \Delta\beta_1\Delta\gamma_2-\Delta\beta_2\Delta\gamma_1=\Delta\alpha_3-\beta_1\Delta\gamma_2+\beta_2\Delta\gamma_1-\gamma_2\Delta\beta_1+\gamma_1\Delta\beta_2 \end{cases}$$

ed anche quella delle sei

$$(29)\quad \begin{cases} \Delta\alpha_3\Delta\gamma_2-\Delta\alpha_2\Delta\gamma_3=\Delta\beta_1-\alpha_3\Delta\gamma_2-\gamma_2\Delta\alpha_3+\alpha_2\Delta\gamma_3+\gamma_3\Delta\alpha_2 \\ \Delta\alpha_1\Delta\gamma_3-\Delta\alpha_3\Delta\gamma_1=\Delta\beta_2-\alpha_1\Delta\gamma_3-\gamma_3\Delta\alpha_1+\alpha_3\Delta\gamma_1+\gamma_1\Delta\alpha_3 \\ \Delta\alpha_2\Delta\gamma_1-\Delta\alpha_1\Delta\gamma_2=\Delta\beta_3-\alpha_2\Delta\gamma_1-\gamma_1\Delta\alpha_2+\alpha_1\Delta\gamma_2+\gamma_2\Delta\alpha_1 \\ \Delta\alpha_2\Delta\beta_3-\Delta\alpha_3\Delta\beta_2=\Delta\gamma_1-\alpha_2\Delta\beta_3-\beta_3\Delta\alpha_2+\alpha_3\Delta\beta_2+\beta_2\Delta\alpha_3 \\ \Delta\alpha_3\Delta\beta_1-\Delta\alpha_1\Delta\beta_3=\Delta\gamma_2-\alpha_3\Delta\beta_1-\beta_1\Delta\alpha_3+\alpha_1\Delta\beta_3+\beta_3\Delta\alpha_1 \\ \Delta\alpha_1\Delta\beta_2-\Delta\alpha_2\Delta\beta_1=\Delta\gamma_3-\alpha_1\Delta\beta_2-\beta_2\Delta\alpha_1+\alpha_2\Delta\beta_1+\beta_1\Delta\alpha_2\,. \end{cases}$$

15. Se ora ci poniamo a sostituire nella (26) i valori dati dalle precedenti (27), (28) otteniamo con alcune riduzioni evidenti

$$o = \overline{\Delta\alpha_1}^2 + \overline{\Delta\alpha_2}^2 + \overline{\Delta\alpha_3}^2$$

$$(30) \quad -\beta_1(\Delta\alpha_3\Delta\gamma_2 - \Delta\alpha_2\Delta\gamma_3) - \beta_2(\Delta\alpha_1\Delta\gamma_3 - \Delta\alpha_3\Delta\gamma_1) - \beta_3(\Delta\alpha_2\Delta\gamma_1 - \Delta\alpha_1\Delta\gamma_2)$$

$$-\gamma_1(\Delta\alpha_2\Delta\beta_3 - \Delta\alpha_3\Delta\beta_2) - \gamma_2(\Delta\alpha_3\Delta\beta_1 - \Delta\alpha_1\Delta\beta_3) - \gamma_3(\Delta\alpha_1\Delta\beta_2 - \Delta\alpha_2\Delta\beta_1).$$

Se deriviamo nel sistema delle differenze finite la prima delle equazioni (2), troviamo

$$\overline{\Delta\alpha_1}^2 + \overline{\Delta\alpha_2}^2 + \overline{\Delta\alpha_3}^2 = -2(\alpha_1\Delta\alpha_1 + \alpha_2\Delta\alpha_2 + \alpha_3\Delta\alpha_3).$$

Per questa e per le precedenti (29), la (30) si tramuta nella

$$\begin{aligned}
o = {} & 2\alpha_1\Delta\alpha_1 + 2\alpha_2\Delta\alpha_2 + 2\alpha_3\Delta\alpha_3 \\
& + \beta_1(\Delta\beta_1 - \alpha_3\Delta\gamma_2 - \gamma_2\Delta\alpha_3 + \alpha_2\Delta\gamma_3 + \gamma_3\Delta\alpha_2) \\
& + \beta_2(\Delta\beta_2 - \alpha_1\Delta\gamma_3 - \gamma_3\Delta\alpha_1 + \alpha_3\Delta\gamma_1 + \gamma_1\Delta\alpha_3) \\
(31) \quad & + \beta_3(\Delta\beta_3 - \alpha_2\Delta\gamma_1 - \gamma_1\Delta\alpha_2 + \alpha_1\Delta\gamma_2 + \gamma_2\Delta\alpha_1) \\
& + \gamma_1(\Delta\gamma_1 - \alpha_2\Delta\beta_3 - \beta_3\Delta\alpha_2 + \alpha_3\Delta\beta_2 + \beta_2\Delta\alpha_3) \\
& + \gamma_2(\Delta\gamma_2 - \alpha_3\Delta\beta_1 - \beta_1\Delta\alpha_3 + \alpha_1\Delta\beta_3 + \beta_3\Delta\alpha_1) \\
& + \gamma_3(\Delta\gamma_3 - \alpha_1\Delta\beta_2 - \beta_2\Delta\alpha_1 + \alpha_2\Delta\beta_1 + \beta_1\Delta\alpha_2).
\end{aligned}$$

Ridotta così la (26) alla forma (31), per riconoscere la sua identità non resta che raccogliere i coefficienti totali delle nove differenze finite $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$, $\Delta\beta_1$, ec., e riprodurre la (31) sotto la forma

$$\begin{aligned}
o = {} & \Delta\alpha_1(2\alpha_1 - 2\beta_2\gamma_3 + 2\beta_3\gamma_2) + \Delta\alpha_2(2\alpha_2 - 2\beta_3\gamma_1 + 2\beta_1\gamma_3) + \Delta\alpha_3(2\alpha_3 - 2\beta_1\gamma_2 + 2\beta_2\gamma_1) \\
& + \Delta\beta_1(\beta_1 - \alpha_3\gamma_2 + \alpha_2\gamma_3) + \Delta\beta_2(\beta_2 - \alpha_1\gamma_3 + \alpha_3\gamma_1) + \Delta\beta_3(\beta_3 - \alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2) \\
& + \Delta\gamma_1(\gamma_1 - \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) + \Delta\gamma_2(\gamma_2 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) + \Delta\gamma_3(\gamma_3 - \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1).
\end{aligned}$$

Tali coefficienti totali si riconoscono a colpo d' occhio tutti eguali a zero per effetto delle (23).

È dunque dimostrata in generale sempre sussistente la (26): sono quindi ammissibili le (25), e il parallelismo di una stessa retta alla fine dei tempi t, $t+\theta$ non è più una supposizione ma una verità interessantissima.

16. Rimane, come al N. 10, a determinare la posizione della anzidetta retta relativamente agli assi mobili col corpo, e a quelli fissi nello spazio.

Prendendo a combinare due qualunque delle equazioni (25), per esempio la prima e la seconda, formeremo due equazioni della forma

$$\frac{a}{R} = \frac{b}{S} = \frac{c}{T} \tag{32}$$

essendo

$$\begin{aligned} R &= \Delta\beta_1 \Delta\gamma_2 - \Delta\gamma_1 \Delta\beta_2 \\ S &= \Delta\alpha_2 \Delta\gamma_1 - \Delta\gamma_2 \Delta\alpha_1 \\ T &= \Delta\alpha_1 \Delta\beta_2 - \Delta\beta_1 \Delta\alpha_2 . \end{aligned} \tag{33}$$

Le (32) ci faranno conoscere le espressioni dei tre coseni degli angoli che la nostra retta fa cogli assi fissi nel corpo e mobili nello spazio: queste espressioni sono

$$\frac{R}{\sqrt{R^2+S^2+T^2}}\,;\quad \frac{S}{\sqrt{R^2+S^2+T^2}}\,;\quad \frac{T}{\sqrt{R^2+S^2+T^2}}\,. \tag{34}$$

Le espressioni poi dei tre coseni degli angoli che la detta retta fa cogli assi fissi nello spazio, saranno, come già le (4)

$$(35)\qquad \frac{\alpha_1 R+\beta_1 S+\gamma_1 T}{\sqrt{R^2+S^2+T^2}} \qquad \frac{\alpha_2 R+\beta_2 S+\gamma_2 T}{\sqrt{R^2+S^2+T^2}} \qquad \frac{\alpha_3 R+\beta_3 S+\gamma_3 T}{\sqrt{R^2+S^2+T^2}}.$$

Ora se poniamo

$$(36)\qquad \begin{aligned} \alpha_1 R+\beta_1 S+\gamma_1 T &= H \\ \alpha_2 R+\beta_2 S+\gamma_2 T &= L \\ \alpha_3 R+\beta_3 S+\gamma_3 T &= K \end{aligned}$$

potremo dedurne in virtù delle (2)

$$R^2+S^2+T^2=H^2+L^2+K^2$$

e quindi, senza cambiamento di valore, sostituire alle (35) le formole seguenti

$$(37)\qquad \frac{H}{\sqrt{H^2+L^2+K^2}};\quad \frac{L}{\sqrt{H^2+L^2+K^2}};\quad \frac{K}{\sqrt{H^2+L^2+K^2}};$$

17. Vogliamo ora provare che quando il tempo fra le due epoche è piccolissimo, l'asse Euleriano si confonde coll'asse d'istantanea rotazione. A questo oggetto gioverà fare una breve digressione per trovare in maniera nuova e semplicissima le tre formole fondamentali pel moto di rotazione dei corpi solidi, ed alcune altre che ci sono necessarie all'intento che abbiamo di mira.

Facciamo

$$(38)\qquad \begin{aligned}\xi &= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c\\ \eta &= \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c\\ \zeta &= \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c\end{aligned}$$

per cui le equazioni (1) diventano

$$x = f + \xi\,; \qquad y = g + \eta\,; \qquad z = h + \zeta.$$

Le ξ, η, ζ varieranno col tempo che entra nelle α_1, β_1, γ_1, α_2 ec., ma non nelle a, b, c relative agli assi mobili col corpo.

Convenendo d' indicare cogli apici le derivate per t, dedurremo dalle (38)

$$\begin{aligned}\xi' &= \alpha'_1 a + \beta'_1 b + \gamma'_1 c\\ \eta' &= \alpha'_2 a + \beta'_2 b + \gamma'_2 c\\ \zeta' &= \alpha'_3 a + \beta'_3 b + \gamma'_3 c.\end{aligned}$$

Dalle (38) si deducono anche per effetto delle (2) le inverse

$$\begin{aligned}a &= \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta\\ b &= \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta\\ c &= \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta.\end{aligned}$$

Mettiamo questi valori di a, b, c nelle precedenti, otterremo

$$(39)\qquad \begin{aligned}\xi' &= (\alpha_1\alpha'_1 + \beta_1\beta'_1 + \gamma_1\gamma'_1)\xi + (\alpha_2\alpha'_1 + \beta_2\beta'_1 + \gamma_2\gamma'_1)\eta + (\alpha_3\alpha'_1 + \beta_3\beta'_1 + \gamma_3\gamma'_1)\zeta\\ \eta' &= (\alpha_1\alpha'_2 + \beta_1\beta'_2 + \gamma_1\gamma'_2)\xi + (\alpha_2\alpha'_2 + \beta_2\beta'_2 + \gamma_2\gamma'_2)\eta + (\alpha_3\alpha'_2 + \beta_3\beta'_2 + \gamma_3\gamma'_2)\zeta\\ \zeta' &= (\alpha_1\alpha'_3 + \beta_1\beta'_3 + \gamma_1\gamma'_3)\xi + (\alpha_2\alpha'_3 + \beta_2\beta'_3 + \gamma_2\gamma'_3)\eta + (\alpha_3\alpha'_3 + \beta_3\beta'_3 + \gamma_3\gamma'_3)\zeta.\end{aligned}$$

Ora è notissimo che insieme colle (2) sussistono le altre sei

$$
(40)\quad
\begin{aligned}
&\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1\\
&\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1\\
&\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1\\
&\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0\\
&\alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3=0\\
&\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0
\end{aligned}
$$

le quali, derivate per t, somministrano

$$(41)\quad \alpha_1\alpha'_1+\beta_1\beta'_1+\gamma_1\gamma'_1=0$$

$$(42)\quad \alpha_2\alpha'_2+\beta_2\beta'_2+\gamma_2\gamma'_2=0$$

$$(43)\quad \alpha_3\alpha'_3+\beta_3\beta'_3+\gamma_3\gamma'_3=0$$

$$(44)\quad \alpha_2\alpha'_1+\beta_2\beta'_1+\gamma_2\gamma'_1=-w$$

$$(45)\quad \alpha_1\alpha'_3+\beta_1\beta'_3+\gamma_1\gamma'_3=-v$$

$$(46)\quad \alpha_3\alpha'_2+\beta_3\beta'_2+\gamma_3\gamma'_2=-u$$

avendo posto

$$(47)\quad w=\alpha_1\alpha'_2+\beta_1\beta'_2+\gamma_1\gamma'_2$$

$$(48)\quad v=\alpha_3\alpha'_1+\beta_3\beta'_1+\gamma_3\gamma'_1$$

$$(49)\quad u=\alpha_2\alpha'_3+\beta_2\beta'_3+\gamma_2\gamma'_3.$$

Per sì fatte equazioni le (39) si tramutano immediatamente nelle tre

$$(50)\qquad \begin{aligned} \xi' &= \zeta v - \eta w \\ \eta' &= \xi w - \zeta u \\ \zeta' &= \eta u - \xi v, \end{aligned}$$

che sono le tre formole notissime e fondamentali pel moto di rotazione de' solidi, significando w, v, u le velocità angolari intorno agli assi delle ζ, delle η, e delle ξ.

Dalle tre equazioni (41), (44), (48) moltiplicate rispettivamente per $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, e sommate: moltiplicate poi per $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, e in ultimo per $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, dedurremmo mediante l'uso delle (2),

$$(51)\qquad \begin{aligned} \alpha'_1 &= \alpha_3 v - \alpha_2 w \\ \beta'_1 &= \beta_3 v - \beta_2 w \\ \gamma'_1 &= \gamma_3 v - \gamma_2 w. \end{aligned}$$

Dalle tre equazioni (47), (42), (46) dedurremo similmente

$$(52)\qquad \begin{aligned} \alpha'_2 &= \alpha_1 w - \alpha_3 u \\ \beta'_2 &= \beta_1 w - \beta_3 u \\ \gamma'_2 &= \gamma_1 w - \gamma_3 u \end{aligned}$$

E dalle tre (45), (49), (43)

$$(53)\qquad \begin{aligned} \alpha'_3 &= \alpha_2 u - \alpha_1 v \\ \beta'_3 &= \beta_2 u - \beta_1 v \\ \gamma'_3 &= \gamma_2 u - \gamma_1 v. \end{aligned}$$

Queste (51), (52), (53) ci serviranno a provare la proposizione enunciata sul principio di questo numero.

18. Quando il valore del tempo θ che separa la due epoche, è piccolissimo, svolgendo col teorema di Taylor le differenze finite, potremo ritenerne i soli primi termini. Avremo allora dalle (33)

$$R = \theta^2(\beta'_1\gamma'_2 - \gamma'_1\beta'_2)$$

$$S = \theta^2(\alpha'_2\gamma'_1 - \gamma'_2\alpha'_1)$$

$$T = \theta^2(\alpha'_1\beta'_2 - \beta'_1\alpha'_2).$$

E ponendo i valori dati dalle (51), (52), dopo alcune riduzioni che riescono facili se si tengono sott'occhio le (23), troveremo

$$R = \theta^2 w(\alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w)$$

$$S = \theta^2 w(\beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w)$$

$$T = \theta^2 w(\gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w).$$

Quindi le (36) per effetto delle (40) si ridurranno

$$H = \theta^2 w.u\,; \qquad L = \theta^2 w.v\,; \qquad K = \theta^2 w.w\,,$$

e le espressioni (37) dei tre coseni degli angoli che l'asse Euleriano fa rispettivamente cogli assi delle x, y, z diventeranno

$$\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\,; \quad \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\,, \quad \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\,.$$

Ora queste stesse espressioni sono, come è noto, quelle dei tre coseni degli angoli che alla fine del tempo t fa coi tre assi fissi l' asse d' istantanea rotazione. È per tal modo provato l' asserito teorema.

Dobbiamo poi credere che d' altre proprietà interessanti sarà contraddistinto l' asse Euleriano che formò il soggetto di questa Nota; ed Eulero stesso ne' due Capitoli citati ci fa travedere di qual genere potrebbero essere le ulteriori nostre ricerche. Io però penso che il problema veramente interessante sia l' inverso di quello trattato finora. Invece di fissare le due epoche, e cercare la retta che nella seconda epoca torna a prendere la direzione già avuta nella prima, sarebbe a fissarsi per la prima epoca una retta qualunque, e a cercare dopo qual tempo una tal retta tornerà parallela a se stessa; anzi sarebbero a cercarsi i successivi periodi di tempo alla fine di ciascuno dei quali si ripristina il parallelismo. Le precedenti formole debbono riuscire di gran sussidio per la soluzione di un tale problema.

MEMORIA

SULLA RELAZIONE TRA LE ACQUE DELL'ARNO E QUELLE DELLA CHIANA

DEL CONTE VITTORIO FOSSOMBRONI

Ricevuta adì 31 Gennajo 1838.

IDEE GENERALI SULLA QUESTIONE

§ 1. Nel mio libro sulla Val di Chiana pubblicato l'anno 1789 esposi come potè anticamente spagliare l'Arno nel Piano di Arezzo, ed introdursi con una parte delle sue acque in Val di Chiana per andare a scaricarsi nel Tevere, dirigendone tutto il rimanente per Firenze al mare. Molti anni dopo un antico Documento dissotterrato tra le polveri di negletto archivio pose questa verità in tanta evidenza che un celebre Professore di Pisa, oggi defunto, il quale aveva dato indizio di esserne in dubbio, volle accertarmi in iscritto di averne indi ottenuta intima persuasione. E due celebratissimi uomini quali sono i Signori Humboldt, e Prony ne fecero soggetto di particolari loro lavori che pubblicarono nel Giornale della Scuola Politecnica, ove si trova che le idee da me esternate sù i cangiamenti singolarissimi, occorsi nell'Arno vengono confermate dal Sig. Humboldt con fatti analoghi da lui osservati nel gran Fiume Orenoco; ed inoltre che il Sig. Prony assegna il nome di Ramo Teverino dell'Arno a quelle acque che da questo Fiume entravano in Val-di-Chiana.

2. Senza fermarsi sulle vicissitudini occorse per opera della Natura, quanto dell'Arte nella Val di Chiana, interessa oggi l'osservare che il Ramo Teverino dell'Arno non esiste più, e che le acque della Val di Chiana dall'argine di sepa-

razione di là da Chiusi fino all'Arno sotto Arezzo compongono tutte insieme un influente di questo fiume.

3. L'Alveo che costituisce il recipiente comune di tutte le acque della Chiana ha tanta pendenza da lasciarvi correre le acque chiare, ma non ha la pendenza necessaria per condurre fino all'Arno le grosse materie, e quindi ha avuto luogo l'abitudine stabilita di trattenere in colmate i Fiumi che discendono nella valle ritraendone quindi due vantaggi, cioè quello di rialzare la bassa pianura colle torbe ivi depositate, e l'altro di introdurre nel canale longitudinale della Valle acque per quanto è possibile depurate, e per conseguenza capaci di correre ancora in un alveo poco declive come è quello.

4. Continuando un siffatto sistema una campagna inculta ed infetta è divenuta oggi una delle più floride, e salubri Provincie del Granducato.

5. Il progetto fondamentale di questa maravigliosa bonificazione porta che si continui a tenere i fiumi in colmata fintanto che la terra depositata sopra la pianura abbia terminato d'inverterne almeno per una gran parte la pendenza rendendola declive da mezzogiorno verso tramontana, mentre lo fu negli antichi tempi da tramontana verso mezzogiorno, e ciò per la ragione riconosciuta, e dimostrata la prima volta dal Torricelli cioè, che per la facilità dello sgombro delle acque fluviatili, e campestri è necessario che non solo abbia la declività conveniente il canale longitudinale, ma ancora tutta la campagna che in esso scarica le proprie acque.

6. È già qualche tempo che si manifesta in alcuni dell'inquietudine perchè volendo trattenere per mezzo delle colmate le torbe di questi fiumi, e continuare il rialzamento della campagna vengono ad assoggettarsi allo spaglio delle acque, dei terreni che per quanto non abbastanza elevati, sono non ostante capaci di coltivazione, e non affatto insalubri, onde si va incontro a perdere per un certo numero di anni il frutto di quei terreni i quali inoltre debbono talvolta o comprarsi,

o concedere in baratto ai proprietarj di essi altri terreni di già bonificati.

7. E nasce ancora un' altra causa di inquietudine qualora volessero condursi questi fiumi in luoghi palustri come sarebbe verso il Lago di Montepulciano, mentre dovendosi in tal caso prolungare gli alvei, tale prolungamento esige di rialzare gli argini nei tronchi superiori con spesa considerabile, e con rischio di frequenti rotture, tosto che manchi un' assidua vigilanza che le prevenga.

8. Tutto ciò non fu ignoto, allorchè nel 1789 io pubblicai il progetto fondamentale osservato fino ad ora, ma fu creduto che le spese a tal' uopo occorrenti qualora fossero per venir fatte con amore e sagacità, sarebbero per essere ben compensate dal consolidamento che ne verrebbe a questa Provincia destinata per mezzo di tal sistema a perpetuare una considerabile conquista per il Gran-Ducato. E qui è da notarsi di passaggio che se tale conquista fosse fatta da un particolare, converrebbe per apprezzarne l' utilità calcolare a qual frutto venisse ad essere impiegato il capitale speso a tale oggetto, e se il frutto non giungesse circa al 4 per cento, potrebbe l'impresa da quel particolare essere riguardata come poco vantaggiosa, ma trattandosi del Governo il quale deve stabilire i suoi disegni sopra un' ampla scala, quando ancora resultasse per esso Governo il denaro impiegato all'uno, o due per cento solamente, sarebbe l' impresa da riguardarsi come utilissima per due ragioni. La prima perchè il denaro speso ha circolato per le mani dei sudditi, la seconda perchè oltre al frutto agreste il Governo dilata tanto più i confini della sua Sovranità, quanto più sono le popolazioni alle quali procura esso un clima salubre, ed una facilità di reciproche communicazioni. La diversità tra le oscure speculazioni private, e le imprese luminose dei Governi fu sempre bene apprezzata in Toscana, e giova il citarne un esempio superiore ad ogni eccezione. Allorchè il Gran-Duca Leopoldo Primo di gloriosa memoria volle promovere efficacemente la bonificazione di Val

di Chiana, il primo passo che fece fu di rimuoverne gli affittuari che sfruttavano quelle campagne. Ecco le parole con le quali principia il relativo suo Motuproprio dato nel 1781.

" Sua Altezza Reale, avendo preso in considerazione lo
" stato della Provincia di Val di Chiana, e volendo che an-
" che l' Ordine di S. Stefano per la cospicua estensione di
" terreno che vi possiede contribuisca alla maggior salubrità
" dell' aria, popolazione, ed aumento di prodotti di quella
" Provincia, che non è stato sin' ora ottenuto con le reite-
" rate condotte d' affitto dei beni dell' Ordine medesimo, e
" volendo altresì che i beni che l' Ordine vi possiede ricc-
" vano tutto il miglioramento possibile con i nuovi lavori, e
" nuove fabbriche senza dipendenza, e contrasto dell' inte-
" resse temporario di un conduttore, comanda . . . .

9. Con queste vedute tanto idrauliche, quanto amministrative sono molti anni che il fiume Esse del Monte S. Savino, ed il fiume Foenna sono stati trattenuti in colmata sopra terreni più o meno coltivati, e la protrazione dei loro alvei ha obbligato a rialzare degli argini con dispendio considerabile.

10. Ho nominato a preferenza d' altri questi due fiumi perchè la portata delle loro acque, e le condizioni loro li rendono tali da influire particolarmente nelle relazioni che tra le acque della Chiana, e quelle dell'Arno debbono aver luogo, allorchè la bonificazione di quella Provincia sarà più di quanto è adesso approssimata al suo perfezionamento, e per conseguenza assicurata dal pericolo di fare dei passi retrogradi perdendo ciò che con gravi e diuturni dispendj si è potuto mettere in essere.

Fino ad ora la Val di Chiana ha scaricate nell'Arno le sue acque depurate dalle grosse materie, ma come fu preveduto da me nel 1789, verrà il giorno in cui ancora le materie trasportate da quei fiumi potranno riunirsi nel longitudinale recipiente della Val di Chiana, e formare un influente che dall' argine di separazione fino all'Arno tributerà a questo

fiume le sue acque insieme con la maggior parte delle materie che trasporteranno i suoi influenti.

11. Avvertii fino d' allora, ed ho ripetuto ancora successivamente che per stabilire questo cangiamento di relazioni tra le acque della Chiana, e quelle dell'Arno (cangiamento sostanzialissimo perchè si tratta di ridurre una diramazione di un fiume ad un influente del fiume stesso) era necessario che in questo fiume non fossero anteriormente neglette quelle disposizioni che il celebre Viviani aveva fino dai suoi tempi prescritte, ed altre ancora che io ho creduto doversi prescrivere per ovviare ai riempimenti dell'alveo dell'Arno, riempimenti che oltre a tanti altri danni minacciano ogni dì più l' interessantissima città di Firenze.

12. Questi semplici accenni servono a far comprendere quanto sia necessario discutere sul progressivo andamento delle connessioni che si vanno giornalmente complicando tra l'Arno e la Chiana. La sistemazione più convenevole di tali rapporti condurrà nello stato più plausibile due interessanti Provincie del Gran-Ducato, quale sono il Val d'Arno, e la Val di Chiana. Per esaurire siffatta discussione dividerò questa Memoria in tre parti; nella prima parlerò delle acque della Chiana; nella seconda di quelle dell'Arno, e nella terza riassumerò le mie idee in proposito, esponendo quale per me sarebbe la conclusione da adottarsi.

PARTE PRIMA

DELLE ACQUE DELLA CHIANA

13. Se potesse eseguirsi un considerabile sbassamento nella così detta Chiusa dei Monaci, è indubitato che l' alveo del canal maestro, posto che col ferro, e col fuoco si fossero annullati gli ostacoli di pietra, e di terra vergine che esistono superiormente alla detta chiusa, il canal maestro acquisterebbe una pendenza assai maggiore di quella che ha adesso, princi-

piando dal Callone di Valiano, e sarebbe in conseguenza capace di trasportare fino all'Arno, se non le più grosse ghiare, almeno le minori, e le materie arenose, e terrose.

14. Quindi è che si presenterebbe il lusinghiero prospetto di risparmiare le spese per le colmate, e per molte arginazioni, ma di fronte a questo prospetto conviene dare valutazione al prospetto degli inconvenienti che in virtù del sopraccennato sbassamento risulterebbero.

15. Questi inconvenienti sono stati già fino dai tempi del Torricelli più, o meno descritti da tutti i Matematici, Viviani, Cassini, Grandi, Perelli, Fantoni ec. Onde la chiusa dei Monaci dal tempo del Torricelli è rimasta quasi intatta fino al presente, ed ha subito soltanto quel piccolo sbassamento che era coerente al mio piano generale del 1789.

16. Fu proposto allora che quando una porzione della Valle fosse abbastanza bonificata, e non occorresse più tenere in colmata i piccoli torrenti che in essa trascorrono, questi si lasciassero liberamente con le loro minute ghiare, ed altre grosse arenose materie entrare nel canal-maestro, il quale si rendesse capace di scaricare il tutto nell'Arno mediante un aumento di pendenza, che se gli procurerebbe con un proporzionato sbassamento sulla cresta della pescaja dei Monaci, riducendo in tal guisa quel respettivo tronco di canal-maestro a godere delle qualità di un vero tronco di fiume.

17. In virtù di una depressione di circa a due braccia eseguita anni sono alla detta pescaja si può riguardare in oggi l'alveo della Chiana che di lì arriva fino presso alla tenuta di Cesa, ridotto nelle descritte condizioni, e capace di trasportare le materie che i rispettivi laterali influenti vi introducono. Ma distruggere adesso totalmente la pescaja dei Monaci, e la barriera sassosa che è presso di essa, non meno che escavare il fondo di terra vergine che per un tratto di quel tronco fu già ritrovato esistere, sarebbe opera, che per quanto io credo, oltre al porre un ostacolo ai progressi di quella ancora incompleta bonificazione, esporrebbe al pericolo di perdere

gran parte delle conquiste già fatte, tanto rispetto all' estensione di terra coltivabile, quanto alle reciproche communicazioni delle diverse parti di quella Provincia, ed alla salubrità del suo clima.

18. Il quadro degli inconvenienti che io temerei sembra a me che venga con evidenza presentato nel Capitolo settimo della seconda Parte del mio libro sopra la Val di Chiana, al quale adunque io mi riporto senza farne quì una troppo minuta repetizione.

19. Io comprendo bene che il lasso di un mezzo secolo ormai quasi decorso ha dovuto coi vastissimi bonificamenti eseguiti indurre non poche variazioni in molte circostanze locali, ma il fondo della questione sembra a me che resti in gran parte il medesimo, e tale da dissuadere la totale demolizione di cui si tratta.

20. E in proposito di quanto fu allora rilevato del tortuoso andamento, che distrutta la chiusa dei Monaci prenderebbe l'alveo oggi pressochè rettilineo del Canale della Chiana, io citerò un fatto esperimentale che allora non poteva citarsi perchè non era percorso un tempo sufficiente per metterlo in piena evidenza.

21. Il Torrente Lota sboccava nel canal-maestro in un punto assai superiore a quello in cui sbocca al presente, e produceva in quell'Alveo un ridosso considerabile di grosse materie dal medesimo ivi depositate, onde nella riva opposta si pronunziava una corrosione coll'annunzio di una tortuosità molto dannosa. Tuttociò fu deciso dal Matematico Perelli che dovesse impedirsi, portando quel torrente con nuova inalveazione a sboccare presso la chiusa dei Monaci, ove la Chiana animata dalla caduta aveva una velocità maggiore di quella che competeva alle condizioni intrinseche del suo alveo, e per conseguenza capace di impedire che si fermassero ivi nel suo alveo i depositi del Lota, come in effetto si vede essere accaduto.

22. Io comprendo bene che togliendo la chiusa dei Mo-

naci, e gli ostacoli esistenti al disopra di essa, il canal-maestro acquisterebbe una declività considerabile, e capace di far concepire alle sue acque tanta velocità da trasportare fino all'Arno non poche delle grosse materie tributategli dai suoi influenti. Ma credo altresì ben lontano dall'esser dimostrato che allo sbocco di ciascheduno di essi influenti possa impedirsi che si stabilisca qualche ridosso, e qualche tortuosità, e siccome questi torrenti sono molti, altrettanti devono essere i ridossi, e le tortuosità, che renderanno l'alveo della Chiana assai difficile a regolarsi in guisa da impedire che le sue acque non attentino alla sicurezza dei vasti possessi con tanta fatica, e tante spese stabiliti nella adiacente bassa pianura già paludosa.

23. E coerentemente a quanto ho avvertito nel sopracitato capitolo settimo, la corrosione delle accennate terre bonificate porterebbe allo scoprimento di molti degli antichi fondi palustri venendosi per conseguenza a togliere a quella Provincia molte terre coltivabili, e nel tempo stesso quella salubrità di clima in cui oggi è pervenuta a costituirsi.

24. E qualora volesse osservarsi che le descritte tortuosità e corrosioni si incontrano in tutti i fiumi, e non per questo siamo nel caso di riguardare come di cattiva condizione le Provincie da essi irrigate; io risponderò che allora si tratta di fiumi naturalmente formati per lo più da una sorgente Alpina, e poi dalla riunione dei torrenti, e rivoli che lateralmente influiscono in un alveo esistente lungo la più bassa linea longitudinale di quella tal Provincia, la quale ha per conseguenza la sua superficie pendente nel senso medesimo, e presso appoco analogamente alla pendenza del fondo di quell'alveo recipiente generale di tutte le acque della Provincia stessa.

25. Ciò posto, non sarà difficile il persuadersi che le cose anderebbero assai differentemente in Val di Chiana, dove il recipiente comune delle sue acque avrebbe una cadente per se stessa considerabile ma ben differente, e ben lungi dall' essere analoga alla giacitura della adiacente campagna, che

per un certo tratto avrebbe nel senso medesimo una qualche tenuissima pendenza, ma per la maggior parte questa pendenza resterebbe affatto insensibile, e dimostrerebbe che quel fiume è un recipiente generale, artificialmente, e non naturalmente costituito, e per conseguenza gli espedienti che riescono utili nel rimediare le corrosioni, e le tortuosità che sopravvengono nel primo dei due accennati casi, non avrebbero l'istessa sorte volendo applicarli al secondo, cioè all'artificiale recipiente di tutte le acque di Val di Chiana.

26. Io desidero che queste vedute sieno molto bene ponderate, e discusse avanti di condannarle, e senza che io mi diffonda ulteriormente sull'illustrazione di esse credo che una qualche cognizione delle teorie, e delle pratiche idrometriche basterà per convincere quanto sia differente il trattamento con cui può tenersi in regola un fiume che sia il natural recipiente dei torrenti, e rivoli di un'intiera Provincia, dal trattamento che può adattarsi al nuovo fiume Chiana che sarebbe artificialmente prodotto con la demolizione della Chiusa dei Monaci.

27. Si consideri eseguito lo sbassamento di tutta la Chiusa predetta, e della barriera di pietra, e di terra vergine che esiste al disopra di essa, e che sia percorso quel lasso di tempo che sarebbe necessario, acciò l'alveo della Chiana si approssimase allo stabilimento della sua nuova considerabile cadente dal callone di Valiano fino all'Arno. Si manifesterà allora la necessità di provvedere ai fondamenti di quasi tutti i Ponti esistenti nell'attuale canal-maestro. Questi Ponti sono non meno di nove, e servono alle più importanti communicazioni fra i Paesi di Val di Chiana, ed il volerli ristabilire fondandoli in un piano più basso, e meno solido di quello che gli sostiene adesso, sarà opera dispendiosissima ed impegnosa.

28. Tutti i torrenti che influiranno nel nuovo fiume, o si vorranno lasciare sboccare in esso liberamente, o si crederà utile di sostenerli a qualche distanza con delle solide pescaje

di materiale. Nel primo caso ad ogni sbocco si formerà un ridosso di grosse materie nell'alveo, e si preparerà una corrosione sulla riva opposta e si sono già accennati gli inconvenienti che quindi ne deriveranno. Di più in questo primo caso gl'influenti sbassando il loro sbocco escaveranno a proporzionata profondità per lungo tratto il respettivo alveo. Allora gli sbrotamenti delle ripe, e le tortuosità che in ciascheduno di essi avranno luogo, produrranno la perdita di molti terreni coltivati, e la bassa pianura sarà deturpata da frequenti intersecazioni di alvei profondi, ed instabili, nuova cagione di interrotte communicazioni, attesa la difficoltà di stabilirvi i Ponti necessari a tal nopo. Per farsi una chiara idea di tutto ciò si osservi la profondità a cui si sono incassati i torrenti che traversano la pianura di Arezzo, dopochè l'Arno comune loro recipiente si abbassò spianandosi sulla Chiusa di Monte. Ed è da osservarsi ancora come sia ridotta la campagna dalla pescaja dei Monaci fino all'Arno.

29. Quì non bisogna omettere di considerare che questi incassamenti nella pianura Aretina, e nel tronco di Chiana ridotto a torrente dalla pescaja dei Monaci fino all'Arno, sono di larghezza assai grande e si sostengono all'altezza di cinquanta, ed anche cento braccia, perchè costituiti in mezzo a strati composti, o di ghiara, o di terra solida, e buona. Ma se incassamenti anche di molto minore larghezza ed altezza avranno luogo nei torrenti di Val di Chiana, si scuoprirà l'antico fondo cuoroso con danno del clima specialmente quando i torrenti saranno asciutti, e con la sicurezza di vedere le ripe sfaldarsi per l'instabilità degli scoperti strati inferiori, e ridursi quegli alvei di larghezza eccessiva, e con ridossi irregolari nel fondo, del chè sarebbero conseguenze la perdita di molti terreni coltivati, e l'impraticabilità di quella adesso deliziosa pianura. Ed osserverò di passaggio che la stabilità delle ripe nei profondati torrenti della pianura Aretina ha dato luogo alla scoperta delle tante ossa fossili di Elefante, di Mastodonte, di Balena ec. esistenti sotto la superficie della

pianura stessa, come si trovano oggetti simili sotto la superficie di quella porzione di Val d'Arno i di cui torrenti sono profondati in seguito dello sbassamento occorso all'Arno al punto dell'Incisa, come sono profondati i torrenti Aretini per lo sbassamento dello stesso Arno al punto della pescaja di Monte.

30. Nel caso secondo, cioè qualora per evitare alcuno dei sopra descritti inconvenienti si volesssero sostenere i fondi degli alvei degli influenti con delle pescaje murate, si avverta che queste non possono stabilirsi precisamente allo sbocco nel comune recipiente, ma bisogna situarle secondo le circostanze trecento e cinquecento, ed anche più braccia distanti dal medesimo. E tutto quel tratto intercetto fra la linea di queste pescaje, ed il nuovo fiume Chiana sarà intersecato da altrettanti tronchi di torrenti sbrotati, ed enormemente allargati nelle loro ripe di maniera, che oltre a una considerabile spesa per costruire e mantenere quelle chiuse, vi sarà la perdita di tutte le più fertili strisce di terra che adesso sono da ambe le parti adiacenti al canale maestro.

31. Io sono certo che la somma di queste spese, e di queste perdite comparirà assai imponente per chiunque voglia farsi il carico di portarle a calcolo, ed abbia inoltre l'avvertenza di considerare che non si tratta di una spesa unica la quale fatta una volta dispensi dall' occuparsi in seguito di quegli oggetti, poichè ciascheduno di essi ha bisogno di essere invigilato, restaurato, e tal volta rinnovato ancora, trattandosi specialmente di lavori e di opere esposte al continuo movimento delle acque.

32. Comprendo bene che nel sistema attuale si sopportano le spese per preparare i recinti delle colmate, e per rialzare le arginature dei fiumi ogni volta che per condurli a colmare debba allungarsi il loro alveo. Ma queste spese non compariranno superiori a quelle sopramenzionate se si vorrà avvertire. Primo: che quando si porta un fiume a colmare una estensione di terra, la perdita del frutto di essa (la qual

perdita dopo i sistemi adottati da molti anni in Val-di-Chiana non è nè continua nè totale) viene compensata pel frutto che si ritira da una porzione presso che eguale di terra dalla quale si levano le acque per essere già colmata, ed attivata ad una coltivazione molto più produttiva di quello che fosse prima. Ed inoltre che le arginazioni del fiume possono occorrere più alte se esso venga ad allungarsi, ma che qualora la sua linea si scorci perchè la nuova colmata sia meno lontana della precedente, le arginature occorreranno minori. Secondo: che la Provincia con questo sistema non è esposta alle fondamentali, e progressive deteriorazioni che si debbono presumere in conseguenza delle operazioni precedentemente accennate. Terzo: che in questa maniera il valore territoriale della Provincia anderà sempre crescendo, perchè si continuerà ad arricchire con le terre vegetabili che le acque trasportano dalle adiacenti sue montagne e colline, laddove nell' ipotesi precedente questa ricchezza sarà portata nell'Arno (che vedremo come possa essere disposto a riceverla) e totalmente perduta per lei. Quarto: finalmente che con questo sistema la bassa pianura di Val-di-Chiana si anderà avvicinando a quella disposizione della sua superficie pendente da mezzo giorno verso tramontana, in virtù della quale l' andamento delle sue acque sarà sempre più felice, e meno soggetto alle prescrizioni dell' arte, perchè il nuovo fiume Chiana anderà acquistando le qualità di un fiume naturale, e non artificiale come sarebbe adesso. E tutto ciò sarebbe conforme a quanto osservò il primo il Torricelli sulla necessità di accompagnare la pendenza dell' alveo del recipiente comune di tutte le acque di una Provincia con una analoga pendenza della superficie della Provincia medesima.

33. Questo grand' uomo ebbe probabilmente, per adottare siffatta opinione due motivi, il primo, il meccanismo dei movimenti descensivi delle acque, ed il secondo la superficie paludosa di una parte di quella bassa campagna; ma questo secondo motivo non dovette esser quello che lo stabilì in

siffatta persuasione, primieramente perchè non ne dà il minimo accenno, secondariamente perchè i molti torrenti torbidi che da tanto tempo spagliavano irregolarmente in quella bassa pianura, avevano già sparsa gran qnantità di terra sopra gli antichi fondi cuorosi, onde potendo dare un esito alle acque non sarebbero mancati molti terreni atti alla coltivazione.

34. Che il primo dei due sopraccennati motivi fosse quello che determinò l'opinione del Torricelli contro la demolizione della pescaja dei Monaci, resulta dalle ingegnose teorie idrauliche di quel grand' uomo, e dalla esemplificazione che egli fa per dimostrare il suo assunto, supponendo ingombrato dall' acqua il pavimento della Cattedrale di Firenze, ed osservando che il tempo necessario per sgombrarnelo non sarebbe sensibilmente diminuito, qualora nel mezzo del pavimento stesso fosse longitudinalmente escavato un canalino angustissimo riguardo alla larghezza del pavimento, il quale resterebbe sempre orizzontale, quantunque il canalino costruito fosse dotato di una considerabile pendenza.

35. Sebbene la Val-di-Chiana sia oggi ben lungi dallo stato palustre in cui era ai tempi del Torricelli, non di meno quella gran parte della superficie di essa che ha poco o nulla di pendenza verso l'Arno, sarà sempre relativamente a dar esito alle sue acque subordinata più, o meno alle regole, ed osservazioni del Torricelli, e per conseguenza quanto più per mezzo delle colmate si rialzerà la sua superficie, tanto più le sopra descritte regole potranno divenire disapplicabili.

36. E se volesse insistersi sulla pena che danno le spese delle colmate, e delle arginature, e sulla soddisfazione che si avrebbe rilasciando alla natura il sistema di quelle acque col procurargli un rapido corso nell'attual canal maestro, demoliti gli ostacoli che esistono alla sua estremità, io pregherei di meditare su quanto ho osservato ai paragrafi 24 e 25, al contenuto dei quali aggiungerei che la Val-di-Chiana dopo che ebbe perduto il ramo teverino dell'Arno, abbandonata in tutto alla natura è stata in una condizione la più miserabile,

e quanto più fu assistita dall'arte, tanto più ha avuto di prosperità, prosperità giunta ormai tanto prossima al suo perfezionamento, che sarebbe più difficile e dispendioso il distruggerla, di quello che sia per essere il condurla al suo compimento. Quindi è che un'operazione la quale avesse per oggetto di porla di nuovo in stato indipendente dall'arte, sarebbe sommamente pregiudicievole per la perdita di molti acquisti fatti, e di tutti quelli da farsi.

37. Se per le cose fin quì dette non sarebbe plausibile adottare un sistema di essiccazione invece di quello già tanto luminosamente sperimentato utile, della alluvione; non è per questo che non possa aver luogo in certi determinati tempi qualche moderata depressione nella pescaja dei Monaci, avvertendo per altro che per ora non potrebbero mai tali depressioni essere tanto grandi da permettere che l'Esse del Monte, e molto meno la Foenna venissero liberamente introdotte nel canal maestro, e per conseguenza si risparmiassero le spese che occorrono per tenere questi due fiumi in colmata.

38. Non bisogna perder di vista che sarebbe inutile il deprimere due, o tre braccia la pescaja dei Monaci senza sbassare corrispondentemente ancora la barriera pietrosa, e lo strato di terra vergine che gli sovrastano. Ma prima di eseguire tali operazioni giudicherei ben fatto l'assicurarsi, se i fondamenti dei Ponti di Arezzo, di quello di Chiani, e di quello della Nave per causa dello sbassamento del fondo del canal maestro fossero per essere esposti a rovina.

39. Qualora questo pericolo non si verificasse, io non difficulterei ad ammettere una depressione di circa due braccia, lo che prolungherebbe alquanto il tronco del canal maestro ridotto fino da ora alla condizione di fiume. Sono così tenui i torrenti laterali in quella porzione di campagna che potrebbero senza danno introdursi liberamente tutti nell'alveo di esso tronco di fiume.

40. Io debbo ripetere che limitando lo sbassamento della pescaja alla misura da me sopra indicata non sarebbe da

azzardarsi di introdurre in quel canale, nè l'Esse del Monte nè la Foenna, i quali dovrebbero continuare a venire depurati in colmata e per conseguenza le spese più sensibili non resterebbero risparmiate. Ma per l'altra parte col fine di risparmiare tali spese sono nella tenuità mia persuaso, che non convenga per ora azzardare una diminuzione maggiore nell'altezza di quella fabbrica per non esporsi ai danni che sopra ho accennato per la Provincia di Val di Chiana, nè a quelli che io temerei per le Provincie del Val d'Arno, e che mi propongo di descrivere nella seguente.

PARTE SECONDA

DELLE ACQUE DELL'ARNO.

41. La Val di Chiana che riceveva anticamente parte delle acque dell'Arno ha gradatamente cangiato le sue relazioni con questo fiume, principiando dal versare in esso piccolissima porzione delle sue acque ed aumentandone gradatamente la quantità. Dal secolo decimo terzo fino ai dì nostri, si è ridotta adesso a fornire all'Arno uno dei suoi più considerabili influenti, scaricandovi tutte le acque che in essa si raccolgono dall' argine di separazione di là da Chiusi fino al suo sbocco nell'Arno sotto Arezzo.

42. Ma per rendere ancora più rimarchevole la singolarità dei rapporti tra le acque della Chiana e quelle dell'Arno, è da considerarsi che l'Arno ha ricevuto questo nuovo influente il quale gli porta le sue acque depurate non solo dai sassi, e dalle ghiare, ma ancora dalle più grosse materie arenose, e terrose le quali hanno dovuto quelle acque lasciare sulla superficie della pianura da esse irrigata.

43. Nasce da questa circostanza la spiegazione di un fenomeno che io osservai molti anni sono e che ho avuto in seguito varie occasioni di rammentare cioè, che questo nuovo influente dell'Arno non ha dato luogo ad osservare nè più

grosse, nè più frequenti piene in quel fiume. Infatti dal principio del secolo decimo quinto, fino al 1761, si contano trentuna grossissime piene in ciascheduna delle quali l'Arno sormontando i suoi ripari, e spagliando nelle adiacenti campagne fece danni considerabili. E dal 1761 fino ai giorni nostri non vi è stata più veruna di tale spaventose piene nell'Arno, sebbene attese le bonificazioni eseguite in Val di Chiana, ed il facilitato scolo delle acque di quella Provincia nell'Arno, possa dirsi all'ingrosso che (computato il tempo) nell'alveo di questo fiume la Chiana vi scarica cinque volte più d'acqua di quello che faceva prima. Ciò è quanto dire che dal 1761 in poi non vi è stata nell' Anro veruna delle antiche grosse piene, quantunque esso riceva cinque Chiane influenti invece di una sola che ne riceveva allorchè nei secoli precedenti avevano luogo le grosse piene sopranominate.

44. Questo fatto sta ad illustrare la famosa teoria di Gennetté, e le esperienze che in conferma della medesima furono da lui fatte in Olanda, ed inseguito altrove da altri Matematici, e specialmente in Italia dove la Samoggia entra nel Reno di Bologna. E la moderna idrometria ha potuto mettere in essere un fatto assai rimarchevole cioè, che in molti casi il pelo d'acqua di un fiume in piena non diviene più elevato per l' introduzione che si faccia in esso di nuova acqua, e che viceversa lo stesso pelo d' acqua non si deprime in seguito di una sottrazione che venga fatta a quella corrente con farne uscire una quantità rompendo un argine.

45. Si è spiegato questo fenomeno considerando che l'altezza del pelo di un' acqua corrente depende da due elementi cioè, dal corpo d'acqua e dalla celerità media di essa. Se adunque la nuova acqua introdotta nel fiume aumenta la celerità della corrente con una proporzione che sia per certa determinata quantità maggiore di quella tra l' originario corpo d' acqua, e quello accresciuto, in tale ipotesi la superficie del fiume potrà poco, o anche punto inalzarsi, e fino ancora abbassarsi. Per l' istessa ragione i due rapporti cioè quello fra

l' acqua distratta, e l'acqua residua, e quello tra la velocità originaria e la velocità residua possono avere una tale relazione tra loro da far sì che dopo tolta una quantità d'acqua dal fiume il pelo di esso non si abbassi punto.

46. È facile accorgersi che in tutto questo sistema di movimenti si hanno in vista soltanto le molecole dell' acqua corrente, ma non le materie che essa può trasportare con l'impeto del suo corso, e che prendendo ancora queste in considerazione, il fondo dell' alveo sarà per essere soggetto a delle anomalie che dopo un lasso di tempo alterino ancora l'effetto, che dal semplice meccanismo dei movimenti dell' acqua corrente potrebbe aver luogo. In fatti se il fondo dell' alveo si rialzerà per nuove materie in esso depositate la sezione del fiume diverrà più angusta, e l' aumento prodotto nella velocità dell' acqua corrente per la riunione di altra acqua non sarà bastante per produrre (come si è visto che potrebbe accadere in acque depurate) poco, o veruno alzamento nella superficie dell' acqua corrente.

47. Suppongasi un canale regolare, che per maggior semplicità di discorso sia formato con le sponde laterali perpendicolari al fondo. Si introduca in esso una quantità d' acqua la quale si stabilisca corrente con l' altezza di un soldo di braccio. Se allora s' introduca a correre in quel canale una quantità d' acqua eguale alla prima, è chiaro che questa seconda quantità dovendo unire la propria velocità con quella dell' acqua che prima ivi correva, la celerità media di ambedue prese insieme sarà maggiore di quella che aveva la prima quantità d' acqua introdotta nel canale, e per conseguenza la seconda quantità dovrà elevarsi meno della prima, e la totalità di quel corpo d'acqua corrente sarà bensì accresciuta del doppio, ma l'altezza della sua superficie sarà minore di due soldi, e per esempio supponghiamo che si stabilisca tale altezza in un soldo, e mezzo.

48. Immaginiamo adesso che si introduca una terza quantità d' acqua uguale alla quantità introdotta da principio, e

per la stessa ragione sopraccennata in proposito della seconda quantità introdotta dovrà questa terza produrre un alzamento minore di quello che ha prodotto la seconda, e ripetendo queste introduzioni si formerà una serie di aumenti sempre decrescenti, e se potesse assestarsi una legge tra i termini di questa serie, si vedrebbe a qual termine appartenesse lo zero, e forse anche una quantità negativa.

49. Invertendo adesso il discorso fatto sopra, si troverebbe come il derivare da un fiume corrente una quantità d'acqua è facile che non ne faccia punto deprimere la superficie, ragione per cui si è in oggi abbandonato l' uso di quei diversivi che prima si praticavano per diminuire l'altezza delle piene nei fiumi.

50. Tralascio per brevità l'analisi delle due serie degli aumenti, e dei decrementi d' altezza nell' acqua corrente per causa dell' aumento, o decremento del corpo d'acque, e passo a richiamare l'attenzione sopra l'influenza che questi aumenti possono risentire dalle grosse materie che l'acqua corrente trasporta seco.

51. L' oggetto del presente scritto essendo di esaminare l' influenza delle acque della Chiana introdotte in Arno, non mi fermerò sull' esame di ciò che accade allorchè da un fiume che porta grosse materie se ne deriva una quantità, formando un' altra corrente torbida diramata, ed osserverò soltanto di passaggio che appena tale derivazione abbia avuto luogo, si vede il fondo del fiume nel tronco inferiore al punto della derivazione sensibilmente ripieno, e ciò per la ragione che la celerità diminuita per il sottratto corpo d'acqua ha obbligato la residua corrente a depositare una parte delle grosse materie che essa trasportava.

52. La riunione di due acque correnti che non trasportano materie di sensibile grossezza, si può dedurre da quanto abbiamo accennato che non è facile presenti gravi difficoltà, ma come insegnano tutti i maestri della pratica Idrometria, allorchè una di esse correnti, e molto più allorchè tutte due

trasportano gravi materie, la riunione di esse esige discussioni molto serie , e complicate onde evitare dei possibili ed irrimediabili disordini.

53. La Chiana depurata influisce nell'Arno in quel tronco appunto in cui esso trasporta materie gravi e di gran diametro, quindi è che la celerità che in virtù delle acque della Chiana si è accresciuta all'Arno, ha potuto produrre la diminuzione delle sue piene a forma di quanto ho rilevato precedentemente, e questo benefizio sarebbe permanente se ancora le acque dell'Arno a similitudine di quelle della Chiana non trasportassero grosse materie.

54. Quì è dove conviene richiamare particolare attenzione onde porre in evidenza un'esatta previsione sulle relazioni future fra le acque d'Arno e quelle della Chiana. La celerità che l'Arno acquista per l'influenza della Chiana può essere, come fin'ora è stata, vantaggiosa per tenere la superficie dell'Arno meno elevata, ma questa celerità aumentata rende le acque dell'Arno capaci di trasportare più avanti le grosse materie, di maniera che in quel tronco del fiume in cui non arrivavano le ghiare del peso di una libbra, ora vi arrivano, e successivamente nel tronco inferiore arriveranno ghiare di peso maggiore di quelle che vi arrivavano prima.

55. Con questa gradazione maravigliosamente spiegata dal celebre Perelli ogni tronco dell'Arno deve continuare a prendere successivamente le qualità del tronco precedente ingombrandosi di materie più gravi, e venendosi in tal guisa il letto del fiume a rialzare più sollecitamente di quello che avrebbe fatto se le acque della Chiana avessero continuato a restare stagnanti in quella Provincia, ovvero con flusso meno abbondante e spedito vi si fossero introdotte.

56. Di siffatto rialzamento si lamentava già il Matematico Viviani che suggerì molte utili precauzioni delle quali ho avuto più volte occasione di far parola, onde eccitarne l'effettuazione ; ed allorchè nella mia opera sulla Val di Chiana accennai che arriverebbe un'epoca in cui potrebbe l'acqua

della Chiana colle sue torbide materie influire nell' Arno, io non dovetti perder di vista i sistemi, e le operazioni necessarie onde rendere questo fiume capace di non risentire per questo influsso modificazione sensibilmente nociva.

57. Ma le prescrizioni del Viviani, nè altri suggerimenti presentati dalla tenuità mia hanno avuto effetto fino ad ora, e l' Arno ha rialzato considerabilmente il suo fondo anche presso le pescaje che limitano il tronco da cui Firenze è traversata, e ciò è accaduto in un modo il meno equivoco specialmente da mezzo secolo in quà, cioè appunto da che la Provincia di Val di Chiana con aumento considerabile di quantità e di speditezza scarica le sue acque nell' Arno, di maniera che la relazione tra le acque della Chiana e quelle dell'Arno, come si trova al giorno d'oggi, offre un bel resultamento di fatto per illustrazione dell'Idrometria, cioè che l' introduzione di una corrente chiara in un recipiente torbido può contribuire nel tempo stesso a diminuire in questo le piene, e rialzare il fondo.

58. Con siffatti preliminari si ponga mente a ciò che fosse da aspettarsi nel fondo del letto d'Arno, qualora all' estremità del canal maestro della Chiana venissero tolti tutti gli ostacoli, e le acque di quella provincia con l'imponente massa delle torbe che esse trasportano (e che ora restano ivi a migliorare le condizioni della pianura) andassero a scaricarsi nell'Arno. È evidente che il cratere della Provincia di Val di Chiana verrebbe sgombrato dalle sue acque in molto minor tempo di quello che ha luogo attualmente, e questo minor tempo dovrebbe valutarsi ancora meno della terza parte di quello che oggi è necessario a tal' uopo.

59. Ciò posto, bisognerebbe considerare l' Arno non più come esposto a ricevere le acque della Chiana depurate, ma bensì esposto a ricevere in egual tempo triplicata, o quadruplicata quantità di quelle acque non più depurate, ma cariche di grosse materie specialmente arenose e terrose. Allora avrà luogo bensì nel fiume Arno un aumento di celerità, ma questo, mentre per una parte tenderebbe come sopra ho ac-

cennato, e come qui giova adesso ripetere, a tener depresso il pelo delle piene, per l'altro contribuirà a rialzarne considerabilmente il fondo con le torbe tributate dalla stessa Chiana, e con il progressivo più celere trasporto delle più grosse materie inerenti ai respettivi tronchi dell' Arno stesso, onde la sezione del fiume potrà rendersi sempre meno capace a contenere le acque del fiume stesso quantunque depresse per l'aumentata velocità.

60. Io non saprei adunque perder di vista il rischio in cui si porrebbe la città di Firenze qualora si lasciassero liberamente sboccare in Arno tutte le acque torbide della Chiana, e crederei che avanti di eseguire un tal progretto (anche volendo prescindere dai riguardi dovuti al ben' essere della Provincia di Val di Chiana) convenisse aver preparato il fiume Arno, ponendolo in grado di garantirsi dalle replezioni alle quali per natura sua è soggetto.

61. Allorchè il Viviani propose di confinare le grosse materie sassose e ghiarose nelle gole delle colline, e dei monti adiacenti al Val d'Arno superiore, intendeva di provvedere ai riempimenti del letto d' Arno originati dalle materie inerenti al medesimo ; ma se avesse creduto doversi difendere ancora dalla irruzione di tutte le torbe di Val di Chiana, avrebbe probabilmente insistito con maggior calore e dettaglio sopra tale importantissimo oggetto, e quindi allora sarebbero stati forse meglio accolti i suoi sagacissimi insegnamenti e l' Arno si troverebbe ai dì nostri con le grosse ghiare meno protratte, e con il letto meno ripieno.

62. Ma la Chiana al tempo del Viviani non scaricava gran parte delle sue acque nell' Arno, e quelle lentamente vi giungevano, nè si progettava di demolire la Chiusa dei Monaci per accrescere considerabilmente quell' influente dell'Arno, onde il Viviani non fu nel caso di prendere in considerazione questa gravissima circostanza come lo siamo oggi.

63. Tale operazione stabilirebbe nuove relazioni tra le acque della Chiana e quelle dell' Arno, e per quanto sia vero

che un giorno siffatte relazioni potranno aver luogo, e che le acque della Chiana saranno allora in grado di costituire un fiume influente dell'Arno, ciò non ostante è espediente il non accelerar l' epoca di tale avvenimento senza le debite precauzioni onde evitare i gravi inconvenienti che potrebbero emergerne.

64. Nell' ipotesi adunque che l'accelerazione di tale epoca volesse prepararsi sospendendo le considerazioni relative alla Provincia di Val di Chiana, resterebbero sempre in una luminosa evidenza i pericoli dai quali converrebbe mettere al coperto la Città di Firenze.

65. A tal'uopo io credo doveroso ripetere insistenze, acciò siano poste in uso le prescrizioni immaginate dal Viviani, ed ampliarle considerabilmente come chè più estese siensi in oggi ridotte le cagioni per le quali vengono richiamate. Dovrebbero adunque imbrigliarsi con forti pescaje, o di muro o di legname secondo le circostanze tutte le gole delle colline, e dei monti, ed i sbocchi dei torrenti ghiarosi, e sassosi che mettono foce in Arno. E ciò non solo nel Val d' Arno, ma ancora nella Valle di Sieve, e nelle minori Vallate d'altri torrenti più piccoli tributarj dell' Arno, da Firenze in sù.

66. È da notarsi che oltre all' utilità che da queste operazioni ne verrebbe per l'oggetto principale, non poco vantaggio potrebbe ritrarsene ancora dai particolari possessori, i quali gusterebbero i sistemi che per coltivare i sbroti montagnosi si praticano con esemplare attività specialmente nella Val d'Elsa. Ed io crederei che non fosse senza profitto pubblico, e privato il propagare con la stampa una istruzione a ciò relativa, sulla quale i particolari possessori fossero in grado di apprendere il contegno da tenersi, onde invece che le acque pluviatili portino via la terra e le piante, nei terreni molto declivi lascino intatta ogni cosa, e tributino ivi nuova terra vegetabile.

67. Il Viviani aveva accennato qualche operazione da farsi nell' alveo istesso dell' Arno presso l' Incisa, e veramente po-

tendo ivi stabilirsi una barriera che impedisse la discesa delle grosse materie, sarebbe cosa opportunissima, ma all'occasione vi sarebbero delle osservazioni da fare acciocchè l'utilità che si attenderebbe dall' opera non venisse disturbata da veruno inconveniente. Un' altra gola che offre una veduta simile, ed anche di più facile esecuzione fu da me 47 anni sono osservata sopra Levane nella così detta Valle d'Inferno. Io ne feci allora soggetto di discussione, e non vi fu chi dubitasse che potesse in quel luogo formarsi un deposito capace di ritenere straordinaria quantità di sassi e di ghiare risparmiandone l'aggravio all' inferiore letto dell' Arno.

68. Se queste misure lasciate fino ad ora neglette potessero venire adottate con attività, è indubitato che il letto d'Arno si anderebbe con il tempo rendendo meno incapace di supplire ai nuovi aggravi che dalla Val di Chiana fossero per sopravvenirgli; ma senza di questo io oso ripetere che lo scaricare tutte le acque di Val di Chiana con le loro più gravi materie nell' Arno sarebbe molto pregiudicievole alla Città di Firenze.

CONCLUSIONE

69. La relazione tra le acque della Chiana, e quelle dell' Arno essendo artificiale, non può essere abbandonata alla Natura come per esempio lo è la relazione fra le acque della Sieve e quelle dell' Arno, dove la natura fa tutto, e l' arte non interviene altro che per impedire qualche straordinario sconcerto.

70. Il convertire bruscamente, come suol dirsi per salto questa relazione artificiale in una relazione naturale tra la Chiana e l'Arno, come accaderebbe se si demolisse la pescaja dei Monaci, e gli altri ostacoli esistenti presso di essa, si concepisce facilmente non esser cosa eseguibile senza più o meno considerabili disordini. E da quanto sopra abbiamo osservato sembrami che evidentemente resulti come tanto il Val di Chiana, quanto il Val d' Arno potrebbero risentirsi di tali disordini.

71. Mi sia permesso ripetere ciò che in altre occasioni ho osservato diffusamente cioè, che una Provincia artificialmente costituita e mantenuta, nella guisa appunto in cui si trova la Val di Chiana, non può come una Provincia felicemente abbandonata alla natura restare stazionaria per rapporto alla sua prosperità, e deve giornalmente, o megliorare, o peggiorare di condizioni, e si è veduto il peggioramento che avrebbe luogo in Val di Chiana togliendola dall' impero dell' arte, perchè subirebbe ben tosto considerabili e vaste degradazioni, invece dei sensibili miglioramenti che riceve adesso giornalmente dall' arte medesima.

72. Se volesse osservarsi che il mantenere quel paese in mano dell' arte, è vero che contribuisce alla salubrità e fertilità di esso, ma obbliga a delle spese di qualche considerazione, io risponderei che nel dilemma, o di perdere il fondo, di spendere per mantenerlo ognuno sceglierebbe il secondo partito, quando ancora le spese assorbissero i frutti di una considerabil parte di quel fondo, lo che è ben lungi dalla quantità delle spese che occorrono per mantenere il sistema delle colmate in Val di Chiana, qualora si continui a mettervi sagacità ed affezione. In fatti le colmate e le arginazioni occorrenti per continuare il sistema attuale, e perfezionare lo stabile miglioramento di quella Provincia, possono appena un'anno per l'altro assorbire l' entrate di una delle fattorie che in numero di nove l'Erario Regio possiede in quel Paese, e questo sarebbe ben lungi dal potersi considerare come un sacrifizio, subito che non può dubitarsi che per mezzo di esso si eviterebbero delle gravissime perdite, e si renderebbero sempre più floride e per conseguenza più utili allo stesso Erario Regio tutte le Città, Castelli, e coltivazioni di quella conquistata Provincia.

73. Desiderando io di contribuire quanto è possibile a dissipare l' apprensione che nasce dalle spese occorrenti per il sistema delle colmate, osserverò che tra queste spese vi è quella non solo, come si è visto, di assoggettare all' alluvione

molte terre coltivate, ma ancora di rialzare qualche casa colonica anticamente fabbricata senza l' opportuna previsione sul rialzamento a cui era per soggiacere l'adiacente campagna. Sebbene l'apprensione di cui si tratta possa venire assai diminuita, qualora si apprezzino i cenni che ho precedentemente avanzato, credo opportuno riportare le parole stesse del Matematico Viviani il quale si espresse come segue: " ...Fra tali
" angustie di dover confessarla, mi sento di nuovo obiettare,
" che a tal ragguaglio il rimanente canale verso Signa, do-
" vrebbe a quest' ora vedersi superiore o al pari della pianu-
" ra per dove ei passa. Qui parimente io rispondo, che ciò è
" anche verissimo ma sol però di quel paese mantenuto difeso
" con argini da trabocchi d' Arno, essendo chè poco più alto
" del piano di questo si trovi in oggi il Paese di Brozzi, di
" Quaracchi, di Lecore, di Mandri, di Vellari, dell' Ormannoro, e d'altri luoghi all' intorno sopra a quali non posso-
" no estendersi i sopradetti trabocchi, se non in caso, o di
" straordinariissime piene, o di rotte de' medesimi argini, o
" per mancanza delle porte de' loro scoli, destinate a impe-
" dire i ringorghi del medesimo fiume. Non così è avvenuto
" de' terreni confinanti ad Arno posti fra esso, e gli argini i
" quali partecipando spesso delle deposizioni delle piene, che
" vi sormontano, si sono andati anch' essi alzando in parte, e
" colmando, e per tal causa non si è renduto tanto sensibile
" l'alzamento dell' alveo da qui a Signa come lo dimostrano
" bensì le steccate vecchie, che quanto più antiche sono,
" tanto più basse vi si trovano, e pure nel fabbricarle furono
" lasciate molto superiori al piano universale del fiume Arno,
" il quale s' è così alzato che dentro al tempo di 50 anni
" da che fu fabbricata la mina sotto Mugnone, per mandar
" l' acqua d' Arno dalle Mulina del Barco a quelle di Petriolo,
" ha obbligato Mugnone stesso che vi entra ad alzarsi tanto
" che le soglie de' risciacquatoj state murate allora superiori
" al fondo del fiume, vi sono adesso per più di un braccio
" e mezzo sepolte.

" Per l' accennato effetto del continuo colmarsi i terreni
" disarginati, fui sempre di parere non doversi con arte avara
" abusare de' beni della prodiga natura, ed essere molto mi-
" glior governo ricevere, che escludere le inondazioni dei fiumi
" le quali col fior di terra e grassume alzano, e bonificano
" le campagne. So bene che il ridurre questo alla pratica
" dove non si interponga la provida autorità del Supremo, si
" rende quasi impossibile per la strettezza del paese diviso
" in tante porzioni, possedute per lo più da padroni di vo-
" leri disformi da quei, che quivi o altrove godono posses-
" sioni maggiori, a quali di poco danno sarebbe il tenerne
" alcune esposte per qualche tempo alle colmate del loro
" fiume vicino.

" Di qui in particolare è accaduto, che le campagne so-
" pra di Pisa si trovano oggi per tante braccia inferiori alle
" ripe d'Arno, e per tante più braccia alle sommità dei loro
" argini; nè altro rimedio v' è per esimerle da soggezione si
" miserabile, che il pigliare a colmarle con Arno stesso, ma
" con ordine, regola, modo, e ragione. Di qui similmente è
" seguito che le pianure più basse circostanti ad Ombrone,
" ne' territorj delle città di Firenze, e di Prato, e parte an-
" cora di quello di Pistoja si sono estremamente infrigidite;
" poichè essendosi i paesani industriati sempre di tener per
" tutto (benchè assai male) arginato Ombrone, e gli altri
" fiumi che vi concorrono, ed avendo così sdegnato di questi
" le torbide, nel continuo alzarsi de' letti, quelle pianure si
" sono rimaste nella loro antica bassezza, e per conseguente
" i loro scoli camperecci hanno perduto in essi letti parte di
" quella caduta che per l' innanzi tanto maggiore vi avevano
" dentro. „

74. La configurazione della superficie, e del contorno della penisola Italiana rendono questa assai diversa da tante altre regioni, e quindi i suoi fiumi hanno una particolare caratteristica. Infatti scorrendo essi per gran tratto sopra terreni alpestri e scoscesi, trasportano con le loro acque sassi e ghiare

di più o meno considerabile diametro, e negli ultimi tronchi si riducono a condurre soltanto limo, e terra che essi depositano allorchè sboccando in mare perdono alquanto della loro velocità.

75. Con siffatti depositi si formano in riva del mare quei ridossi i quali nel volger degli anni accumulandosi l'uno all'altro estendono la ripa terrestre che usurpa al mare il suo letto, e quindi tutto il contorno d'Italia, consultando le antiche istorie, ed i Capi-saldi dei quali si può far conto, si riscontra accresciuto ed esteso, di maniera che ha fatto credere ad alcuno che il mare in queste parti si ritiri ed al contrario altrove, come per esempio in Olanda si avanzi ed invada la terra.

76. Molti di questi fenomeni potrebbero essere influenzati dagli efficaci depositi terrosi dei fiumi italiani, mentre che i gran fiumi che sboccano nei lidi olandesi avendo corso lungamente in pianura, non recano altrochè limo sottilissimo al mare e quindi poco dee restarne accresciuta la sponda, e di quel poco non può neppure essa avvantaggiarsi gran fatto, perchè le maree che sono insensibili nel Mediterraneo si inalzano nell'Oceano a grandi altezze, e nel ritirarsi debbono giornalmente portar seco considerabil parte di quel poco che i fiumi hanno depositato sul lido, e forse ancora qualche parte tra le meno solide del lido medesimo.

77. Ma non essendo qui necessario fermarsi in tale discussione io mi limiterò ad osservare soltanto, che gli Idrometri Italiani nel sistemare le loro acque correnti dopo avere determinato le pendenze, e le dimensioni dei respettivi alvei, conviene che si facciano carico delle variazioni che negli alvei stessi vengono indotte dalle grosse materie ivi traspostate dalle acque; quindi è che grande oggetto di speculazione diventa quivi la separazione delle acque torbide dalle chiare ovunque possa essere eseguibile, e siffatta separazione è ciò che già fu da me chiamata la chiave della Idrometria italiana.

78. Quando la protrazione dei lidi italiani, ed il conse-

guente allontanamento delle onde marine principiarono a rendersi assai sensibili, si avvertì l'allungamento degli alvei dei fiumi, e la conseguente perdita in essi della necessaria pendenza. Quindi si manifestò la causa dell'impedito corso delle loro acque, e dell'infrigidimento delle terre ad essi adiacenti, sviluppandosi naturalmente il raziocinio che dimostrava come siffatti sconcerti si sarebbero evitati, se precedentemente si fosse trattenuta sopra quelle campagne divenute frigide tutta la terra che si era lasciata trascorrere allo sbocco dei fiumi, e produrre la protrazione dei lidi, e l'allungamento dei fiumi medesimi.

79. È facile accorgersi che siffatte idee doveano a preferenza offrirsi all'immaginazione in Italia, dove per la natura dei suoi fiumi si rendeva più chiaro il cattivo uso introdotto rispetto ai depositi terrosi dei fiumi stessi, e si dovette riconoscere che se questi depositi abbandonati al genio della natura erano dannosi, sarebbero divenuti utilissimi subordinando all'arte l'azione, e gli sforzi dei fiumi medesimi, ed ecco come per le particolari condizioni dei fiumi in Italia, e più specialmente in Toscana dovette quivi avere origine, e radicarsi il sistema delle colmate, per servire in seguito d'esempio anche alle altre nazioni.

80. Si principiò dal trattenere irregolarmente qualche fiume per fargli depositare le sue torbe in alcun basso fondo, ed il Torricelli propose di profittare di tale espediente in Val-di-Chiana. In seguito si propagò l'uso delle colmate in Toscana, e fuori ancora, come per esempio considerabili acquisti si fecero con questo metodo verso le Valli Bolognesi al così detto Poggio Lambertini. E la considerazione dei depositi fluviatili si rese così familiare che eccitò il famoso Eustachio Manfredi a comporre quel suo celebre discorso tendente a determinare le modificazioni che i tributi terrosi dei fiumi devono indurre nel mare.

81. I progetti di colmate che isolatamente una dall'altra si praticarono in seguito in Italia e fuori ancora, erano ben

lungi dal presentare l' idea di tutto ciò che l'arte poteva ottenerne subordinando gli sforzi dei fiumi a certe regole, di maniera chè tali sforzi si rendessero d' ora in avanti tanto utili quanto lo erano stati precedentemente dannosi.

82. Ma le generali vedute che comprendessero un sistema di colmate così fattamente coordinate tra loro che ne resultasse non un parziale bonificamento di terre, ma un sostanziale benefico cangiamento in tutta una intiera provincia, furono per la prima volta da me nel 1789 proposte all' Augusto Sovrano della Toscana che si degnò di approvarle a vantaggio della Val di Chiana, ove se ne ammirano oggi i felici resultamenti.

83. L' essersi ocularmente riscontrato in Val di Chiana che si poteva giungere a dominare la distribuzione delle alluvioni dei fiumi in guisa tale che tutti insieme cospirassero ad invertere la pendenza di un' intiera provincia, la quale dirigesse tutte le sue acque da Mezzogiorno verso tramontana, mentre scorrevano prima da tramontana verso Mezzogiorno , dette a me il coraggio nel 1828 di proporre definitivamente (su queste basi, e d'appresso un sistema di colmazione) con dettagliata relazione il bonificamento della maremma toscana, bonificamento che in virtù di cure auguste, sagaci, ed assidue progredisce col più felice successo, e presenta lusinga di un pronto e favorevole stabilimento , perchè colmati i bassi fondi, che sono adesso palustri, si ridurranno questi al livello del resto della campagna la quale avendo in generale la sua superficie superiore a quella del mare, tostochè sarà ridotta a florida coltura, potranno quelle campagne emanciparsi prontamente dalla tutela dell' arte a differenza di ciò che si è veduto occorrere per ora nella Val di Chiana.

84. Tutti i ragionamenti relativi alle materie solide trasportate dalle acque fluviatili hanno pertanto potuto venire appoggiati da fatti così estesamente luminosi in Toscana, che può questo paese felicitarsi di avere esclusivamente contribuito a stabilire come una generale massima Idraulica ciò che

non era fino ad ora comparso altrochè come un particolare isolato tratto di genio, che pervenne talvolta a convertire in utilità pubblica le naturali nocive disposizioni di un qualche fiume.

85. Lo sviluppo dei sopraccennati ragionamenti e l'osservazione dei fatti relativi non potevano aver luogo molti secoli indietro, e nemmeno potè quindi esser posta in quella evidenza in cui la troviamo ai dì nostri la precitata massima relativa al trattamento che esigono i fiumi torbidi, ed al sistema da seguirsi per utilizzare le sostanze terrose che essi trasportano.

86. Se questa massima avesse anticamente avuto luogo, non sarebbero giunte all' eccesso la frigidezza e mal' aria nelle Maremme Toscane e Romane, mentre quella striscia di terra trasportata dai fiumi la quale invase il letto del mare come per tutto si riscontra adesso a colpo d'occhio, sarebbe stata impiegata a rialzare la superficie di tanto spazio di suolo che si ridusse palustre.

87. Io ho accennato queste cose nella mia Memoria sulle Paludi Pontine, e mi è occorso di tornarvi sopra allorchè feci il progetto per la sistemazione delle acque Venete, dove parimente la mancanza della massima sopraccitata ha lasciato radicare dei mali i quali non esisterebbero qualora avesse potuto per l'addietro venire adottata. E siffatti mali sarebbero tuttora suscettibili di essere in parte rimediati, introducendo in alcuni luoghi il sistema delle colmate senza astenersene per il riflesso di perdere i frutti di terreni coltivati, che resterebbero per qualche tempo inoperosi venendo sottoposti alla alluvione, giacchè quella perdita è sovrabbondantemente compensata da solidi acquisti; verità che dalla precedente citazione delle stesse parole del celebre Viviani si può vedere che non era da lui ignorata, e che anzi l' appoggiava con quella estensione, e con il calore che impiegano quei rarj uomini i quali agiscono per meritare il favore, e non per usurparlo. Ma questi utili suggerimenti tanto di posporre un tem-

porario sacrifizio dei frutti di un fondo rustico al permanente stabilimento della sua fertilità, quanto quelli relativi ad impedire i riempimenti dell' alveo dell' Arno, sebbene fossero universalmente applauditi allorchè il Viviani li espose, restarono poi col fatto negletti perchè, la virtù e la verità ancorchè presentate luminosamente, con difficoltà si propagano, e si direbbe non essere esse contagiose come tutto giorno si vede che lo sono il vizio, e l' errore.

88. Si è veduto che l'Arno senza che venga prima preparato a ricevere liberamente tutte le acque torbide della Chiana, risentirebbe nel suo alveo pericolose alterazioni, onde anche per questa parte l'artificiale relazione tra le acque della Chiana, e quelle dell'Arno non potrebbe bruscamente e per salto interrompersi senza pericolo, e si è veduto parimente che per conseguenza il piano da adottarsi è quello di continuare le bonificazioni per alluvione in Val di Chiana facendone scaricare le acque depurate nell'Arno, il quale frattanto venga diligentemente munito, acciò nel suo fondo si depositi la meno possibile quantità di sassi e di ghiare , e si stabilisca un sistema di osservazioni sul fondo stesso per assestare un giudizio sopra la quantità dell' influenza benefica delle serre, e fabbriche proposte agli sbroti adiacenti.

89. Le descritte osservazioni sembra a me che sieno necessarie specialmente nel tronco d' Arno che traversa Firenze, e presso le due Pescaje che esistono all' estremità di esso, e principiando fin d'ora tali osservazioni, si verrebbe presto in cognizione delle modificazioni che tanto per rapporto alla grossezza, quanto alla quantità delle ghiare fossero ivi per aver luogo per causa della fabbrica del ponte di ferro fuori della Porta S. Nicolò.

90. È da notarsi che quando ancora si volesse dare al Canal maestro una gran pendenza sbassandolo alla sua foce, e si credesse di evitare ogni danno tenendo i torrenti torbidi a depurare le loro acque in colmata di maniera che esse non portassero nell' alveo dell' Arno le più grosse materie, ciò

esporrebbe a gravi dispendj, e non impedirebbe il dannoso rialzamento del fondo di questo fiume.

91. In fatti il profondamento del Canal Maestro farebbe restare molto al di sopra del suo fondo i regolatori delle colmate, i quali precipitando le acque che per essi sgorgano in quel fondo, come si è veduto, sarebbe per lo più istabile, lo ridurrebbero tortuoso e variabile con perdita degli adiacenti terreni coltivati, e converrebbe di continuo sostenere con opere assai complicate e ripetute i regolatori medesimi i quali si troverebbero nelle condizioni stesse a cui si è visto, nella prima parte, essere esposte le Pescaje murate che si volessero costruire agli sbocchi dei torrenti torbidi nel Canale.

92. Che poi quantunque le acque della Chiana arrivassero depurate per mezzo del profondato Canal Maestro nell' Arno, il rialzamento del fondo di questo fiume fosse per esserne assai aumentato, è facile accorgersene rammentandosi che la velocità accresciuta in un fiume lo abilita a trasportare le sue grosse materie più avanti di quello che faceva quando la celerità era minore, e che le acque di tutta la provincia di Val di Chiana arriverebbero tre o quattro volte più presto che adesso nell'Arno, ove per conseguenza la celerità subirebbe un aumento considerabile, e quindi le sue ghiare sarebbero spinte più avanti che adesso, ed il fondo ne verrebbe con più rapido progresso rialzato.

93. Riassumendo tutte le sopra esposte vedute sembra a me potersi concludere, che qualora tutte le acque della provincia di Val di Chiana (in virtù di una pendenza molto maggiore dell' attuale procurata al fondo del Canal Maestro) si scaricassero con tripla o quadrupla celerità nell' Arno, o vi si scaricheranno con tutte le torbe che loro appartengono, ovvero depurate dalle torbe medesime; nel primo caso il danno per l'alveo dell' Arno sarà maggiore, e nel secondo minore, ma un danno vi sarà sempre, perchè il fondo di quest' alveo subirà un rialzamento maggiore di quello che avrebbe luogo in virtù delle acque che naturalmente vi influiscono.

94. Non può adunque la relazione tra le acque dell'Arno, e quelle della Chiana abbandonarsi alla natura, e conviene che resti subordinata alle regole dell' arte, e ciò è coerente alle intrinseche appartenenze della relazione stessa, giacchè si tratta di una diramazione dell' Arno convertita in un considerabile influente di esso, cosa che è ben lontana dall' ordinario procedere della natura.

95. Continuando per tanto il sistema delle colmate in Val di Chiana quella Pianura si accosterà sempre alla posizione, ed alla giacitura che conviene alla sua stabile floridezza, e la coltivazione di essa sarà tanto più fruttifera quanto più si aumenteranno gli strati di buona terra vegetabile.

96. In tanto si darà tempo a premunire il letto dell'Arno con i mezzi sopra indicati contro l'invasioni delle grosse ghiare trasportate dai suoi naturali influenti, e che minacciano oggi l' istesso tronco che traversa la Città di Firenze, onde con qualche ulteriore progresso si anderebbero quivi a risentire considerabili disastri.

97. Liberato un giorno l' Arno dalla maggior parte degli onerosi tributi dei suoi influenti, e dei suoi tronchi superiori all' Incisa, e alla Val d' Inferno, diverrà meno esposto alle dannose modificazioni che avrebbero luogo nel suo alveo, e potrà ricevere le acque della Chiana comunque più, o meno prontamente, e più, o meno torbide vi si introducessero. Di maniera chè si stabilirebbe in tal guisa la relazione tra le acque dell' Arno, e quelle della Chiana, relazione che non potrà mai abbandonarsi affatto alla natura, e si risentirà sempre dell' artifizio necessario per sostenere gli sbroti lateralmente adiacenti al letto dell' Arno.

98. Io sò bene che chi dice artifizio dice dispendio, ma il dispendio sembra a me bene impiegato quando è diretto non solo a produrre dei vantaggi, ma ancora ad evitare dei

disastri, e specialmente disastri tali da compromettere il ben' essere di una delle più ridenti Provincie, e della stessa Capitale del Gran Ducato.

Firenze, 21 Dicembre 1837.

VITTORIO FOSSOMBRONI.

RIFLESSIONI

SOPRA UN PROBLEMA MECCANICO

DI ANDREA CONTI

ASTRONOMO

Ricevute adì 23. *Marzo* 1838.

1. Nella spiacevole circostanza in cui fui posto a dovere eseguire gli ordini del mio impareggiabile amico e collega il ch. Professore Calandrelli, di ordinare cioè tutti i suoi scritti quando fosse egli nel numero de' trapassati, mi abbattei in diverse soluzioni di un noto problema meccanico al medesimo proposto dal ch. geometra il conte Giordano Riccati. Il problema aveva per iscopo di determinare in un circolo, il piano del quale sia normale all' orizzonte, un arco di cui la corda possa percorrersi nel medesimo tempo delle due eguali corde sottendenti ciascuna la metà dell' arco.

Di questo problema il sunnominato Professore Calandrelli pubblicò la sua soluzione nel 1787 in un Opuscolo che ha per titolo *Mechanicum problema in praelectione physica propositum ;* ed altri matematici in seguito si occuparono su tale argomento, come rilevar potei da diverse lettere al medesimo Professore dirette; ed in fine il ch. Professor Pessuti pubblicò anche Egli la sua soluzione, non limitata però a sole due, ma estesa anche a tre corde eguali, come può vedersi nella parte prima del Tomo XIII di questa Società delle Scienze

Fra i geometri che occupati si sono di questo elementare argomento, niuno che io sappia ha avuto in mira di rendere il problema suscettibile di una maggiore estensione, dandone una soluzione che agevolmente potesse adattarsi ad un numero qualunque di corde, il che però mi avviso non possa ottenersi

col metodo con cui questo problema è stato comunemente sviluppato. Quindi partendo da principj diversi, e scorrendo una via più semplice, sono giunto con somma facilità a determinare una formola simmetrica, che oltre il principale oggetto della soluzione generale del problema meccanico, mi porse occasione di fare alcune riflessioni, le quali benchè di una entità non maggiore di quella che esiger possa la natura del problema, ciò nulla ostante somministrarono de' materiali a questo mio breve scritto, che ho creduto rendere di pubblica ragione, colla sola speranza che possa corredare di qualche corollario quella parte di meccanica a cui appartiene.

2. È noto dalla meccanica che in un sistema di piani inclinati congiunti ad angolo, di lunghezza l, l', l'', l'''.... ec. e di altezza a, a', a'', a'''.... ec. la velocità acquistata da un mobile dopo aver percorso il primo piano l è espressa da $\sqrt{2ga}=u$, essendo g la gravità; quella acquistata dopo percorso il secondo l' è eguale a $\sqrt{2g(a+a')}=u'$, e quella acquistata percorso il terzo piano l'' è espressa da

$$\sqrt{2g(a+a'+a'')}=u''; \qquad \text{ec.}$$

Per altro questi valori di u, u', u''.... ec. suppongono che nel passaggio da un piano all' altro non si faccia perdita alcuna di velocità. È noto inoltre, che il tempo impiegato a percorrere il primo piano l è eguale ad $\frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{ga}}=t$; quello impiegato a percorrere il secondo l' in cui la velocità iniziale è $=u$ è espresso da

$$\frac{l'}{ga'}[\sqrt{2ga'+u^2}-u]=\frac{l'}{a'}\sqrt{\frac{2}{g}}[\sqrt{(a'+a)}-\sqrt{a}]=t';$$

e quello impiegato a percorrare l'', in cui la velocità iniziale è $=u'$ ha per espressione

$$\frac{l''}{ga''}[\sqrt{(2ga''+u'^2)}-u']=\frac{l''}{a''}\sqrt{\frac{2}{g}}[\sqrt{(a''+a'+a)}-\sqrt{(a'+a)}]=t'';\ \text{ec.}$$

3. Ciò premesso, supponiamo, che l, l', l''. . . . ec. sieno le corde (*Fig.* 1.). . . . . *ed*, *dc*, *cb* . . . . . ec. di un circolo il cui piano suppongo normale all' orizzonte, e le altezze a, a', a''. . . . ec. li segmenti KC, CB, BD . . . . ec. determinati dalle ordinate condotte dagli estremi delle corde sul diametro verticale HA. Rappresentando queste corde per C, C', C''. . . . ec. e le corrispondenti altezze ossia le projezioni di C, C', C''.... sul diametro verticale HA, per A, A', A''. . . . ec., l' espressioni di t, t', t'' . . . . trovate di sopra colle debite sostituzioni si ridurranno alle seguenti.

$$t = \frac{C\sqrt{2}}{\sqrt{gA}}$$

$$t' = \frac{C'\sqrt{2}}{A'\sqrt{g}} \left[\sqrt{(A'+A)} - \sqrt{A}\right]$$

$$t'' = \frac{C''\sqrt{2}}{A''\sqrt{g}} \left[\sqrt{(A''+A'+A)} - \sqrt{(A'+A)}\right]$$

$$t''' = \frac{C'''\sqrt{2}}{A'''\sqrt{g}} \left[\sqrt{(A'''+A''+A'+A)} - \sqrt{(A''+A'+A)}\right]$$

$$t^{v} = \frac{C^{v}\sqrt{2}}{A^{v}\sqrt{g}} \left[\sqrt{(A^{v}+A'''+A''+A'+A)} - \sqrt{(A'''+A''+A'+A)}\right]$$

ec. ec. ec.

Ponendo dunque per brevità $\Sigma t = t + t' + t'' + \ldots$ si avrà il tempo della discesa per le corde C, C', C''. . . . espresso da

$$
(a)\quad \begin{aligned}
\Sigma t = & \frac{C\sqrt{2}}{\sqrt{Ag}} \\
& + \frac{C'\sqrt{2}}{A'\sqrt{g}}[\sqrt{(A'+A)}-\sqrt{A}] \\
& + \frac{C''\sqrt{2}}{A''\sqrt{g}}[\sqrt{(A''+A'+A)}-\sqrt{(A'+A)}] \\
& + \frac{C'''\sqrt{2}}{A'''\sqrt{g}}[\sqrt{(A'''+A''+A'+A)}-\sqrt{(A''+A'+A)}] \\
& + \frac{C^{IV}\sqrt{2}}{A^{IV}\sqrt{g}}[\sqrt{(A^{IV}+A'''+A''+A'+A)}-\sqrt{(A'''+A''+A'+A)}] \\
& \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.}
\end{aligned}
$$

Vediamo ora ciocchè risulta da questa espressione di Σt, supponendo in primo luogo l' eguaglianza delle corde, ed in seguito quella delle projezioni.

4. Supposto adunque in primo luogo $C=C'=C''=C'''\ldots$ si avrà l' equazione (a) ridotta alla seguente

$$
(b)\quad \begin{aligned}
\Sigma t = C\sqrt{\frac{2}{g}}\Big[& \frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{1}{A'}[\sqrt{(A'+A)}-\sqrt{A}] \\
& + \frac{1}{A''}[\sqrt{(A''+A'+A)}-\sqrt{(A'+A)}] \\
& + \frac{1}{A'''}[\sqrt{(A'''+A''+A'+A)}-\sqrt{(A''+A'+A)}] \\
& + \frac{1}{A^{IV}}[\sqrt{(A^{IV}+A'''+A''+A'+A)}-\sqrt{(A'''+A''+A'+A)}]+\text{ecc.}\Big]
\end{aligned}
$$

espressione simmetrica di Σt, la quale potrà continuarsi a piacere onde ottenere il tempo per un numero qualunque di corde eguali.

Dee peraltro notarsi, che assumendo la lettera p per indicare il numero delle corde eguali, ed a per denotare l' arco Aa, i valori delle projezioni A, A', A'', A'''. . . potranno ottenersi dalle seguenti equazioni

$$A = \cos.(p-1)a - \cos.pa$$

$$A' = \cos.(p-2)a - \cos.(p-1)a$$

$$A'' = \cos.(p-3)a - \cos.(p-2)a$$

$$A''' = \cos.(p-4)a - \cos(p-3)a$$

$$\vdots$$

$$A^{(p-1)} = 1 - \cos.a$$

nelle quali sostituendo in luogo de' coseni degli archi multiplici le potenze del coseno dell' arco semplice, e posto $A^{(p-1)} = 1 - \cos.a = x$, onde $\cos.a = 1 - x$, e $C = \sqrt{2x}$, si avrà Σt in funzione della x seno verso dell'arco Aa; e perciò dal valor noto di x potrà ottenersi quello di Σt, e viceversa dal valor noto di Σt potrà dedursi quello del seno verso x. Di qui scorgesi pertanto, che se volessero svilupparsi i casi particolari contemplati dai ch. Signori Calandrelli e Pessuti (§ 1), conservando nell' equazione generale (b) i soli due o tre primi termini, si dovrebbe porre in vece di Σt l' espressione del tempo pel diametro verticale HK, onde ottenere sì nel primo che nel secondo caso il valore del seno verso x, e per conseguenza quello dell' arco Aa.

5. Per dare all' equazione (b) una maggiore generalità pongasi

$$\Sigma t = \frac{2}{\sqrt{g}}(n),$$

essendo $\frac{2}{\sqrt{g}}$ il tempo pel diametro verticale nel caso del raggio eguale all' unità, ed (n) un coefficiente, che per due, tre, quattro, cinque ecc. corde indicheremo per (2), (3), (4), (5)...ec. È gioverà qui notare, che se per un altro sistema di corde eguali, ovvero per un diverso numero di corde considerate in un medesimo sistema si avesse

$$\Sigma t' = \frac{2}{\sqrt{g}} \, (n'),$$

dovrebbe essere, come è evidente, $\Sigma t = \Sigma t'$, ovvero Σt maggiore o minore di $\Sigma t'$, quante volte fosse $(n) = (n')$, ovvero (n) maggiore o minore di (n').

Si facciano adunque nell'equazione (b) le sopra indicate sostituzioni, e quindi le necessarie riduzioni, e posto per abbreviare

$$\alpha_1 = 3 - 2x$$

$$\alpha_2 = 5 - 10x + 4x^2$$

$$\alpha_3 = 7 - 28x + 28x^2 - 8x^3$$

$$\alpha_4 = 9 - 60x + 108x^2 - 72x^3 + 16x^4$$

$$\vdots$$

ed in generale

$$\alpha_\nu = \Delta \frac{\nu}{1} \cdot \frac{\nu}{1} - \Delta \frac{\nu(\nu-1)}{1.2} \cdot \frac{\nu(\nu+1)}{1.3} x + \Delta \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3} \cdot \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{1.3.5} x^2$$

$$- \Delta \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.2.3.4} \cdot \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{1.3.5.7} x^3 + \ldots$$

dove il segno Δ è relativo alla variabile ν di cui la differenza finita è l'unità; si avrà

per due corde

$$(2) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} + \sqrt{(1 + \alpha_1)} - \sqrt{\alpha_1}$$

per tre corde

$$(3) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} + \frac{\sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)} - \sqrt{\alpha_2}}{\alpha_1} + \sqrt{(1 + \alpha_1 + \alpha_2)} - \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

per quattro corde

$$(4)=\frac{1}{\sqrt{a_3}}+\frac{\sqrt{(a_2+a_3)}-\sqrt{a_3}}{a_2}+\frac{\sqrt{(a_1+a_2+a_3)}-\sqrt{(a_2+a_3)}}{a_1}$$

$$+\sqrt{(1+a_1+a_2+a_3)}-\sqrt{(a_1+a_2+a_3)}$$

per cinque corde

$$(5)=\frac{1}{\sqrt{a_4}}+\frac{\sqrt{(a_3+a_4)}-\sqrt{a_4}}{a_3}+\frac{\sqrt{(a_2+a_3+a_4)}-\sqrt{(a_3+a_4)}}{a_2}$$

$$+\frac{\sqrt{(a_1+a_2+a_3+a_4)}-\sqrt{(a_2+a_3+a_4)}}{a_1}$$

$$+\sqrt{(1+a_1+a_2+a_3+a_4)}-\sqrt{(a_1+a_2+a_3+a_4)}$$

per n corde

$$(n)=\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}}+\frac{\sqrt{(a_{n-2}+a_{n-1})}-\sqrt{a_{n-1}}}{a_{n-2}}$$

$$+\frac{\sqrt{(a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1})}-\sqrt{(a_{n-2}+a_{n-1})}}{a_{n-3}}+\ldots$$

$$+\sqrt{(1+a_1+a_2+..+a_{n-1})}-\sqrt{(a_1+a_2+..+a_{n-1})}.$$

6. Riducendo ora in numeri li secondi membri di queste equazioni, nell'ipotesi primo dell'arco Aa infinitesimo, e quindi di 5°, 10°, 15°, 20°, e limitandosi a sole cinque corde, si avranno i seguenti valori dei coefficienti (2), (3), (4), (5), i quali moltiplicati per $\frac{2}{\sqrt{g}}$ daranno l'espressione di Σt pei diversi casi che abbiamo presi a considerare:

a	x	(2)	(3)	(4)	(5)
Inf.	0	0,84529	0,81623	0,80496	0,79917
5°	0,00381	0,84633	0,81897	0,81033	0,80793
10	0,01518	0,84945	0,82760	0,82689	0,83522
15	0,03407	0,85463	0,84230	0,85594	0,88472
20	0,06031	0,86210	0,86363	0,89993	0,96419

Trascurando l' indagine de' casi ne' quali in diversi sistemi di corde eguali, essendo $(n)=(n')$ si ha $\Sigma t = \Sigma t'$ (§ 5), che facilmente deduconsi da questa tavola (1), ci limiteremo soltanto ad osservare in quali circostanze regnano queste condizioni, considerando un diverso numero di corde in un medesimo sistema.

In primo luogo adunque dai valori numerici dei coefficienti (2), (3).... ec., riuniti nella tavola superiore si deduce che ai 5° si ha il coefficiente $(4) > (5)$, ed ai 10° $(4) < (5)$; onde segue che fra il 5°, ed il 10° deve esserci un arco di cui il seno verso x introdotto nelle corrispondenti superiori espressioni deve dare $(4) = (5)$. Similmente osservo, che ai 5° si ha $(3) > (5)$ ed ai 10° $(3) < (5)$; dunque fra il 5° ed il 10° vi deve essere anche un valore di x dal quale risulti $(3)=(5)$. Così anche fra il 10° ed il 15° deve esserci il caso di $(3)=(4)$, di $(2)=(5)$, e di $(2)=(4)$: e fra il 15° e 20° deve esserci un valore di x che dia $(2)=(3)$.

7. Il metodo diretto per istabilire i valori di x che soddisfacciano all' equazioni $(4)=(5)$; $(3)=(5)$;... ec. sarebbe ben lungo e tedioso a motivo delle radicali contenute in (2), (3), (4), (5); servendomi però di un metodo indiretto ho trovato i numeri racchiusi nella seguente tavola:

---

(1) Vedesi per esempio dalla tavola superiore, che due corde infinitamente piccole posson percorrersi nel medesimo tempo di cinque eguali corde, delle quali ognuna sottenda un arco compreso fra 10 e 15 gradi.

a	x	(2)	(3)	(4)	(5)
6.°28′	0,00636			0,81380	0,81382
8. 25	0,01077		0,82427		0,82428
10. 18	0,01612		0,82833	0,82832	
11. 53	0,02143	0,85108			0,85106
14. 47	0,03310	0,85437		0,85433	
19. 30	0,05736	0,86122	0,86120		

In questa tavola primieramente si osserva, che al seno verso x=0,00636, che corrisponde all'arco 6° 28′ si ha (4)=(5); da ciò s' inferisce adunque (§ 5) che il tempo per cinque eguali corde sarà eguale al tempo per quattro, purchè ognuna di queste sottenda un arco di 6° 28′. Si osserva similmente, per l' eguaglianza dei coefficienti (5) e (3), che il tempo per cinque corde sarà eguale al tempo per tre, quando ognuna di queste sottenda un arco di 8° 25′; e se sottendano 11° 53′ il tempo per cinque corde sarà eguale al tempo per due. Inoltre se quattro corde sottendano 10° 18′, il tempo per quattro corde sarà eguale al tempo per tre; e se sottendano 14° 47′, il tempo per quattro corde sarà eguale a quello per due. Finalmente il tempo per tre corde sarà eguale al tempo per due quando ognuna di queste sottenda un arco di 19° 30′.

8. È evidente in fine (§ 5) che quando si ha

$$(2)=(3)=(4)=(5)=1$$

il tempo per due, per tre .... ec. corde sarà eguale al tempo pel diametro verticale HA, ovvero al tempo per la corda Aa. Ciocchè segue farà conoscere quello che ho trovato per soddisfare a questa condizione.

a	x	(2)	(3)	(4)	(5)
22.° 6′	0,07347				1,00001
27. 15	0,11098			0,99996	
36. 43	0,19834		0,99998		
56. 24	0.44661	1.00006			

Dunque cinque eguali corde delle quali sottenda ciascuna 22° 6′ si percorreranno nel medesimo tempo del diametro verticale HA, ovvero nel medesimo tempo in cui si percorre la corda ultima *Aa*; il che accaderà anche a quattro, qualora ognuna sottenda 27° 15′; a tre se sottendano 36° 43′ (1); e finalmente a due purchè ognuna sottenda un arco di 56°24′ (2).

Ora egli è evidente, che il numero de' risultamenti che presentano le due superiori tavole, verrà ad aumentarsi, qualora si aumenti il numero delle corde; dunque si potrà conchiudere, che esistono moltissimi casi ne' quali n eguali corde possono esser percorse da un mobile nel medesimo tempo di una corda sola, ovvero di due, o di tre . . . ec. purchè l'ultima fra queste termini al punto infimo A del diametro verticale HA.

9. Finora abbiamo supposto che il grave nel passare da un piano all' altro diversamente inclinato non faccia perdita alcuna di velocità. Ma se si voglia aver riguardo alla diminuzione di velocità che si fa nel passaggio dalla prima alla seconda corda, dalla seconda alla terza . . . . ec., è necessario riflettere, che il grave dopo aver percorsa la prima corda entrerà nella seconda con una velocità dovuta all' altezza

$$(A) = A\cos.^2 a$$

essendo a l' angolo che fa una corda coll' altra. Similmente, nel caso di tre corde eguali, il mobile dopo aver fatta una perdita di velocità nel passaggio dalla prima corda nella seconda, per una nuova perdita di velocità è palese che entrerà nella terza con quella velocità che acquisterebbe se liberamente cadesse dall' altezza

(1) Il Sig. Pessuti trova l' arco *Aa* di 36° 22′ (Mem. della Società Italiana.... Tomo XIII parte I. pag. 187.)

(2) E nel caso di due corde determina *Aa* di 56° 23′ (Mem. citate pag. 183); ed il Sig. Calandrelli di 56° 23′ 13″ (Mechanicum problema . . . pag. 11.)

$$(A)' = [A' + (A)] \cos.^2 a;$$

quindi entrerà nella quarta con una velocità dovuto all'altezza

$$(A)'' = [A'' + (A)'] \cos.^2 a$$

e finalmente entrerà nella quinta con quella velocità che acquisterebbe se cadesse liberamente dall' altezza

$$(A)''' = [A''' + (A)''] \cos.^2 a$$

onde i valori di (A), (A)', (A)'', (A)''' risulteranno

$$(A) = A \cos.^2 a$$

$$(A)' = A' \cos.^2 a + A \cos.^4 a$$

$$(A)'' = A'' \cos.^2 a + A' \cos.^4 a + A \cos.^6 a$$

$$(A)''' = A''' \cos.^2 a + A'' \cos.^4 a + A' \cos.^6 a + A \cos.^8 a$$

i quali, per la legge manifesta con cui procedono, si potranno continuare a piacere quante volte il numero delle corde sia maggiore di quello che noi consideriamo.

10. S' introducano adunque questi valori di (A), (A)', (A)'', (A)''' nell' equazioni del § 5.°, ed esprimendo per brevità il coseno di a colla sola lettera c, si avrà

per due corde

$$[2] = \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \sqrt{(1 + a_1 c^2)} - \sqrt{(a_1 c^2)}$$

per tre corde

$$[3] = \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{\sqrt{(a_1 + a_2 . c^2)} - \sqrt{(a_2 . c^2)}}{a_1} + \sqrt{(1 + a_1 . c^2 + a_2 . c^4)} - \sqrt{(a_1 . c^2 + a_2 . c^4)}$$

per quattro corde

$$[4]=\frac{1}{\sqrt{\alpha_3}}+\frac{\sqrt{(\alpha_2+\alpha_3.c^2)}-\sqrt{(\alpha_3.c^2)}}{\alpha_2}+\frac{\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2.c^2+\alpha_3.c^4)}-\sqrt{(\alpha_2.c^2+\alpha_3.c^4)}}{\alpha_1}$$

$$+\sqrt{(1+\alpha_1.c^2+\alpha_2.c^4+\alpha_3.c^6)}-\sqrt{(\alpha_1.c^2+\alpha_2.c^4+\alpha_3 c^6)}$$

per cinque corde.

$$[5]=\frac{1}{\sqrt{\alpha_4}}+\frac{\sqrt{(\alpha_3+\alpha_4.c^2)}-\sqrt{(\alpha_4.c^2)}}{\alpha_3}+\frac{\sqrt{(\alpha_2+\alpha_3.c^2+\alpha_4.c^4)}-\sqrt{(\alpha_3.c^2+\alpha_4.c^4)}}{\alpha_2}$$

$$+\frac{\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2 c^2+\alpha_3.c^4+\alpha_4 c^6)}-\sqrt{(\alpha_2 c^2+\alpha_3.c^4+\alpha_4.c^6)}}{\alpha_1}$$

$$+\sqrt{(1+\alpha_1 c^2+\alpha_2 c^4+\alpha_3 c^6+\alpha_4 c^8)}-\sqrt{(\alpha_1.c^2+\alpha_2.c^4+\alpha_3.c^6+\alpha_4.c^8)}$$

per n corde

$$[n]=\frac{1}{\sqrt{\alpha_{n-1}}}+\frac{\sqrt{(\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}.c^2)}-\sqrt{(\alpha_{n-1}.c^2)}}{\alpha_{n-2}}$$

$$+\frac{\sqrt{(\alpha_{n-3}+\alpha_{n-2}.c^2+\alpha_{n-1}.c^4)}-\sqrt{(\alpha_{n-2}c^2+\alpha_{n-1}.c^4)}}{\alpha_{n-3}}+\ldots$$

$$\ldots+\sqrt{(1+\alpha_1.c^2+\alpha_2.c^4+\alpha_3.c^6.\ldots+\alpha_{n-1}.c^{2(n-1)})}$$

$$-\sqrt{(\alpha_1.c^2+\alpha_2.c^4+\alpha_3 c.^6.\ldots+\alpha_{n-1}.c^{2(n-1)})}$$

11. Riducendo ora in numeri queste espressioni dei coefficienti [2], [3] . . . ec., supponendo come sopra l'arco Aa di 5°, 10°, 15°, 20°, si otterrà

a	x	[2]	[3]	[4]	[5]
Inf.	0	0,84529	0,81623	0,80496	0,79917
5°	- 0,00381	0,84820	0,82076	0,81280	0,81090
10	0,01518	0,85299	0,83411	0,83635	0,84748
15	0,03407	0,86284	0,85726	0,87765	0,91337
20	0,06031	0,87694	0,89114	0,93871	1,01821

Su questi numeri posson farsi delle riflessioni analoghe a quelle del § 6°, onde potranno anche dedursene analoghi risultamenti, i quali sono come nella seguente tavola:

a	x	[2]	[3]	[4]	[5]
5.° 57	0,00539			0,81601	0,81603
7. 32	0,00863		0,82636		0,82637
9. 10	0,01277		0,83117	0,83114	
10. 37	0,01712	0,85390			0,85386
12. 55	0,02532	0,85818		0,85814	
16. 36	0,04168	0,86682	0,86677		

Da questi numeri si comprende, che posta la perdita di velocità che far si deve da un mobile nel passaggio da una corda nell' altra, cinque eguali corde si percorreranno nel medesimo tempo di quattro, o di tre o di due, purchè queste corde sottendano nel primo caso archi di 5° 57', nel secondo di 7° 32', e nel terzo di 10° 37'. Inoltre quattro eguali corde si percorreranno nel medesimo tempo di tre, o di due, purchè nel primo caso sottendano archi di 9° 10', e nel secondo di 12° 55'. Finalmente se tre corde eguali sottenderanno archi di 16° 36', queste si percorreranno nel medesimo tempo di due.

I valori in fine di [2], [3].... ec. trovati per soddisfare alla condizione

$$[2] = [3] = [4] = [5] = 1$$

sono i seguenti

a	x	[2]	[3]	[4]	[5]
19° 0′	0,05448				0,99991
23.13	0,08098			1,00008	
30. 7	0,13499		0,99998		
(1) 41.40	0,25298	1,00002			

La sola prima colonna di questa tavola ci pone sott'occhio gli archi che debbono sottendere le corde eguali in numero di cinque, di quattro, di tre, o di due, acciò queste sieno percorse da un mobile nel medesimo tempo che il diametro verticale, ovvero nel medesimo tempo in cui si percorre la corda *Aa*.

In somma chiaramente apparisce da questi numeri, che tutto quello che di sopra si è detto al fine del § 8°, potrà anche estendersi al caso in cui si ha riguardo alla perdita di velocità che far si deve nel passaggio da una corda nella seguente; vale a dire che anche in questa ipotesi esistono moltissimi casi ne' quali n, ed $n-1$, ovvero $n-2$, o $n-3$ . . . $n-(n-1)$ corde eguali possono essere percorse da un mobile nel medesimo tempo, supponendo però sempre che l'ultima fra queste corde termini in A, punto infimo del diametro verticale HA.

12. Se in luogo dell' eguaglianza delle corde suppongasi ora quella delle projezioni, onde si abbia

$$A = A' = A'' = A''' \ldots\ldots \text{ec.}$$

L' equazione (a) acquisterà una maggiore semplicità, riducendosi l' espressione del tempo della discesa per un numero p di corde alla seguente:

(1) Il valore di quest' arco è identico a quello determinato dai Signori Calandrelli e Pessuti.

$$\Sigma t = \sqrt{\frac{2}{g}}\left[\frac{C}{\sqrt{A}} + \frac{C'}{\sqrt{A}}(\sqrt{2}-\sqrt{1}) + \frac{C''}{\sqrt{A}}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\right.$$

$$(c)\qquad + \frac{C'''}{\sqrt{A}}(\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \frac{C^{\text{v}}}{\sqrt{A}}(\sqrt{5}-\sqrt{4})$$

$$\left. + \ldots\ldots\ldots + \frac{C^{(p-1)}}{\sqrt{A}}(\sqrt{p}-\sqrt{(p-1)})\right]$$

la quale, come facilmente si comprende, potrà cambiarsi in

$$\Sigma t = \theta + \theta'(\sqrt{2}-\sqrt{1}) + \theta''(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$(d)\qquad + \theta'''(\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \theta^{\text{v}}(\sqrt{5}-\sqrt{4})$$

$$+ \ldots\ldots\ldots + \theta^{(p-1)}(\sqrt{p}-\sqrt{(p-1)})$$

indicando con θ, θ', θ'', θ'''. . . . ec. i tempi per le corde C, C', C'', C''', C$^{\text{v}}$. . . . ec. nel caso che il moto in ciascuna di queste incominci dalla quiete.

13. Sarà bene quì riflettere che nell' equazione (*c*) si ha $C^{(p-1)} = \sqrt{2A}$, essendo il raggio eguale all' unità; dunque il tempo per l' ultima corda si ridurrà a

$$\frac{2}{\sqrt{g}}(\sqrt{p}-\sqrt{(p-1)}),$$

ciocchè può anche ottenersi dall' ultimo termine dell' equazione (*d*), ponendo in luogo di $\theta^{(p-1)}$ il suo valore $\frac{2}{\sqrt{g}}$.

Deve ora notarsi che quella espressione include soltanto il numero p, ed è indipendente da C, e da A, onde è costante nei sistemi composti di un egual numero di corde. Dunque s' inferisce, che nell' ipotesi di A=A'=A''=A'''. . . . ec. qualunque sia la grandezza di queste quantità e per conseguenza anche quella di C, C', C'', C'''. . . . ec., nei diversi sistemi composti di un egual numero di corde, il tempo per la corda ultima che termina al punto infimo A del diametro verticale sarà costante.

Il tempo costante adunque per l'ultima corda Aa nei sistemi composti di un numero di corde.

$$p = 1 \text{ sarà } \frac{2}{\sqrt{g}}$$

$$p = 2 \ . \ . \ . \frac{2}{\sqrt{g}} (\sqrt{2} - \sqrt{1})$$

$$p = 3 \ . \ . \ . \frac{2}{\sqrt{g}} (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$p = 4 \ . \ . \ . \frac{2}{\sqrt{g}} (\sqrt{4} - \sqrt{3})$$

$$p = 5 \ . \ . \ . \frac{2}{\sqrt{g}} (\sqrt{5} - \sqrt{4})$$

ec. . . . . ec.

14. Rendiamo ora più generale l' ipotesi fatta al § 12° supponendo che in luogo dell' eguaglianza delle projezioni A, A', A''. . . . ec. regni fra queste quantità una relazione tale che si abbia

$$(e) \qquad \begin{aligned} A &= A \\ A' &= Aa \\ A'' &= Ab \\ A''' &= Ac \\ &\vdots \\ \overset{(p-2)}{A} &= Am \\ \overset{(p-1)}{A} &= An \end{aligned}$$

essendo nei diversi sistemi composti di egual numero di corde, A variabile, ed a, b, c. . . . m, n costanti. Introducendo questi valori nell' equazione (a) si otterrà

$$\Sigma t = \frac{C\sqrt{2}}{\sqrt{gA}} + \frac{C'\sqrt{2}}{aA\sqrt{g}}[\sqrt{(aA+A)}-\sqrt{A}]$$

$$+\frac{C''\sqrt{2}}{bA\sqrt{g}}[\sqrt{(bA+aA+A)}-\sqrt{(aA+A)}]$$

$$+\frac{C'''\sqrt{2}}{cA\sqrt{g}}[\sqrt{(cA+bA+aA+A)}-\sqrt{(bA+Aa+A)}]$$

$$\vdots$$

$$+\frac{C^{(p-1)}\sqrt{2}}{nA\sqrt{g}}[\sqrt{(nA\ldots+aA+A)}-\sqrt{(mA\ldots+aA+A)}]$$

la quale ridotta ci darà

$$\Sigma t = \frac{C\sqrt{2}}{\sqrt{gA}} + \frac{C'\sqrt{2}}{\sqrt{aA}.\sqrt{ag}}[\sqrt{(a+1)}-1]$$

$$+\frac{C''\sqrt{2}}{\sqrt{bA}.\sqrt{bg}}[\sqrt{(b+a+1)}-\sqrt{(a+1)}]$$

$$(f)\qquad +\frac{C'''\sqrt{2}}{\sqrt{cA}.\sqrt{cg}}[\sqrt{(c+b+a+1)}-\sqrt{(b+a+1)}]$$

$$\vdots$$

$$+\frac{C^{(p-1)}\sqrt{2}}{\sqrt{nA}.\sqrt{ng}}[\sqrt{(n\ldots+b+a+1)}-\sqrt{(m\ldots+b+a+1)}],$$

e rappresentando, come, nell' equazione (d), per $\theta, \theta', \theta''\ldots$ ec. i tempi della discesa per le corde C, C′, C″. . . ec. nel caso che in queste incominci il moto dalla quiete, questa equazione potrà anche ridursi alla seguente:

$$\Sigma t = \theta + \frac{\theta'}{\sqrt{a}}[\sqrt{(a+1)}-1]$$

$$+\frac{\theta''}{\sqrt{b}}[\sqrt{(b+a+1)}-\sqrt{(a+1)}]$$

$$(g)\qquad +\frac{\theta'''}{\sqrt{c}}[\sqrt{(c+b+a+1)}-\sqrt{(b+a+1)}]$$

$$\vdots$$

$$+\frac{\overset{(p-1)}{\theta}}{\sqrt{n}}[\sqrt{(n....+b+a+1)}-\sqrt{(m....+b+a+1)}].$$

Ora è evidente che nell' equazione (f) deve essere $\overset{(p-1)}{C} = \sqrt{(2nA)}$, essendo il raggio eguale all' unità; quindi il tempo per l' ultima corda Aa sarà

$$(h)\qquad \frac{2}{\sqrt{ng}}[\sqrt{(n\ ....+b+a+1)}-\sqrt{(m\ ...+b+a+1)}],$$

ciocchè si ottiene anche dal termine ultimo dell' equazione (g). Ora questa espressione è indipendente da C, e da A; nel caso adunque che esaminiamo potrà inferirsi, che se in diversi sistemi composti di egual numero di corde regni la relazione fra le projezioni A, A', A''.... ec. indicata dall'equazioni (e), l' ultime corde che terminano al punto infimo del diametro verticale si percorreranno nel medesimo tempo.

15. Per farne qualche applicazione, supponiamo in primo luogo, che le projezioni delle corde C, C', C'',... ec. sul diametro verticale HA sieno A, 2A, 3A, 4A . . . ec., onde si abbia $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ . . . . ec. Fatte queste sostituzioni nella formola (h), e rappresentando per P1, P2, P3, P4 . . . . ec. i tempi costanti della discesa per l'ultima corda Aa nei sistemi composti di un numero di corde $p=1$, $p=2$, $p=3$, $p=4$ . . . . ec. si avrà

$$P1 = \frac{2}{\sqrt{g}}$$

$$P2 = \frac{2}{\sqrt{2g}}[\sqrt{3} - \sqrt{1}]$$

$$P3 = \frac{2}{\sqrt{3g}}[\sqrt{6} - \sqrt{3}]$$

$$P4 = \frac{2}{\sqrt{4g}}[\sqrt{10} - \sqrt{6}]$$

$$P5 = \frac{2}{\sqrt{5g}}[\sqrt{15} - \sqrt{10}]$$

$$P6 = \frac{2}{\sqrt{6g}}[\sqrt{21} - \sqrt{15}]$$

$$P7 = \frac{2}{\sqrt{7g}}[\sqrt{28} - \sqrt{21}]$$

ec. ec.

e riducendo l' espressioni corrispondenti ai numeri impari P1, P3, P5 . . . . ec. Si otterrà

$$P1 = \frac{2}{\sqrt{g}}$$

$$P3 = \frac{2}{\sqrt{g}}[\sqrt{2} - \sqrt{1}]$$

$$P5 = \frac{2}{\sqrt{g}}[\sqrt{3} - \sqrt{2}]$$

$$P7 = \frac{2}{\sqrt{g}}[\sqrt{4} - \sqrt{3}]$$

ec. ec.

valori identici a quelli trovati sopra (§ 13) nei sistemi composti di due, tre.... ec. corde nell' ipotesi di $A = A' = A''$... ec.

16. Se i valori di a, b, c...ec. son tali da togliere l'irrazionalità alla formola (h), l'espressione costante del tempo per Aa si renderà più semplice. Per esempio se le projezioni fossero A, 3A, 5A, 7A . . . ec. onde $a=3$, $b=5$, $c=7$ . . . ec. dalla formola (h) si avrebbe

$$P.\,1=\frac{2}{\sqrt{g}}$$

$$P'.\,2=\frac{2}{\sqrt{3g}}$$

$$P'.\,3=\frac{2}{\sqrt{5g}}$$

$$P'.\,4=\frac{2}{\sqrt{7g}}$$

$$P'.\,5=\frac{2}{\sqrt{9g}}$$

ec. ec.

Così anche se fosse $a=2^3$; $b=3^3$; $c=4^3$. . . . ec. l' irrazionalità in (h) sarebbe tolta; mentre è noto, che incominciando dall' unità, la somma di n cubi de' numeri naturali è eguale al quadrato dell' enesimo numero preso nella serie de' numeri triangolari. Fatte dunque in (h) quelle sostituzioni in luogo di a, b, c, ec., e quindi le opportune riduzioni si avrebbe

$$P.\,1=\frac{2}{\sqrt{g}}$$

$$P''.\,2=\frac{2}{\sqrt{2g}}$$

$$P''.\,3=\frac{2}{\sqrt{3g}}$$

$$P''.\,4=\frac{2}{\sqrt{4g}}$$

$$P''.\,5=\frac{2}{\sqrt{5g}}$$

ec. ec.

dove è da notarsi, che quando le corde sono di numero impari, i tempi costanti per Aa coincidono con quelli trovati di sopra nell' ipotesi di $a=3$, $b=5$, $c=7$ . . . ec.

Dai diversi valori adunque o interi, o fratti di a, b, c... ec. dipenderanno le diverse espressioni più o meno semplici del tempo per la corda ultima Aa, qual tempo nei diversi sistemi composti di un numero eguale di corde sarà costante, qualunque sia la loro grandezza, purchè in ogni sistema regni la relazione fra le projezioni A, A′, A″ . . . ec. indicata dall' equazioni (e).

17. Gioverà quì di passaggio osservare, che se nell'equazioni (f) e (g) si pone primieramente $a=3$; $b=5$; $c=7$ ... ec. e quindi $a=2^3$; $b=3^3$; $c=4^3$. . . . ec. si otterranno le seguenti semplici espressioni del tempo della discesa per un numero qualunque p di corde cioè nel primo caso (equazione f)

$$\Sigma t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{gA}} \left[\frac{C}{1} + \frac{C'}{3} + \frac{C''}{5} + \frac{C'''}{7} + \frac{C^{iv}}{9} \ldots + \frac{C^{(p-1)}}{2p-1} \right]$$

e nel secondo caso

$$\Sigma t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{gA}} \left[\frac{C}{1^2} + \frac{C'}{2^2} + \frac{C''}{3^2} + \frac{C'''}{4^2} + \frac{C^{iv}}{5^2} \ldots + \frac{C^{(p-1)}}{p^2} \right]$$

ovvero nel primo caso (equazione g)

$$\Sigma t = \frac{\theta}{\sqrt{1}} + \frac{\theta'}{\sqrt{3}} + \frac{\theta''}{\sqrt{5}} + \frac{\theta'''}{\sqrt{7}} + \frac{\theta^{iv}}{\sqrt{9}} \ldots + \frac{\theta^{(p-1)}}{\sqrt{2p-1}}$$

e nel secondo caso

$$\Sigma t = \frac{\theta}{\sqrt{1}} + \frac{\theta'}{\sqrt{2}} + \frac{\theta''}{\sqrt{3}} + \frac{\theta'''}{\sqrt{4}} + \frac{\theta^{iv}}{\sqrt{5}} \ldots + \frac{\theta^{(p-1)}}{\sqrt{p}}$$

essendo θ, θ', θ''. . . ec. i tempi per le corde C, C′, C″. . . ec. posto che il moto in ognuna di queste incominci dalla quiete.

18. Abbiamo di sopra veduto (§ 14) che quando di due

corde PN, PA, le projezioni sono A, ed Aa, l'espressione costante del tempo per la PA è eguale $\frac{2}{\sqrt{ag}}[\sqrt{(a+1)}-1]$. Da ciò si comprende che con molta speditezza può determinarsi un arco APN di cui la corda AN debba percorrersi nello stesso tempo delle due corde ineguali AP, PN delle quali le projezioni sieno Aa, ed A. Infatti posto NP = C, Af = x, onde $fg = \frac{x}{a}$, è chiaro che quello che si cerca dipenderà dalla soluzione dell' equazione

$$\frac{2}{\sqrt{g}} = \frac{C\sqrt{2}}{\sqrt{g\frac{x}{a}}} + \frac{2}{\sqrt{ag}}(\sqrt{(a+1)}-1)$$

ovvero

$$\frac{C}{\sqrt{2x}} = \frac{1+\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{a},$$

in cui ponendo in luogo di C il suo valore in x e riflettendo che PA$=\sqrt{2x}$, ed NA $=\sqrt{\frac{2(ax+x)}{a}}$, dopo qualche semplice riduzione si ottiene

$$\sqrt{(a+1)}\sqrt{(4-2x)}-\sqrt{(4a-(2ax+2x))}=2\left(1-\frac{\sqrt{(a+1)}-1}{\sqrt{a}}\right),$$

la quale liberata dalle radicali, e posto per semplicità

$$1-\frac{\sqrt{a+1}-1}{\sqrt{a}} = N,$$

ci darà

$$x = \frac{(4a+2)N^2-N^4-1}{2N\ (a+1)}$$

19. Supponiamo in primo luogo $a=1$, onde A'=A, e si avrà $N=2-\sqrt{2}$, ed $x=\frac{6N^2-N^4-1}{4N^2}=0{,}68564$, e $2x=1{,}37128$. A questi due seni versi corrispondono AFP = 71.° 40.' 40", ed APN = 111.° 47.' 40." Gli archi adunque che soddisfanno al

problema sono AFP $= 71^\circ\, 40'\, 40''$, e PN$=40.^\circ\, 7'$ de' quali le corde si percorreranno nel medesimo tempo della corda NA.

Sia in secondo luogo A'$=$2A, onde $a=2$, ed $N = 1 - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$: $x = \frac{10N^2 - N^4 - 1}{6.N^2} = 0{,}91148$; $\frac{x}{2} = 0{,}45574$; $x + \frac{x}{2} = 1{,}36722$; onde in questo caso gli archi saranno AFP $= 84^\circ\, 55'\, 13''$, e PN$=26^\circ\, 37'\, 27''$.

Sia finalmente $a = 3$, ossia A'$=$ 3A, si avrà $N = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$; $x = \frac{14N^2 - N^4 - 1}{8N^2} = 1{,}02790$; $\frac{x}{3} = 0{,}34263$; ed $x + \frac{x}{3} = 1{,}37053$. Gli archi adunque corrispondenti alle corde, che nell' ipotesi di A'$=$3A si percorreranno nel medesimo tempo del diametro verticale HA saranno AFP$=91^\circ\, 35'\, 56''$, e PN$=20^\circ\, 8'\, 59''$.

Se a fosse infinitamente grande si avrebbe $a + 1 = a$, $N = \frac{1}{\sqrt{a}}$; $N^2 = \frac{1}{a}$, ed N^4 trascurabile, ed il valore di x risulterebbe di 1, 5, e l' arco PN infinitamente piccolo. Ora al seno verso 1, 5 corrisponde l'arco di 120°; dunque qualunque sia il valore intero e positivo di a, gli archi AFP non potranno esser maggiori di 120° circa, nè minori di 71° 41': ovvero più chiaramente, gli archi APN che possono soddisfare alle condizioni del problema pei diversi valori positivi ed intieri di a dovranno esser fra i limiti di 111° 48', e 120° circa.

20. Se per determinare gli archi PN e PFA de' quali le corde si debbon percorrere nel medesimo tempo della NA si volesse aver riguardo alla perdita di velocità che si fa dal mobile nel passaggio dalla corda NP alla PA, ponendo l'arco PFA$=b'$, e l' arco PN$=b$, dopo qualche riduzione si avrebbe l'equazione

$$1 = \frac{C\sqrt{a}}{\sqrt{2x}} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{a}\cos.^2\left(\frac{b'+b}{2}\right)\right)} - \sqrt{\left(\frac{1}{a}\cos.^2\left(\frac{b'+b}{2}\right)\right)},$$

nella quale sostituendo in luogo di $\cos.^2\left(\frac{b'+b}{2}\right)$ l'eguale $\frac{2a - x(a+1)}{2a}$, ed in luogo di C il suo valore dato per x si avrà

$$\sqrt{(a+1)}\sqrt{(4-2x)}-\left(\frac{1}{a}+1\right)\sqrt{(4a-2xa-2x)}$$
$$=2-\frac{1}{a}\sqrt{(4a^2+4a-2ax-2x)}$$

dalla quale, secondo i diversi valori di a potrà ottenersi quello di x con minore o maggiore giro di calcolo. Per esempio nel caso più semplice quale è quello di $A'=A$, ossia $a=1$, quest' equazione si riduce alla seguente

$$2\sqrt{(2-x)}=1+2\sqrt{(1-x)}$$

da cui prontamente si ottiene $x=0{,}4375$, e quindi $2x=0{,}8750$. In questo caso adunque sarà l' arco AFN $= 82°\ 49'\ 10''$, ed AFP$=55°\ 46'\ 14''$; onde essendo le projezioni A' ed A eguali fra loro, le due corde PA, e PN che si descrivono nel medesimo tempo della AN apparterranno agli archi AFP, e PN, il primo di $55°\ 46'\ 14''$ ed il secondo di $27°\ 2'\ 56''$, qualora però si abbia riguardo alla perdita di velocità che deve farsi dal mobile nel passaggio dalla corda NP alla PA.

21. Si consideri ora un segmento qualunque IR (*Fig.* 2) del diametro verticale HR diviso in parti It, ts, sn . . . GR di numero p, delle quali il valore sia A, Aa . . . . Al, Am, An, essendo a . . . l, m, n costanti nei sistemi composti di egual numero p di segmenti, ed A una quantità variabile. Dai punti I, t, s . . . G si conducano le ordinate Io, tc, sb. . . GQ, e dal punto R agli estremi di queste le corde Ro, Rc, Rb. . . RQ. la corda RQ, e l' ordinata Io sieno continuate fino ad incontrarsi in P, e si avrà la PR che dal prolungamento delle tc, sb, nd . . . ec. sarà divisa in parti Ph, hg, fg . . . ec. di numero p delle quali le projezioni sul diametro verticale HR saranno A, Aa, Ab . . . An. Ciò premesso, ponendo la corda RQ $=$ C si otterrà

$$Ph=\frac{C}{n}\,;\quad Pg=\frac{C(a+1)}{n}\,;\quad Pf=\frac{C(b+a+1)}{n}\,;\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$PQ=\frac{C(m.....+b+a+1)}{n}\,,\quad PR=\frac{C(n....+b+a+1)}{n}\,.$$

Se dunque fingiamo che un corpo partendo da P discenda lungo la PR, si comprende all' istante, che l' espressione dei tempi T, T', T''.... $T^{(p-2)}$, $T^{(p-1)}$ per le Ph, Pg ... PQ, PR non includeranno la variabile A, ma dipenderanno soltanto dalle quantità costanti a, b. ... m, n. Infatti si troverà

$$T=\frac{2}{\sqrt{ng}}$$

$$T'=\frac{2\sqrt{(a+1)}}{\sqrt{ng}}$$

$$T''=\frac{2\sqrt{(b+a+1)}}{\sqrt{ng}}$$

$$\vdots$$

$$T^{(p-2)}=\frac{2\sqrt{(m....b+a+1)}}{\sqrt{ng}}$$

$$T^{(p-1)}=\frac{2\sqrt{(n....+b+a+1)}}{\sqrt{ng}}.$$

Dunque i tempi costanti pei segmenti Ph, hg, gf... rQ, QR di numero p corrispondenti alle projezioni A, Aa, Ab...Am, An saranno

$$T=\frac{2}{\sqrt{ng}}$$

$$T'-T=\frac{2}{\sqrt{ng}}[\sqrt{(a+1)}-1]$$

$$(i)\qquad T''-T'=\frac{2}{\sqrt{ng}}[\sqrt{(b+a+1)}-\sqrt{(a+1)}]$$

$$T'''-T''=\frac{2}{\sqrt{ng}}[\sqrt{(c+b+a+1)}-\sqrt{(b+a+1)}]$$

$$\vdots$$

$$T^{(p-1)}-T^{(p-2)}=\frac{2}{\sqrt{ng}}[\sqrt{(n....b+a+1)}-\sqrt{(m....b+a+1)}]$$

22. Se le corde Rc, Rb, Rd.... ec. si prolungheranno fino all'orizzontale IP, supponendo sempre che il principio del moto sia nei punti O, C, B, D..... ec., dall'equazioni (i) potrà anche ottenersi il tempo pei segmenti delle ER, RD....RC, RO soltanto che si cambi il fattore comune $\frac{2}{\sqrt{ng}}$ nei fattori

$$\frac{2}{\sqrt{g(m+n)}};\ \frac{2}{\sqrt{g(l+m+n)}},\ \ldots\ldots\ \frac{2}{\sqrt{g(a+b+c....+n)}},\ \frac{2}{\sqrt{g(1+a+b...+n)}}.$$

Se per maggior chiarezza e semplicità si ponga dunque

$$\frac{2}{\sqrt{g}}\ \frac{1}{\sqrt{(1+a+b.....+n)}}=\alpha$$

$$\frac{2}{\sqrt{g}}\ \frac{1}{\sqrt{(a+b+c....+n)}}=\beta$$

$$\frac{2}{\sqrt{g}}\ \frac{1}{\sqrt{(b+c+d.....+n)}}=\gamma$$

$$\frac{2}{\sqrt{g}}\ \frac{1}{\sqrt{(c+d+e.....+n)}}=\delta$$

$$\vdots$$

$$\frac{2}{\sqrt{g}}\ \frac{1}{\sqrt{n}}\ \ldots\ldots=\pi$$

come anche

$$\sqrt{(a+1)}-1\ \ldots\ldots\ldots\ldots=(\beta)$$

$$\sqrt{(b+a+1)}-\sqrt{(a+1)}\ \ldots=(\gamma)$$

$$\sqrt{(c+b+a+1)}-\sqrt{(b+a+1)}=(\delta)$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{(n...+a+1)}-\sqrt{(m...+a+1)}=(\pi)$$

risulteranno i tempi pei segmenti di

RO	RC	RB	RD	RP
α	β	γ	δ	π
$\alpha(\beta)$	$\beta(\beta)$	$\gamma(\beta)$	$\delta(\beta)$	$\pi(\beta)$
$\alpha(\gamma)$	$\beta(\gamma)$	$\gamma(\gamma)$	$\delta(\gamma)$	$\pi(\gamma)$
$\alpha(\delta)$	$\beta(\delta)$	$\gamma(\delta)$	$\delta(\delta)$	$\pi(\delta)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

ove è da notarsi che essendo $\alpha+\alpha(\beta)+\alpha(\gamma)+\alpha(\delta)$...ec. $= \frac{2}{\sqrt{g}}$, ovvero $1+(\beta)+(\gamma)+(\delta)$ . . . ec. $= \frac{2}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{\alpha}$, la somma costante de' tempi per le RO, RC, RB . . . RP sarà espressa da

$$\frac{2}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{\alpha} (\alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots + \pi),$$

ossia sarà dipendente soltanto dai tempi pei primi segmenti Oo', Cc, . . . Ph, come facilmente può verificarsi.

23. Esaminiamo ora particolarmente il caso in cui vogliasi determinare la somma de' tempi pei segmenti Oo', cc', bb', dd'. . . . ec., quali tempi denoteremo con ϑ, ϑ', ϑ'', ϑ'''. . . A questo oggetto s' introducano nell' equazioni (i) le modificazioni corrispondenti che abbiamo sopra indicate, e ritenendo le superiori espressioni avremo

$$\vartheta = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{1}{\sqrt{(1+a+b\ldots+n)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \alpha$$

$$\vartheta' = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{1}{\sqrt{(a+b+c\ldots+n)}} [\sqrt{(a+1)}-1] \ldots\ldots\ldots = \beta(\beta)$$

$$\vartheta'' = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{1}{\sqrt{(b+c+d\ldots+n)}} [\sqrt{(b+a+1)}-\sqrt{(a+1)}] \ldots = \gamma(\gamma)$$

$$\vartheta''' = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{1}{\sqrt{(c+d+e\ldots+n)}} [\sqrt{(c+b+a+1)}-\sqrt{(b+a+1)}] = \delta(\delta)$$

$$\vdots$$

$$\vartheta^{(p-1)} = \frac{2}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} [\sqrt{(n\ldots+b+a+1)}-\sqrt{(m\ldots+b+a+1)}] = \pi(\pi)$$

Riunendo ora questi valori, e ponendo per brevità $\Sigma\vartheta.1$ in luogo di $\vartheta+\vartheta'+\vartheta''\ldots$ ec. si avrà

$$(m) \qquad \Sigma\vartheta.1 = \alpha+\beta(\beta)+\gamma(\gamma)+\delta(\delta)+\ldots+\pi(\pi),$$

espressione, che nel caso che abbiamo preso a considerare ci darà la somma de' tempi pei segmenti Oo', cc', bb', dd'...QR, posto che il principio del moto sia nei punti O, C, B . . . P dell' orizzontale IP.

24. S' immagini ora una Cicloide di cui il vertice sia R, ed il diametro del circolo genitore sia RH. Supponiamo inoltre che le ordinate Io, tc, sb . . . siano prolungate finchè incontrino questa Cicloide nei punti che denoteremo χ, λ, μ.... onde i segmenti Oo', cc', bb'. . . . saranno, come è evidente, eguali e paralelli alle porzioni delle tangenti di questa Cicloide condotte a quei punti. Ora all' estremo della tangente condotta al punto χ, che sarà eguale e paralella ad Oo', s'immagini condotta una linea eguale e paralella alla cc', ovvero eguale e paralella al segmento della tangente condotta al punto λ; all' estremo di questa una linea eguale paralella al segmento bb'. . . ec., onde in tal guisa verrà a formarsi un poligono composto di lati eguali, e paralelli ai segmenti delle tangenti alla Cicloide nei punti χ λ, μ. . . ec. qual poligono terminerà

nell'orizzontale RA con una linea eguale e paralella alla corda RQ. Ciò posto si vede chiaramente che il tempo della discesa per questo poligono si avrà dall' equazione (m) in cui α; $\beta(\beta)$; $\gamma(\gamma)$... saranno i tempi pel primo, secondo, terzo... ec. lato, e $\pi(\pi)$ sarà il tempo per l' ultimo lato eguale e paralello alla corda QR; di qui è che l' espressione di $\pi(\pi)$ coincide colla (h) trovata di sopra (§ 14).

Da tutto l' esposto segue adunque, che prescindendo dalla perdita di velocità che deve farsi nel passaggio da un lato all' altro, qualora rimanga costante il valore delle quantità a, b, c . . . ec. il tempo della discesa sì parziale che totale sarà sempre eguale nei diversi poligoni nel modo indicato descritti, quando contengano un egual numero di lati, prescindendo sempre dalla loro grandezza; ciocchè ha una analogia colla nota proprietà della Cicloide, come infatti deve essere. Applichiamo ora l' equazione (m) a qualche caso particolare.

25. Sia in primo luogo $a = b = c \ldots = 1$, e si ponga per brevità

$$\sigma = 1 + 1 + 1 + 1 \ldots\ldots$$

e si avrà dall' equazione (m)

$$\Sigma \partial 1 = \frac{2}{\sqrt{g}} \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{(\sigma-1)}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{(\sigma-2)}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{(\sigma-3)}} + \ldots \right]$$

da cui si ottiene il tempo costante della discesa per tutti i poligoni come sopra descritti, composti di un numero dei lati $= \sigma$, de' quali le projezioni sul diametro verticale HR sono fra di loro eguali.

Sia in secondo $a=2$, $b=3$, $c=4$. . . . ec., e posto

$$\sigma' = 1 + 2 + 3 + 4 \ldots\ldots$$

il tempo costante della discesa per tutti i poligoni de' quali le projezioni sul diametro verticale sono A, 2A, 3A, 4A... ec., essendo A variabile da un poligono all' altro, si avrà dall' equazione

$$\Sigma\vartheta.1=\frac{2}{\sqrt{g}}\left[\frac{1}{\sqrt{\sigma'}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{(\sigma'-1)}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{(\sigma'-3)}}+\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{\sqrt{(\sigma'-6)}}+\ldots\right].$$

Ponendo inoltre $a=3$, $b=5$, $c=7$ . . . ec. come anche

$$\sigma''=1+3+5+7\ldots,$$

dall' equazione (m) si otterrebbe il tempo costante della discesa espresso per

$$\Sigma\vartheta 1=\frac{2}{\sqrt{g}}\left[\frac{1}{\sqrt{\sigma''}}+\frac{1}{\sqrt{(\sigma''-1)}}+\frac{1}{\sqrt{(\sigma''-2^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(\sigma''-3^2)}}+\ldots\right]$$

quale espressione, come facilmente si comprende, può ridursi alla seguente (§ 22)

$$\Sigma\vartheta 1=t+t'+t''+t'''+t^{\text{IV}}+\ldots$$

rappresentando t, t', t'', t'''. . . . ec. i tempi pei primi segmenti Oo', Cc, Bh'''. . . ; ovvero siccome la somma de' tempi per le RO, RC, RB . . . ec. è espressa da (§ 22)

$$\frac{2}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{\alpha}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots),$$

che nel nostro caso riducesi ad

$$n(t+t'+t''+t'''+t^{\text{IV}}+\ldots\ldots),$$

sarà il tempo della discesa pei poligoni de' quali si tratta, eguale alla somma de' tempi per le RO, RC, RB . . . ec. divisa per n, numero de' lati del poligono.

Finalmente essendo $a=2^3$, $b=3^3$, $c=4^3$. . . ec. e

$$\sigma'''=1+2^3+3^3+4^3+\ldots\ldots$$

pei poligoni composti di un egual numero di lati il tempo costante della discesa sarà

$$\Sigma\vartheta.1 = \frac{2}{\sqrt{g}}\left[\frac{1}{\sqrt{\sigma'''}} + \frac{2}{\sqrt{(\sigma''-1)}} + \frac{3}{\sqrt{(\sigma''-3^2)}} + \frac{4}{\sqrt{(\sigma'''-6^2)}} + \ldots\right]$$

ovvero, ritenendo le denominazioni superiori

$$\Sigma\vartheta.1 = t + 2t' + 3t'' + 4t''' + 5t^{\text{v}} + \ldots$$

26. Se partendo dall' estremo o' del segmento Oo' si condurranno le linee $o'C'$, $C'B'$, $B'D'$.... $E'A'$ eguali e paralelle a cc', bb', dd'.... QR, verrà a formarsi un poligono OA' in tutte le sue parti eguale e paralello a quello di sopra descritto; onde anche di questo poligono OA' si avrà il tempo della discesa dall' equazione (m).

Similmente potranno ottenersi altri poligoni partendo dai punti c, h''', h''.... posti all' esterno del circolo, e conducendo delle linee eguali e paralelle ad $h'''b$, $g''d$, $f'e$... come anche ad $h''g''$, $g'f'$, fr.... ed in seguito ad $h'g'$, gf.... ec. Il tempo costante della totale discesa in tutti questi poligoni, ritenendo le denominazioni superiori, (§ 22) si avrà dalle seguenti equazioni

$$\Sigma\vartheta.1 = \alpha + \beta(\beta) + \gamma(\gamma) + \ldots.$$

$$\Sigma\vartheta.2 = \beta + \gamma(\beta) + \delta(\gamma) + \ldots.$$

$$\Sigma\vartheta.3 = \gamma + \delta(\beta) + \varepsilon(\gamma) + \ldots.$$

$$\Sigma\vartheta.4 = \delta + \varepsilon(\beta) + \xi(\gamma) + \ldots.$$

ec. ec. ec.

le quali potranno continuarsi per la legge manifesta con cui procedono.

In somma dalla semplice ispezione della figura apparisce che il numero delle combinazioni di questi segmenti potrà aumentarsi a piacere, onde costruire de' poligoni, ne' quali l' espressione del tempo della discesa sarà indipendente dalla variabile A, ma dipenderà soltanto da α, β, γ...(β), (γ), (δ)....

ossia dalle sole quantità costanti a,b,c... Da tutto ciò siamo dunque condotti a conchiudere, che il diametro HR, ovvero un segmento qualunque IR del medesimo potrà immaginarsi composto di un indeterminato numero di parti fra di loro eguali, ovvero che fra di loro abbiano una relazione data. Da queste parti, operando come sopra si è indicato, può ottenersi un indeterminato numero di segmenti e per conseguenza anche di poligoni, a ciascun de' quali potrà applicarsi quello che si è detto del poligono considerato al § 24, ovvero al suo paralello OA'; vale a dire che qualora conservino un egual numero di lati, e le quantità a, b, c... un costante valore, il tempo della discesa sarà sempre eguale, prescindendo però dalla perdita di velocità che deve farsi nel passaggio da un lato all' altro.

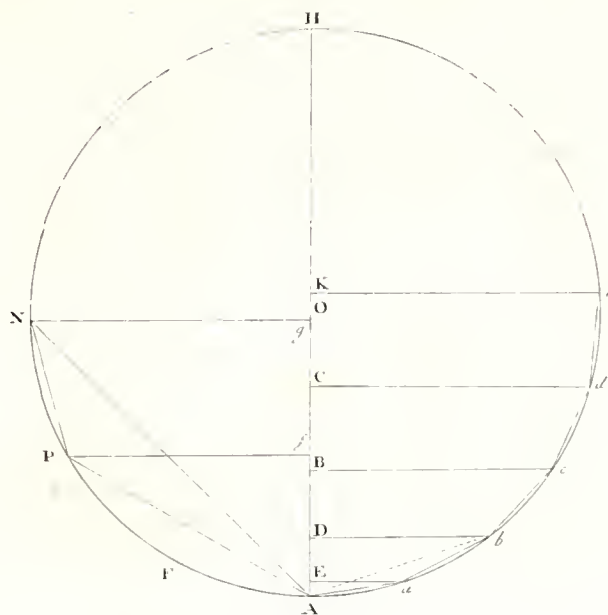
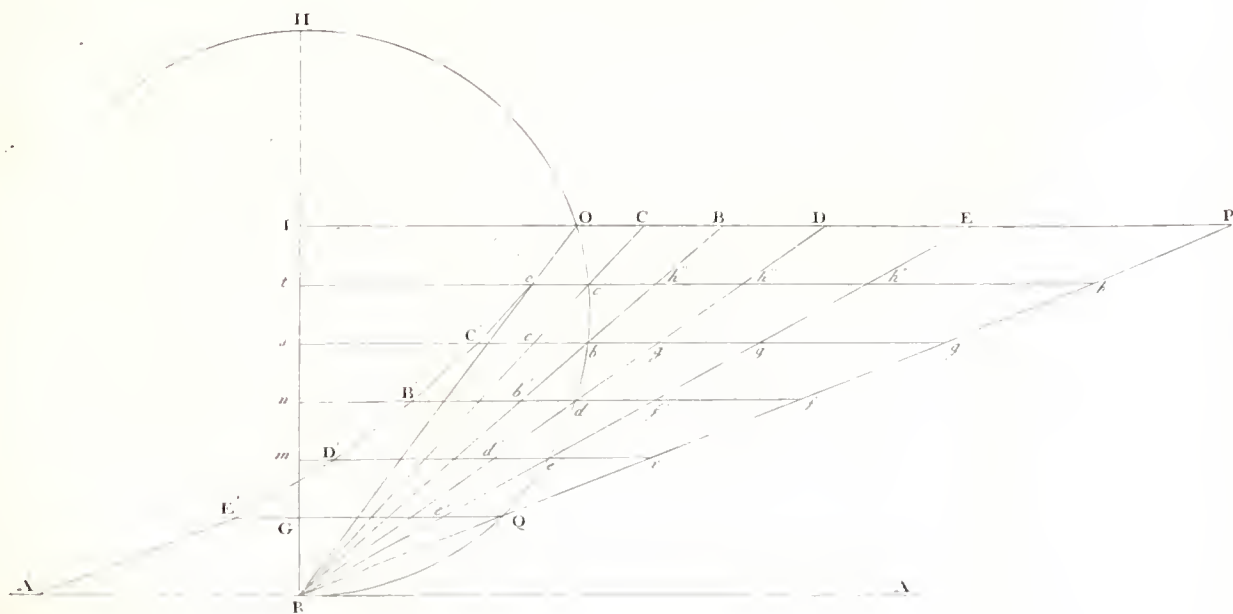



Fig. 1
Fig. 2

MEMORIA

SUI RAPPORTI CHE ESISTONO FRA IL CALCOLO DEI RESIDUI E IL CALCOLO DEI LIMITI E SUI VANTAGGI CHE OFFRONO QUESTI DUE NUOVI CALCOLI NELLA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE O TRASCENDENTI

PRESENTATA ALL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO IL 27 NOVEMBRE 1831.

DAL SIGNOR AGOSTINO CAUCHY

MEMBRO DELL'ISTITUTO DI FRANCIA (*)

Ricevuta adì 23. *Ottobre* 1837.

Siano r, p due variabili reali, x, y due funzioni reali di r, p

$$z = x + y\sqrt{-1} \tag{1}$$

una variabile immaginaria, e $f(z)$ una funzione reale o immaginaria di z. Si potranno considerare x, y come rappresentanti un sistema di coordinate piane, le quali, per fissar le idee, noi supporremo rettangolari ed r, p come rappresentanti un sistema di altre coordinate, per esempio di coordinate polari. Inoltre si avrà evidentemente

$$\frac{d\left[f(z)\frac{dz}{dr}\right]}{dp} = \frac{d\left[f(z)\frac{dz}{dp}\right]}{dr}. \tag{2}$$

Sia v il valor comune delle due funzioni che costituiscono li due membri della equazione precedente. Immaginiamo inoltre

(*) Questa Memoria scritta in lingua Francese è stata tradotta in Italiano dal Segretario della Società per uniformarsi agli Statuti.

che nel piano delle x, y si segni un contorno chiuso OO'O"..., e che si determinino col metodo generalmente seguito nel calcolo infinitesimale i valori degli integrali doppj

$$(3) \qquad \int\int v dp dr$$

$$(4) \qquad \int\int v dr dp\,;$$

supponendo estesa l' integrazione a tutti i punti contenuti in questo contorno vale a dire, a tutti i sistemi di valori di r e p che possono rappresentare delle coordinate di questi medesimi punti. Nell'integrale (3) la prima integrazione relativa a p deve essere effettuata fra limiti che saranno generalmente funzioni di r, e la seconda integrazione relativa ad r fra limiti costanti, mentre che nell' integrale (4) la prima integrazione relativa ad r devee ffettuarsi fra limiti che saranno funzioni di p e la seconda relativa a p fra limiti costanti. Ora siccome la funzione v è al tempo stesso una derivata esatta relativamente a p e relativamente ad r, egli è chiaro che gli integrali doppj quì sopra ricordati si trasformeranno in integrali semplici, in ciascuno dei quali il coefficiente di dx e di dy sarà ordinariamente la differenza fra due valori particolari della funzione

$$(5) \qquad f(z)\,\frac{dz}{dr}$$

o pure

$$(6) \qquad f(z)\,\frac{dz}{dp}$$

ridotte a non esser più che funzioni della sola variabile r o p e corrispondenti ad uno dei punti situati sul contorno OO'O".... Aggiungasi che i valori trovati degli integrali (3) e (4) saranno equivalenti fra loro, se la funzione v resta finita e continua per tutti i valori di r e di p compresi fra i limiti delle integrazioni. Ma se accade il contrario, la differenza fra l' integrale (4) e l'integrale (3) sarà una certa espressione Δ, il valore della quale potrà essere determinato sia per mezzo

della teoria degli integrali singolari, sia con l' ajuto del calcolo dei Residui.

Concepiamo, per fissar le idee, che le funzioni x, y restando finite e continue per tutti i punti contenuti nel contorno OO'O". . . . l' equazione

$$\frac{1}{f(z)} = 0 \tag{7}$$

ammetta delle radici reali o immaginarie $z_{,}, z_{,,} \ldots z_{m}$ corrispondenti ad uno o più di questi stessi punti, ma che la funzione $f(z)$ ottenga per tutti gli altri punti un valor unico e determinato fra i limiti delle integrazioni. Se d' altronde il binomio

$$\frac{dx}{dr}\,\frac{dy}{dp} - \frac{dx}{dp}\,\frac{dy}{dr} \tag{8}$$

conserva sempre un valor positivo si avrà (*)

(*) Infatti essendo z fra le radici della equazione (7) una di quelle che corrispondono a un punto contenuto nel contorno OO'O". . . . la parte di Δ corrispondente a questa radice sarà un integrale definito singolare che si potrà ridurre al prodotto

$$K\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha-\rho(\cos.\tau+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}.\tau)} - \frac{1}{\alpha(+\rho\cos.\tau+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}.\tau)}\right]d\alpha$$

indicando K il residuo parziale relativo alla radice che si considera e $\rho(\cos.\tau+\sqrt{-1}\,\mathrm{sn}.\tau)$ il valor corrispondente del rapporto

$$\frac{\left(\frac{dz}{dp}\right)}{\left(\frac{dz}{dr}\right)} = \frac{\frac{dx}{dr}\cdot\frac{dx}{dp} + \frac{dy}{dr}\cdot\frac{dy}{dp} + \left(\frac{dx}{dr}\cdot\frac{dy}{dp} - \frac{dx}{dp}\cdot\frac{dy}{dr}\right)\sqrt{-1}}{\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2}.$$

Ora esprimendo l' integrale

$$\int\left[\frac{1}{\alpha-\rho(\cos.\tau+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}.\tau)} - \frac{1}{\alpha+\rho(\cos.\tau+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}.\tau)}\right]d\alpha$$

$$(9) \qquad \Delta = 2\pi\sqrt{-1}.E((f(z)))$$

estendendo il segno E ai valori $z_{,}$ $z_{,,}$. . . . z_{m} della variabile z. Se per questi valori, o per alcuni di essi, il binomio (8) divenisse negativo converrebbe mutare i segni dei valori corrispondenti compresi nel secondo membro della equazione (7).

Si può ricorrere alla formola (9) sia per determinar Δ quando si conoscono le radici $z_{,}$, $z_{,,}$. . . z_{m}; sia per determinare queste radici o delle funzioni di queste radici calcolando direttamente i valori degli integrali definiti che Δ contiene. Allora conviene rovesciar la formola (9) e scriverla così

$$(10) \qquad E((f(z))) = \frac{\Delta}{2\pi\sqrt{-1}}.$$

Se vuolsi ottenere un limite superiore al modulo della somma rapppresentata da E($(f(z))$).

Basterà osservare 1.° che con le sostituzioni convenienti si possono trasformare gli integrali definiti contenuti in Δ per modo che trovinsi tutti presi fra gli stessi limiti, e in conseguenza esprimer Δ per mezzo di un solo integrale definito. 2.° che il modulo di quest'ultimo integrale non sorpasserà la differenza fra i due limiti dell' integrazione moltiplicata per il valor più grande che acquistar possa il modulo della funzione sotto il segno $\int$.

---

per mezzo dei logaritmi, si conoscerà tosto che questo integrale preso fra i limit $-\infty$, $+\infty$ si riduce a

$$2[L\sqrt{-1}) - L(-\sqrt{-1})] = 2\pi\sqrt{-1}$$

oppure a

$$-2[L\sqrt{-1}) - L(-\sqrt{-1})] = -2\pi\sqrt{-1}$$

secondo che la quantità ρsen.τ, o ciò che si riduce allo stesso la quantità

$$\rho\,\text{sen}.\tau\left[\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2\right] = \frac{dx}{dr}\ \frac{dy}{dp} - \frac{dx}{dp}\cdot\frac{dy}{dr}$$

è positiva o negativa.

Per mostrare un' applicazione dei principj che abbiamo stabiliti supponiamo tosto

$$r = x, \quad p = y$$

ed ammettiamo che essendo x, y coordinate rettangolari, il contorno OO'O''. . . . si riduca al sistema di quattro rette rappresentate dalle equazioni

(11) $$x = x_0, \quad x = X, \quad y = y_0, \quad y = Y$$

nelle quali x_0, X, y_0, Y rappresentano quantità reali soggette alle condizioni

(12) $$x_0 < X, \qquad y_0 < Y.$$

Si avrà

(13) $$\mathop{\mathrm{E}}\nolimits_{x\;y}^{X\;Y}((f(z))) = \frac{\Delta}{2\pi\sqrt{-1}}$$

e

(14) $$\Delta = -\int_{x_0}^{X} [f(x+Y\sqrt{-1}) - f(x+y_0\sqrt{-1})]\, dx$$
$$+\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y} [f(X+y\sqrt{-1}) - f(x_0+y\sqrt{-1})]\, dy.$$

D' altronde nella formola (13) si può senza inconveniente supporre x ed y fra loro vincolati dall' equazione (15)

$$\frac{y-y_0}{Y-y_0} = \frac{x-x_0}{X-x_0}$$

che rappresenta la retta condotta dal punto (x_0, y_0) al punto (X, Y), poichè allora ai valori estremi x_0, X della variabile x corrisponderanno i valori estremi y_0, Y della variabile y. Ciò posto, se si indica con θ il valor comune dei due rapporti che costituiscono i due membri dell' equazione (15) si troverà

$$\Delta = -(\mathrm{X}-x_0)\int_0^1 [f(x_0(1-\theta)+\theta\mathrm{X}+\mathrm{Y}\sqrt{-1})$$
$$-f(x_0(1-\theta)+\theta\mathrm{X}+y_0\sqrt{-1})]d\theta$$
$$+(\mathrm{Y}-y_0)\sqrt{-1}\int_0^1 [f(\mathrm{X}+(y_0(1-\theta)+\theta\mathrm{Y})\sqrt{-1})$$
$$-f(x_0+(y_0(1-\theta)+\theta y_0)\sqrt{-1}]\,d\theta. \tag{16}$$

In conseguenza il modulo della espressione (13) sarà inferiore al valor più grande che acquistar possa il modulo del prodotto

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{Y}-y_0)[f(\mathrm{X}+(y_0(1-\theta)+\theta\mathrm{Y})\sqrt{-1}) \\ \quad -f(x_0+(y_0(1-\theta)+\theta y_0)\sqrt{-1})] \\ \quad +(\mathrm{X}-x_0)[f(x_0(1-\theta)+\theta\mathrm{X}+\mathrm{Y}\sqrt{-1}) \\ \quad -f(x_0(1-\theta)+\theta\mathrm{X}+y_0\sqrt{-1})]\sqrt{-1} \end{array}\right\} \tag{17}$$

quando ivi si fa variar θ tra i limiti 0, 1; o ciò che torna lo stesso al valor più grande che possa acquistare il modulo del rapporto

$$\frac{(\mathrm{Y}-y_0)[f(\mathrm{X}+y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})]+(\mathrm{X}-x_0)[f(x+\mathrm{Y}\sqrt{-1})-f(x+y_0\sqrt{-1})]\sqrt{-1}}{2\pi} \tag{18}$$

quando ivi si fa variare x fra i limiti x_0, X ed y fra i limiti y_0, Y, ma in maniera da verificar l'equazione (15). Dunque a più forte ragione il modulo della espressione (13) sarà inferiore al prodotto che ottiensi moltiplicando la quantità

$$2(\mathrm{X}-x_0)+2(\mathrm{Y}-y_0) \tag{19}$$

cioè a dire il perimetro del rettangolo al quale si riduce nel caso presente il contorno OO'O''. . . . . . per il rapporto

$\frac{1}{2\pi}$, e per il valor più grande che possa acquistare il modulo della funzione $f(z)$ per i punti situati sul perimetro di cui trattasi.

Immaginiamo ora che il contorno OO'O''. . . . non si riduca più al sistema di quattro rette e sia una curva chiusa qualunque. Si dovranno nell' integrale

$$(20) \qquad \int_{x_0}^{X}[f(x+Y\sqrt{-1})-f(x+y_0\sqrt{-1})]dx$$

che racchiude l' equazione (14), rimpiazzare le costanti y_0, Y con funzioni di x, oppure se la curva cessa di essere convessa si dovrà rimpiazzare la differenza

$$f(x+Y\sqrt{-1})-f(x+y_0\sqrt{-1})$$

con la somma V di più integrali della forma

$$\int f(z)dy$$

presi fra i convenienti limiti. Sia d' altronde P un punto scelto arbitrariamente nell' interno della data curva ed s l' arco di questa curva contato positivamente a partire dal punto O in un senso tale che questo arco venendo a crescere il raggio vettore condotto dal punto P all'estremità dell'arco, abbia nel piano delle x, y un movimento diretto di rotazione intorno al punto P. Denominiamo finalmente c il perimetro intiero della curva OO'O''. . . . e supponiamo che nella funzione

$$f(z)=f(x+y\sqrt{-1})$$

si sostituiscano ad x, y li suoi valori relativi a un punto qualunque di questo perimetro espressi in funzione di s. Siccome l' ordinata y di questo punto non potrà crescere, senza che la sua estremità entri nell' interno della curva se $\frac{dx}{ds}$ è

positivo, e senza che essa ne sorta se $\frac{dx}{ds}$, è negativo egli è chiaro che l'elemento Vdx dell' integrale che dovrà rimpiazzar l' espressione (20) sarà la somma di tanti elementi della forma

$$(21) \qquad - \frac{f(z)dx}{ds} \cdot ds$$

quanti saranno i punti situati nel contorno OO'O''. . . . nel prolungamento dell' ordinata che si considera. In conseguenza converrà nella equazione (14) rimpiazzare l' espressione (20) con l' integrale

$$(22) \qquad - \int_0^c \frac{f(z)dx}{ds} \, ds \, .$$

Si proverà parimente che nella ipotesi ammessa, devesi all' espressione

$$(23) \qquad \int_{y_0}^{Y} [f(X+y\sqrt{-1})-f(x_0+y\sqrt{-1})] \, dy$$

sostituire l' integrale

$$(24) \qquad \int_0^c f(z) \frac{dy}{ds} \, ds \, ;$$

essendo le coordinate x, y sempre espresse in funzione di s. In conseguenza si otterrà invece della formola (14) la seguente

$$(25) \qquad \Delta = \int_0^c f(z) \frac{dx+dy\sqrt{-1}}{ds} \, ds,$$

e l' equazione (10) potrà essere ridotta alla

$$(26) \qquad E((f(z))) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^c f(z) \frac{dz}{ds} \, ds.$$

Ora il modulo dell' espressione immaginaria

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dx+dy\sqrt{-1}}{ds}$$

essendo precisamente l' unità, poichè generalmente si ha

$$(27) \qquad \frac{dx^2-dy^2}{ds^2} = 1$$

ne segue dalla formola (25) che il modulo di Δ non sorpasserà il prodotto del perimetro c per il valor più grande che acquistar possa il modulo di $f(z)$ corrispondente ad un punto situato sul contorno OO'O".... se si rappresenti questo valor più grande per mezzo della lettera caratteristica Λ collocata davanti alla funzione $f(z)$, e se si generalizza così l' uso che noi abbiamo fatto di questa caratteristica in una precedente Memoria, il modulo del residuo integrale

$$(28) \qquad \mathrm{E}((f(z)))$$

non sorpasserà in modo alcuno

$$(29) \qquad \frac{c}{2\pi}\,\Lambda f(z).$$

Si può dunque enunciare la proposizione seguente.

Primo Teorema. Siano x, y due variabili reali considerate come rappresentanti coordinate rettangolari; $z = x + y\sqrt{-1}$ una variabile immaginaria,

$$\mathrm{E}((f(z)))$$

il residuo integrale di $f(z)$ esteso a quelle fra le radici della equazione (7) che corrispondono a punti contenuti in un contorno dato OO'O".... ed il perimetro di questo contorno. Il valore esatto del residuo integrale

$$\mathrm{E}((f(z)))$$

sarà determinato dall' equazione (26), e il modulo di questo residuo avrà per limite superiore il prodotto di $\frac{1}{2\pi}$ per il perimetro c e per il più grande dei moduli di $f(z)$ che corrispondono a punti situati sopra questo perimetro.

Bisogna osservare che le formole (25) (26) ed il teorema 1.° si estendono anche al caso che il contorno OO'O''. . . . . fosse chiuso dal sistema di molte porzioni di linee rette o curve. In questo modo specialmente il teorema 1.° continua a sussistere quando il contorno OO'O''. . . . . è il perimetro di un rettangolo, il che combina con quanto si è detto più sopra.

Immaginiamo adesso che nella formola (20) pongasi

$$x = r\cos.p, \quad y = r\sin.p\,;$$

inoltre immaginiamo che r, p rappresentando delle coordinate polari il contorno OO'O''. . . . si riduca al sistema di due rette e di due archi di cerchio rappresentati dalle equazioni

$$(30) \qquad r = r_0, \quad r = \mathrm{R}, \quad p = p_0, \quad p = \mathrm{P},$$

nelle quali r, R sono quantità positive assoggettate alla condizione

$$(31) \qquad r_0 < \mathrm{R}$$

e p_0, P sono archi di circolo scelti ad arbitrio fra i limiti $-\pi$, $+\pi$ in modo da adempiere alla condizione

$$(32) \qquad p_0 < \mathrm{P}.$$

Si avrà

$$(33) \qquad z = re^{p\sqrt{-1}}$$

$$(34) \qquad \overset{(\mathrm{R})}{\underset{(r_0)}{}}\mathrm{E}\overset{(\mathrm{P})}{\underset{(p_0)}{}}((f(z))) = \frac{\Delta}{2\pi\sqrt{-1}}$$

$$(35) \qquad \Delta = -\int_{r_0}^{\mathrm{R}}\left[e^{\mathrm{P}\sqrt{-1}}f(re^{\mathrm{P}\sqrt{-1}}) - e^{p_0\sqrt{-1}}f(re^{p_0\sqrt{-1}})\right]dr$$

$$+\sqrt{-1}\int_{p_0}^{\mathrm{P}}\left[\mathrm{R}f(\mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}}) - r_0 f(r_0 e^{p\sqrt{-1}})\right]e^{p\sqrt{-1}}dp.$$

Ciò posto, ragionando come quì sopra, si proverà che il modulo della espressione (34) è inferiore al più grande dei valori che riceva il modulo del rapporto

$$(36)\qquad \frac{(P-p_0)e^{p\sqrt{-1}}\left[Rf(Re^{p\sqrt{-1}})-r_0 f(r_0 e^{p\sqrt{-1}})\right]}{2\pi}$$
$$+\frac{(R-r_0)\left[e^{P\sqrt{-1}}f(re^{P\sqrt{-1}})-e^{p_0\sqrt{-1}}.f(re^{p_0\sqrt{-1}})\right]\sqrt{-1}}{2\pi}$$

quando si fa in esso variare r fra i limiti r_0, R e p fra i limiti p_0, P, ma in modo che si verifichi la condizione

$$(37)\qquad \frac{r-r_0}{R-r_0}=\frac{p-p_0}{P-p_0}.$$

Dunque a più forte ragione il modulo della espressione (34) sarà inferiore al prodotto di $\frac{1}{2\pi}$ per il perimetro

$$(38)\qquad R(P-p_0)+r_0(P-p_0)+2(R-r_0)$$

del contorno OO′O″.... e per il più gran valore $\Lambda f(z)$ che possa acquistare il modulo di $f(z)$ per dei punti situati sopra questo medesimo contorno. Del resto questa conclusione potrebbe essere dedotta immediatamente dal teorema primo.

Se si facesse

$$(39)\qquad r_0=0,\quad p_0=-\pi,\quad P=\pi$$

l' espressione (36) sarebbe ridotta a

$$(40)\qquad Re^{p\sqrt{-1}}f(Re^{p\sqrt{-1}})$$

e il suo modulo massimo a

$$(41) \qquad R\Lambda f(\bar{z})$$

essendo il valore di $\bar{z}$

$$(42) \qquad z = Re^{l\sqrt{-1}}.$$

Dunque il modulo del residuo integrale

$$(43) \qquad {}^{(R)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}((f(z)))$$

ha per limite superiore il prodotto (41) il che si accorda col teorema 1.° e con la proposizione stabilita nella precedente Memoria.

Egli è bene l'osservare che potrebbersi facilmente dedurre dalla formola (25) le formole (14), (35) ed altre dello stesso genere. In fatti per arrivarvi basterebbe separare l'integrale che racchiude la formola (25) in più parti corrispondenti alle diverse parti delle linee rette o curve delle quali componesi il contorno OO'O"... poscia trasformare ciascun integrale particolare sostituendo alla variabile s una delle variabili x, y, r, p ecc.

Supponiamo ora che le funzioni $f(z)$, $f'(z)$, $F(z)$ essendo finite e continue per tutti i valori di z corrispondenti a punti situati nel contorno OO'O"... si prenda

$$(44) \qquad f(z) = \frac{f'(z)}{\underline{f}(z)} F(z),$$

l'equazione (7) sarà ridotta a

$$(45) \qquad \underline{f}(z) = 0$$

e se fra le radici della equazione (45) quelle che corrispondono a punti contenuti nel contorno OO'O"... vengano rappresentate da

$$z_1, \quad z_2 \ldots \ldots z_m$$

si avrà

$$(46)\qquad F(z_1)+F(z_2)+\ldots+F(z_m)=E\left(\left(\frac{f'(z)}{f(z)}F(z)\right)\right);$$

poi si concluderà avuto riguardo alla formola (26)

$$(47)\qquad F(z_1)+F(z_2)+\ldots+F(z_m)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^c \frac{f'(z)}{f(z)}F(z)\frac{dz}{ds}\,ds.$$

Inoltre in virtù del teorema 1.° la somma

$$F(z_1)+F(z_2)+\ldots\ldots+F(z_m)$$

determinata dalla equazione (46) avrà per limite superiore la quantità

$$(48)\qquad \frac{c}{2\pi}\Lambda\left(\frac{f'(z)}{f(z)}F(z)\right).$$

Se si prende $F(z)=1$ la formola (47) darà

$$(49)\qquad m=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^c \frac{f'(z)}{f(z)}\frac{dz}{ds}\,ds.$$

e l' espressione (48) diverrà

$$(50)\qquad \frac{c}{2\pi}\Lambda\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right).$$

Se al contrario si prende $F(z)=z$, la formola (47) darà

$$(51)\qquad z_1+z_2+\ldots+z_m=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^c z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\frac{dz}{ds}\,ds,$$

e l' espressione (48) diventerà

$$(52)\qquad \frac{c}{2\pi}\Lambda\left(z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\right).$$

Si può dunque enunciare la seguente proposizione.

2.° Teorema. Siano x, y due variabili reali,

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

una variabile immaginaria e

$$f(z), \quad F(z)$$

funzioni reali o immaginarie di z, le quali restando finite e continue come pure la derivata $f'(z)$ per tutti li sistemi dei valori di x, y adatti a rappresentare le coordinate rettangolari dei punti situati in un contorno chiuso OO'O''.... Siano inoltre

$$z_1, \quad z_2 \ldots\ldots\ldots z_m$$

quelli delle radici delle equazione

$$f(z) = 0$$

che corrispondono a simili valori delle variabili x, y; e c il perimetro del contorno OO'O''..... Il numero m di queste radici, la loro somma

$$z_1 + z_2 + \ldots\ldots + z_m$$

e la somma

$$F(z_1) + F(z_2) + \ldots\ldots + F(z_m)$$

delle funzioni simili $F(z_1)$, $F(z_2)$ .... $F(z_m)$ avranno per valori esatti li secondi membri delle equazioni (49), (51), (47), e per moduli dei numeri inferiori alle tre quantità (50), (52), (48), indicando la lettera Λ il più gran modulo che acquistar possa una funzione di z per dei punti situati sul contorno OO'O''...

Immaginiamo ora che le variabili x, y e in conseguenza la variabile z essendo espresse in funzioni di s abbiasi

$$f(z) = \varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s) \tag{53}$$

indicando con $\varphi(s)$, $\chi(s)$ due funzioni reali della variabile s. Si troverà in conseguenza

$$f'(z)\frac{dz}{ds} = \varphi'(s) + \sqrt{-1}\,\chi'(s) \tag{54}$$

e la formola (49) darà

$$m = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^c \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\, ds. \tag{55}$$

Ora sarà generalmente facile il determinare i valori dell'integrale

$$\int_0^c \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\, ds. \tag{56}$$

Per giungervi consideriamo tosto una parte di questo integrale, per esempio quella che si riferisce a valori di s contenuti fra i limiti $s=s_0$, $s=s_1$, s_0 essendo $<s_1$, ed $s_1 < c$. Se la funzione $\varphi(s)$ non cambia di segno fra i limiti $s=s_0$, $s=s_1$, si avrà

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\, ds = \mathrm{L}[\varphi(s_1)+\sqrt{-1}\,\chi(s_1)] - \mathrm{L}(\varphi(s_0) + \sqrt{-1}\,\chi(s_0)) \tag{57}$$

oppure

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\, ds = \mathrm{L}[-\varphi(s_1)-\sqrt{-1}\,\chi(s_1)] - \mathrm{L}[-\varphi(s_0)-\sqrt{-1}\,\chi(s_0)], \tag{58}$$

secondo che $\varphi(s_0)$ sarà positiva o negativa, cioè a dire che si avrà nell' uno o nell' altro caso

$$(59)\qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds$$

$$= L\left[\frac{\varphi(s_1)}{\varphi(s_0)}\right] + L\left[\frac{1-\chi(s_1)\sqrt{-1}}{\varphi(s_0)}\right] - L\left[\frac{1-\chi(s_0)\sqrt{-1}}{\varphi(s_0)}\right].$$

D' altra parte essendo il contorno OO'O''..... per ipotesi chiuso, le variabili reali x, y, in conseguenza anche la variabile immaginaria z e la funzione $f(z)$ riprenderanno per $s=c$ gli stessi valori che per $s=0$, di modo che si avrà in generale

$$\varphi(0)+\sqrt{-1}\,\chi(0)=\varphi(c)+\sqrt{-1}\,\chi(c)$$

$$\varphi(0)=\varphi(c),\ \chi(0)=\chi(c).$$

Dunque se la funzione $\varphi(s)$ che rappresenta la parte reale della $f(z)$ non cambia di segno fra i limiti $s=0$, $s=c$, la formola (59) darà

$$(60)\qquad \int_0^c \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds=0$$

e si avrà perciò

$$m=0.$$

D' altronde $f(z)$ essendo funzione continua di z, $\varphi(s)$ non potrà cambiar di segno fra i limiti $s=0$, $s=c$, senza diventar nullo nell' intervallo. Dunque il numero m svanirà allorquando l' equazione

$$(61)\qquad \varphi(s)=0$$

non ammetterà punto radici reali.

Immaginiamo adesso che l' equazione (61) ammetta radici reali. Supponiamo inoltre l' intervallo dei limiti s_0, s_1 piccolo abbastanza, affinchè la funzione $\varphi(s)$ svanisca una sola volta in questo intervallo e chiamiamo ς il valore di s che essendo compreso fra s_0 ed s_1 coincide con una radice reale

semplice o con molte radici reali eguali dell' equazione (61). Allora rappresentando con ε un numero piccolissimo si troverà

$$(62) \qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = \int_{s_0}^{\varsigma-\varepsilon} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds + \int_{\varsigma+\varepsilon}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds\,;$$

poi si concluderà

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}ds = \mathrm{L}[\varphi(s_1)+\sqrt{-1}\,\chi(s_1)] - \mathrm{L}[-\varphi(s_0)-\sqrt{-1}\,\chi(s_0)] - \mathrm{L}[\varphi(\varsigma+\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\chi(\varsigma+\varepsilon)] + \mathrm{L}[-\varphi(\varsigma-\varepsilon)-\sqrt{-1}\,\chi(\varsigma-\varepsilon)],$$

se la funzione $\varphi(s)$ passa dal negativo al positivo, e

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = \mathrm{L}[-\varphi(s_1)-\sqrt{-1}\,\chi(s_1)] - \mathrm{L}[\varphi(s_0)+\sqrt{-1}\,\chi(s_0)] - \mathrm{L}[-\varphi(\varsigma+\varepsilon)-\sqrt{-1}\,\chi(\varsigma+\varepsilon)] + \mathrm{L}[\varphi(\varsigma-\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\chi(\varsigma-\varepsilon)],$$

se la funzione $\varphi(s)$ passa dal positivo al negativo. Si troverà al contrario

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = \mathrm{L}[\varphi(s_1)+\sqrt{-1}\,\chi(s_1)] - \mathrm{L}[\varphi(s_0)+\sqrt{-1}\,\chi(s_0)] - \mathrm{L}[\varphi(\varsigma+\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\chi(\varsigma+\varepsilon)] + \mathrm{L}[\varphi[\varsigma-\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\chi(\varsigma-\varepsilon)],$$

se la funzione $\varphi(s)$ è costantemente positiva o nulla fra i limiti s_0, s_1, e

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}ds = \mathrm{L}[-\varphi(s_1)-\sqrt{-1}\,\chi(s_1)] - \mathrm{L}[\varphi(s_0)-\sqrt{-1}\,\chi(s_0)] - \mathrm{L}[-\varphi(\varsigma+\varepsilon)-\sqrt{-1}\,\chi(\varsigma+\varepsilon)] + \mathrm{L}[-\varphi(\varsigma-\varepsilon)-\sqrt{-1}\,\chi(\varsigma-\varepsilon)],$$

se la funzione $\varphi(s)$ è costantemente positiva o nulla fra gli stessi limiti.

Ciò posto chiamiamo E la parte dell' integrale

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds$$

che contiene il numero ε. Siano inoltre z_0, z_1 i valori di z corrispondenti ai valori s_0, s_1 della variabile s. Si avrà in generale

$$(63)\qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = \mathrm{L}(\pm f(z_1)) - \mathrm{L}(\pm f(z_0)) + \mathrm{E}$$

e

$$(64)\qquad \mathrm{E} = \mathrm{L}[\pm(\varphi(\varsigma-\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\chi(\varsigma-\varepsilon))] - \mathrm{L}[\pm(\varphi(\varsigma+\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\chi(\varsigma+\varepsilon))],$$

dovendo ciascuno dei due segni doppi che contengono i logaritmi essere ridotto al segno + od al segno —, e dovendo essere effettuata questa riduzione in modo che la parte reale della espressione affetta di doppio segno diventi positiva. Sotto questa condizione la formola (64) potrà essere ridotta a

$$(65)\qquad \mathrm{E} = \mathrm{L}\left[\frac{1+\chi(\varsigma-\varepsilon)\sqrt{-1}}{\varphi(\varsigma-\varepsilon)}\right] - \mathrm{L}\left[\frac{1+\chi(\varsigma+\varepsilon)\sqrt{-1}}{\varphi(\varsigma+\varepsilon)}\right].$$

Ora risulta da quest' ultima che E svanirà se la radice ς essendo comune alla equazione (61) ed alla seguente

$$(66)\qquad \chi(s) = 0$$

il valore del rapporto

$$(67)\qquad \frac{\chi(s)}{\varphi(s)}$$

corrispondente ad $s=\varsigma$ è nullo o solamente finito. Se questo valore divenisse infinito, il che accade per esempio, allorchè

$s = \varsigma$ non è radice della equazione (66), e se il rapporto (67) non cangiasse di segno passando per l'infinito, E svanirebbe ancora. Ma se passando per l'infinito il rapporto (67) cangia di segno, si ricaverà dalla formola (65)

$$(68) \qquad E = L(-\sqrt{-1}) - L(\sqrt{-1}) = -\pi\sqrt{-1}$$

oppure

$$(69) \qquad E = L(\sqrt{-1}) - L(-\sqrt{-1}) = \pi\sqrt{-1}$$

secondo che questo stesso rapporto passerà dal negativo al positivo o dal positivo al negativo.

Supponiamo ora che la funzione $\varphi(s)$ svanisca più volte fra i limiti $s = s_0$, $s = s_1$. Allora dai principj che noi abbiamo stabiliti si dedurrà la formola

$$(70) \qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s) + \sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)}\, ds = L(\pm f(z_1)) - L(\pm f(z_0)) + \pi(m'' - m')\sqrt{-1}$$

m', m'' essendo numeri intieri che indicano, il primo quante volte il rapporto (67) passi divenendo infinito, dal negativo al positivo, il secondo quante volte questo rapporto passi divenendo infinito dal positivo al negativo.

Potrebbesi ancora alla formola (70) evidentemente sostituir la seguente

$$(71) \qquad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\varphi'(s) + \sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)}\, ds$$

$$= L \frac{\sqrt{\varphi(s_1)^2}}{\sqrt{\varphi(s_0)^2}} + L\left[\frac{1 + \chi(s_1)\sqrt{-1}}{\varphi(s_1)}\right] - L\left[\frac{1 + \chi(s_0)\sqrt{-1}}{\varphi(s_0)}\right] + \pi(m'' - m')\sqrt{-1}.$$

Allorchè si prende $s_0 = 0$, $s_1 = c$ si ha

$$\underline{f}(z_1) = \underline{f}(z_0).$$

In conseguenza di che la formola (70) dà semplicemente

$$(72) \qquad \int_0^c \frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds = \pi(m''-m')\sqrt{-1}$$

e il valore di m determinato dall'equazione (55) si riduce a

$$(73) \qquad m = \frac{m''-m'}{2}.$$

Egli è bene l'osservare 1°, che se si fa per brevità

$$(74) \qquad -\frac{\varphi(s)}{\chi(s)} = f(s),$$

il valore di E determinato dall'equazione (65) sarà sempre il prodotto dell'espressione imaginaria

$$(75) \qquad \pi\sqrt{-1}$$

per la semidifferenza

$$(76) \qquad \frac{1}{2}\left[\frac{f(\varsigma+\varepsilon)}{\sqrt{(f(\varsigma+\varepsilon))^2}} - \frac{f(\varsigma-\varepsilon)}{\sqrt{(f(\varsigma-\varepsilon))^2}}\right]$$

essendo ε un numero infinitamente piccolo: 2.° che l'espressione (76) non differisce da zero se non nel caso in cui si prende per ς un valore di s capace di rendere la funzione $f(s)$ infinita, vale a dire nel caso in cui prendesi per s una radice reale dell'equazione

$$(77) \qquad \frac{1}{f(s)} = 0,$$

e che allora questa espressione riducesi sempre all'una delle tre quantità -1, 0, $+1$. Ora essendo s una variabile reale, e $f(s)$ una funzione reale di s, il valore della espressione (76) corrispondente ad una radice reale ς dell'equazione (77), sarà ciò

che noi chiameremo ormai, l' *indice* della funzione relativo a questa radice. Noi chiameremo *indice integrale* della funzione la somma degli indici relativi ai diversi valori di s che rendono la funzione infinita, e noi indicheremo questa somma collocando la lettera caratteristica I davanti la funzione racchiusa fra doppia parentesi così come segue

$$I((f(s))). \tag{78}$$

Se la funzione si presenta sotto la forma di una frazione, un termine solo dovrà essere racchiuso fra doppia parentesi allorchè indicar vorrassi la somma degli indici corrispondenti ai valori reali di s che rendono questo termine nullo se è il denominatore, o infinito se è il numeratore. Finalmente se uno dei termini è decomposto in fattori, uno solo di questi fattori dovrà essere racchiuso fra doppia parentesi, allorchè si vorrà esprimere la somma degli indici corrispondenti ai valori reali di s che rendono questo fattore nullo od infinito. Di più, se fra le radici reali dell' equazione (77) si considerino unicamente quelle che si trovano comprese fra due limiti dati s_0, s_1, la somma dei valori corrispondenti nella espressione (76) sarà indicata da

$$I_{s_0}^{s_1}(((fs))). \tag{79}$$

Ciò posto ciascuna delle espressioni (78), (79) sarà formata dalla riunione di molti termini corrispondenti a diverse radici della equazione (77), e delle quali una qualunque sarà equivalente a $+1$, se la funzione $f(s)$ passi dal negativo al positivo, a zero, se questa funzione diventando infinita non cambia di segno, ed a -1 se questa passa dal positivo al negativo. Aggiungasi che se il limite s_0 divenga una radice dell' equazione (77), il termine corrispondente ad $s=s_0$ nella somma rappresentata dalla notazione (79) dovrà esser ridotto ad

$$\frac{1}{2}\,\frac{f(s_0+\varepsilon)}{\sqrt{(f(s_0+\varepsilon))^2}} \tag{80}$$

cioè a dire a $\frac{1}{2}$ o a $-\frac{1}{2}$, secondo chè la funzione $f(s)$ diverrà positiva o negativa per dei valori di s superiori a s_0. Parimente se il limite s_1 divenga una radice della equazione (77), il termine corrispondente ad $s=s_1$ nella somma (79) dovrà essere ridotto a

$$-\frac{1}{2}\,\frac{f(s_1-\varepsilon)}{\sqrt{(fs_1-\varepsilon))^2}} \tag{81}$$

cioè a dire a $-\frac{1}{2}$, od a $+\frac{1}{2}$ secondo che la funzione $f(s)$ diverrà positiva o negativa per dei valori di s inferiori ad s_1. Queste diverse convenzioni sono analoghe a quelle che noi abbiamo ammesse nel calcolo dei residui, e così da analoghe considerazioni sarebbesi condotto ad adottarle. Se nella notazione (79) si suppone $s_0=-\infty$, $s_1=\infty$ si avrà evidentemente

$$I_{-\infty}^{\infty}((f(s)))=I((f(s))). \tag{82}$$

In virtù delle convenzioni che abbiamo ammesse le formole (70), (72), (73) diverranno

$$\int_{s_0}^{s_1}\frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds=\mathrm{L}[\pm f(z_1)]-\mathrm{L}[\pm f(z_0)], \tag{83}$$
$$-\pi\sqrt{-1}\;I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi(s)}{\varphi(s)}\right)\right).$$

$$\int_0^c\frac{\varphi'(s)+\sqrt{-1}\,\chi'(s)}{\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s)}\,ds=-\pi\sqrt{-1}\;I_0^c\left(\left(\frac{\chi(s)}{\varphi(s)}\right)\right) \tag{84}$$

$$m=-\frac{1}{2}\,I_0^c\left(\left(\frac{\chi(s)}{\varphi(s)}\right)\right)=\frac{1}{2}\,I_0^c((f(s))). \tag{85}$$

Si può dunque enunciare la proposizione seguente.

3.° Teorema. Poste le stesse cose che nel teorema 1.°, Se si suppone z espressa in funzione di s e

$$f(z) = \varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)$$

indicando con $\varphi(s)$, $\chi(s)$ funzioni reali di s, il numero delle radici dell' equazione (45) che corrispondono a dei punti collocati nell' interno del contorno OO'O''.... saranno precisamente la metà dell' indice integrale

$$-\int_0^c \left(\left(\frac{\chi(s)}{\varphi(s)}\right)\right)$$

essendo c il perimetro dello stesso contorno.

Supponiamo ora che la funzione $\underline{f}(z)$ sia il prodotto di più altre funzioni $\underline{f}_1(z)$, $\underline{f}_2(z)$, ec. delle quali ciascuna resti finita e continua, come la sua derivata per tutti i punti racchiusi nel contorno OO'O''..... Si avrà

(86) $$\underline{f}(z) = \underline{f}_1(z) \cdot \underline{f}_2(z) \cdot \ldots$$

e per conseguenza

(87) $$\frac{\underline{f}'(z)}{\underline{f}(z)} = \frac{\underline{f}'_1(z)}{\underline{f}_1(z)} + \frac{\underline{f}'_2(z)}{\underline{f}_2(z)} + \ldots\ldots$$

Dunque la formola (49) diverrà

(88) $$m = m_1 + m_2 + \text{ecc.}$$

essendo i numeri m_1, m_2 ec. determinati rispettivamente dalle formole

$$(89)\quad \left\{ \begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^c \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} \frac{dz}{ds} ds, \\ m_2 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^c \frac{f_2'(z)}{f_2(z)} \frac{dz}{ds} ds, \\ &\text{ecc.} \end{aligned} \right\}$$

ed indicanti in conseguenza quante radici le equazioni

$$(90)\qquad f_1(z) = 0,\ f_2(z) = 0,\ \text{ecc.}$$

considerate l' una dopo l' altra offrano corrispondenti a dei punti contenuti nel contorno $OO'O''\dots$. Era d'altronde facile il prevedere che la somma dei numeri $m_1, m_2 \dots$ così determinati riprodurrebbe precisamente il numero m. Se uno dei fattori $f_1(z), f_2(z) \dots$ si riduce ad una costante reale o immaginaria, la sua derivata sarà nulla, e fra i numeri m_1, $m_2 \dots$ quello che corrisponderà al fattore di cui trattasi, svanirà. Ora se si indica per τ un arco reale e costante si avrà identicamente

$$f(z) = (\cos.\tau + \sqrt{-1}\sin.\tau) \frac{f(z)}{\cos.\tau + \sqrt{-1}\,\text{sen}.\tau}.$$

Dunque stabilendo

$$(91)\qquad f_1(z) = \frac{f(z)}{\cos.\tau + \sqrt{-1}\,\text{sen}.\tau},\quad f_2(z) = \cos.\tau + \sqrt{-1}\,\text{sen}.\tau,$$

si troverà $m = m_1$. D'altra parte se si metta invece di $f(z)$, $\varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s)$ nella prima delle equazioni (91), se ne caverà

$$(92)\qquad f_1(z) = \varphi(s)\cos.\tau + \chi(s)\text{sen}.\tau + [\chi(s)\cos.\tau - \varphi(s)\text{sen}.\tau].\sqrt{-1},$$

ed in conseguenza la formola (85) darà

$$m_1 = \frac{1}{2}\int_0^c \left(\left(\frac{\phi(s)\text{sen.}\tau - \chi(s)\cos.\tau}{\phi(s)\cos.\tau + \chi(s)\text{sen.}\tau}\right)\right).$$

Si avrà dunque anche

$$(93)\qquad m = \frac{1}{2}\int_0^c \left(\left(\frac{\phi(s)\text{sen.}\tau - \chi(s)\cos.\tau}{\phi(s)\cos.\tau + \chi(s)\text{sen.}\tau}\right)\right).$$

In quest' ultima formola l' arco reale τ può essere scelto ad arbitrio. Se si prende $\tau = 0$ si sarà evidentemente ricondotto alla formola (85). Al contrario se si prende $\tau = \frac{\pi}{2}$ si troverà

$$(94)\qquad m = \frac{1}{2}\int_0^c \left(\left(\frac{\phi(s)}{\chi(s)}\right)\right) = -\frac{1}{2}\int_0^c \left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right).$$

Supponiamo ancora che la funzione $f(z)$ essendo divisa in due parti $\Pi(z)$, $\varpi(z)$, il modulo del rapporto

$$(95)\qquad \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}$$

resti inferiore all' unità per tutti i valori di z corrispondenti a dei punti situati sul contorno OO′O″. . . . per modo che si abbia al tempo stesso

$$(96)\qquad f(z) = \Pi(z) + \varpi(z)$$

e

$$(97)\qquad \Lambda\, \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)} < 1.$$

Per tutti i punti dei quali si tratta, la parte reale del binomio

$$(98)\qquad 1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}$$

conserverà lo stesso segno del primo termine 1. Dunque se si faccia

$$(99) \qquad f_1(z) = \Pi(z), \quad f_2(z) = 1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}$$

si avrà
$$m_2 = 0$$

in conseguenza
$$m = m_1 .$$

Si può quindi enunziare la proposizione seguente.

4.° Teorema. Poste le stesse cose come nel teorema 2.°: se la funzione $f(z)$ è divisa in due altre $\Pi(z)$, $\varpi(z)$ per modo che si abbia

$$\Lambda \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)} < 1,$$

le radici corrispondenti a dei punti racchiusi nell' interno del contorno OO'O''...... saranno dello stesso numero per l' equazione (45) e per la seguente

$$(100) \qquad \Pi(z) = 0.$$

Nell' ipotesi che abbiamo ammessa l' equazione (86) ridotta a

$$(101) \qquad f(z) = \Pi(z) \left[1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)} \right]$$

darà evidentemente

$$(102) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\Pi'(z)}{\Pi(z)} + \frac{d\, \mathrm{L}\left(1 + \frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)}{dz} .$$

In conseguenza se si dicano

$$\xi_1, \quad \xi_2, \; \ldots\ldots \; \xi_m$$

quelle radici della equazione (100) che corrispondono a dei punti situati sul contorno OO'O''.....

$$z_1, \; z_2 \, . \, . \, . \, . \, . \, z_m$$

essendo sempre quelle radici che adempiono la stessa condizione per l'equazione (45), si ricaverà dalla formola (46)

$$(103) \qquad F(z_1)+F(z_2)+\ldots+F(z_m)=F(\xi_1)+F(\xi_2)+\ldots+F(\xi_m)$$

$$+ \varphi\left(\left(dL \frac{\left[1+\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]}{dz} F(z)\right)\right).$$

D' altronde per tutti i punti situati sul contorno OO'O''. . . . il logaritmo

$$(104) \qquad L\left[1+\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]$$

sarà sviluppabile in serie convergente con la formola

$$(105) \qquad L\left[1+\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]=\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}-\frac{1}{2}\left[\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]^2+\frac{1}{3}\left[\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]^3-\text{ec.}$$

Dunque se col mezzo della equazione (26) si trasforma l' espressione

$$(106) \qquad E\left(\left(F(z)dL\frac{\left[1+\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]}{dz}\right)\right)$$

in un integrale definito, la funzione sotto il segno integrale $\int$ sarà essa pure sviluppabile in una serie simile essendo il termine generale di quest' ultima serie

$$(107) \qquad \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi\sqrt{-1}}\,\frac{1}{n}\int_0^c F(z)dL\frac{\left[1+\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]}{ds}\,ds$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\,E\left(\left(F(z)\,d\frac{\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^n}{dz}\right)\right),$$

o ciò che torna lo stesso

$$(108)\qquad \frac{(-1)^n}{n}\,E\left(\left(F'(z)\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^n\right)\right)$$

si avrà dunque

$$(109)\qquad F(z_1)+F(z_2)+\ldots+F(z_m)=F(\xi_1)+F(\xi_2)+\ldots+F(\xi_m)$$

$$-E\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}F(z)\right)\right)+\frac{1}{2}E\left(\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^2F(z)\right)\right)-\text{ecc.}$$

Aggiungiamo che in virtù del primo teorema il modulo del termine generale, vale a dire del nesimo termine della serie sarà più piccolo della quantità

$$(110)\qquad \frac{c}{2n\pi}\Lambda\left[\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^nF'(z)\right]$$

e per conseguenza del prodotto

$$(111)\qquad \frac{c}{2n\pi}\Lambda F'(z).\left[\Lambda\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right]^n.$$

Dunque se si fa per brevità

$$(112)\qquad \Lambda\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}=M,\quad \Lambda F'(z)=N,$$

il nesimo termine della serie che rappresenta lo sviluppo della espressione (106) avrà un modulo inferiore a

$$(113)\qquad \frac{cN}{2\pi}\cdot\frac{M^n}{n}$$

e la somma formata con questo termine e con quelli che lo seguono, ossia il rimanente della serie offrirà un modulo inferiore al prodotto

$$(114) \qquad \frac{cN}{2\pi}\left[\frac{M^n}{n}+\frac{M^{n+1}}{n+1}+\frac{M^{n+2}}{n+2}+\ldots.\right].$$

Per altra parte essendo $M < 1$, la somma

$$(115) \qquad \frac{M^n}{n}+\frac{M^{n+1}}{n+1}+\frac{M^{n+2}}{n+2}+\ldots..$$

è evidentemente inferiore non solo alla seguente (116)

$$(116) \qquad \frac{M^n}{1}+\frac{M^{n+1}}{2}+\frac{M^{n+2}}{3}+\ldots.=M^n\,L\left(\frac{1}{1-M}\right)$$

ma ancora a quest' altra

$$(117) \qquad \frac{M^n}{n}+\frac{M^{n+1}}{n+1}+\frac{M^{n+2}}{n+2}+\ldots.=\frac{M^n}{n(1-M)}.$$

Dunque il resto delle serie che contiene il secondo membro della formola (109) avrà per modulo un numero che non supererà alcuno dei prodotti

$$(118) \qquad \frac{cN}{2\pi}\,.\,M^n\,L\left(\frac{1}{1-M}\right),\quad \frac{cN}{2\pi}\;\frac{M^n}{n(1-M)}.$$

Se si prenda $F(z)=z$, la formola (109) darà

$$(119) \qquad z_1+z_2+\ldots.+z_m=\xi_1+\xi_2+\ldots.+\xi_m$$

$$-E\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)\right)+\frac{1}{2}E\left(\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^2\right)\right)-\frac{1}{3}E\left(\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^3\right)\right)+\text{ec.}$$

ed il resto di qnest' ultima serie avrà per modulo un numero che non supererà alcuno dei prodotti

$$(120) \qquad \frac{1}{2\pi}M^n\,L\left(\frac{1}{1-M}\right),\quad \frac{c}{2\pi}\;\frac{M^n}{n(1-M)}$$

si può dunque enunciare la proposizione seguente.

5.° Teorema. Fatte le stesse supposizioni come nel Teo-

rema 4.°, se si chiamino $z_1, z_2 \ldots z_m$ quelle fra le radici dell' equazione (45), e $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_m$ quelle fra le radici dell'equazione (100), che corrispondono a dei punti contenuti nell'interno del contorno OO'O''. . . , la differenza fra le due somme

$$(121) \qquad z_1 + z_2 + \ldots + z_m, \quad \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m$$

oppure anche fra le due seguenti

$$(122) \quad F(z_1)+F(z_2)+\ldots+F(z_m), \quad F(\xi_1)+F(\xi_2)+\ldots+F\xi(_m)$$

sarà sviluppabile con la formola (109) o (119) in una serie convergente, di cui i differenti termini potranno essere espressi in funzione delle radici $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_m$ ed i residui di queste due serie offriranno dei moduli inferiori a ciascuno dei prodotti (118) o (120).

Se prendasi

$$\Pi(z) = (z-a)^m$$

indicando a una costante scelta ad arbitrio, l' equazione (45) si ridurrà a

$$(123) \qquad (z-a)^m + \varpi(z) = 0$$

e le formole (109), (119) daranno

$$(124) \qquad F(z_1) + F(z_2) + \ldots + F(z_m)$$

$$= mF(a) + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1.2\ldots..(mn-1)} \cdot \frac{d^{mn-1}[((\varpi a))^m F(a)]}{da^{mn-1}}.$$

$$(125) \qquad z_1 + z_2 + \ldots\ldots + z_m$$

$$= ma + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1.2\ldots.(mn-1)} \cdot \frac{d^{mn-1}[\varpi(a)^m]}{da^{mn-1}}$$

purchè sia

$$\Lambda \frac{\varpi(z)}{(z-a)^m} < 1. \qquad (126)$$

Se l' esponente m si riduce all'unità l'equazione (123) diventerà

$$z - a + \varpi(z) = 0 \qquad (127)$$

e per determinare la radice z di quest' ultima equazione, o una funzione $F(z)$ di questa radice si avranno invece delle formole (124), (125) quelle che Lagrange ha dato, cioè

$$F(z) = F(a) + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2.3..n} d^{n-1} \left[\frac{[\varpi(a)]^n F'(a)}{da^{n-1}} \right] \qquad (128)$$

$$z = a + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2.3..n} d^{n-1} \frac{[\varpi(a)]^n}{da^{n-1}}. \qquad (129)$$

Queste ultime sussisteranno purchè abbiasi

$$\Lambda \frac{\varpi(z)}{z-a} < 1. \qquad (130)$$

Finalmente se si faccia $a=0$ l' equazione (123) e le formole (124), (125) daranno

$$z^m + \varpi(z) = 0 \qquad (131)$$

$$F(z_1) + F(z_2) + \ldots + F(z_m) = mF(0) \qquad (132)$$

$$+ \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1.2....(mn-1)} d^{mn-1} \left[\frac{[\varpi(\varepsilon)]^n F(\varepsilon)}{d\varepsilon^{mn-1}} \right]$$

$$z_1 + z_2 + \ldots\ldots + z_m \qquad (133)$$

$$= \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1.2....(mn-1)} d^{mn-1} \frac{[\varpi(\varepsilon)]^n}{d\varepsilon^{mn-1}}$$

indicando ε un numero infinitamente piccolo che dovrà ridursi

a zero dopo che si sarà effettuata la differenziazione, e la condizione (126) diventerà

$$(134) \qquad \Lambda \frac{\varpi(z)}{z^m} < 1.$$

Allora anche l' equazione (127), le formole (128), (129) e la condizione (130) si ridurranno a

$$(135) \qquad z + \varpi(z) = 0$$

$$(136) \qquad F(z) = F(0) + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n} d^{n-1} \left[\frac{[\varpi(\varepsilon)]^n F(\varepsilon)}{d\varepsilon^{n-1}} \right]$$

$$(137) \qquad z = \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n} d^{n-1} \frac{[\varpi(\varepsilon)]^n}{d\varepsilon^{n-1}}$$

$$(138) \qquad \Lambda \frac{\varpi(z)}{z} < 1.$$

Per facilitare l' applicazione dei teoremi 1, 2, 3, 4, 5 noi ci occuperemo adesso a determinare delle quantità della forma $\Lambda f(z)$ e $I_{s_0}^{s_1}((f(s)))$ supponendo che la funzione $f(z)$ resti finita e continua per tutti i punti situati sul contorno OO'O''. . . . . .

Noi osserveremo tosto che se si rappresenti con $f(s)$ la funzione di s in cui si trasforma

$$f(z) = f(x + y\sqrt{-1}),$$

quando per uno qualunque dei punti situati sul contorno OO'O''... si esprime

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

in funzione di s, la quantità

$$\Lambda f(z)$$

cioè a dire il più grande dei moduli di $f(z)$ che corrispondono ai punti di cui trattasi, sarà al tempo stesso il più grande dei moduli di $f(s)$ che corrispondono a dei valori reali di s compresi fra i limiti $s=0$, $s=c$. Dunque se si rappresenti con la notazione

$$(139) \qquad \Lambda_{s_0}^{s_1} f(s)$$

il più grande dei moduli di $f(s)$ che corrispondono a dei valori reali di s compresi fra i limiti $s=s_0$; $s=s_1$, si avrà generalmente

$$(140) \qquad \Lambda f(z) = \Lambda_c^c f(s).$$

Sia ora t una variabile che cresca o decresca costantemente, mentre si fa crescere o decrescere l'arco s fra i limiti, $s=s_0$, $s=s_1$. Rappresentiamo con

$$s=\mathrm{T}$$

il valore s espresso in funzione di t_1, e con

$$t_0, \; t_1$$

i valori estremi di t, essendo $t_0<t_1$ così che si abbia

$$t=t_0 \text{ per } s=s_0; \text{ e } t=t_1 \text{ per } s=s_1,$$

oppure

$$t=t_0 \text{ per } s=s_1; \text{ e } t=t_1 \text{ per } s=s_0,$$

secondo che $\frac{d\mathrm{T}}{dt}$ sarà positivo o negativo entro i limiti

$$t=t_0, \quad t=t_1.$$

Si troverà evidentemente

$$(141) \qquad \Lambda_{s_0}^{s_1} f(s) = \Lambda_{t_0}^{t_1} f(\mathrm{T})$$

e

(142) $$I_{s_0}^{s_1}((f(s))) = \pm I_{t_0}^{t_1}((f(\mathrm{T}))),$$

dovendosi ridurre il doppio segno al segno + o al segno — secondo che la variabile T crescerà, o decrescerà per dei valori crescenti di t. Aggiungasi che se $f(s)$ rappresenta ciò che diviene una funzione reale

$$\Psi(x, y)$$

delle coordinate x, y, quando si suppone che queste coordinate siano espresse per mezzo dell'arco s, $f(\mathrm{T})$ rappresenterà ciò che diviene la stessa funzione reale, quando si suppone che le stesse coordinate siano espresse in funzione della variabile t. D' altra parte, se fra i limiti $s=0$, $s=c$ si introducono nuovi valori di s che siano rappresentati da

(143) $$s_0, s_1, s_2 \ldots\ldots s_i,$$

e formino una serie crescente, il perimetro c del contorno OO'O''.... si troverà diviso in molte parti

$$\mathrm{OO'} = s_0, \quad \mathrm{O'O''} = s_1 - s_0, \quad \mathrm{O''O'''} = s_2 - s_1, \text{ ecc.}$$

e si riconoscerà facilmente 1.° che il massimo modulo

(144) $$\Lambda_0^c f(s)$$

è la più piccola delle quantità positive

(145) $$\Lambda_0^{s_0} f(s), \quad \Lambda_{s_0}^{s_1} f(s) \ldots \Lambda_{s_i}^{c} f(s):$$

2.° che l' indice

(146) $$I_0^c((f(s)))$$

si decompone in molti indici simili col mezzo della formola

$$(147) \quad I_0^c((f(s))) = I_0^{s_0}((f(s))) + I_{s_0}^{s_1}((f(s))) + \dots + I_{s_i}^c((f(s))):$$

Si potrà dunque ridurre la determinazione delle quantità (144), (145) a quella di altre quantità della stessa forma corrispondenti a dei valori ultimi di s, dei quali la differenza sarà minore, ed applicare alla valutazione di queste ultime quantità le formole (141), (142). Si potrà pure nell' applicazione di cui trattasi, prendere successivamente per t diverse variabili reali distinte le une dalle altre, il che abbrevierà di molto i calcoli, come noi lo dimostreremo con degli esempi.

Immaginiamo in primo luogo che il contorno OO'O''. . . . si riduca al sistema di quattro rette rappresentate dalle equazioni (11).

I valori di z corrispondenti ai punti situati sopra quattro rette saranno

$$(148) \quad z=x+y\sqrt{-1}, \ z=X+y\sqrt{-1}, \ z=x+Y\sqrt{-1}, \ z=x_0+y\sqrt{-1}.$$

e se si prendono per valori corrispondenti di t quelli che seguono

$$(149) \quad t=x, \quad t=y, \quad t=x_0, \quad t=y_0,$$

allora supponendo l'arco s compito a partire dal punto (x_0, y_0), si troverà successivamente

$$(150) \quad t=x_0+s, \ t=-X+x_0+y_0+s, \ t=2X-x_0+Y-y_0-s,$$
$$t=2X-2x_0+2Y-y_0-s;$$

in conseguenza la variabile t crescerà o decrescerà per dei valori crescenti di s, secondochè si considererà un punto situato sull' una delle due prime rette o sopra l' una delle due ultime. Ciò posto il modulo (140) sarà la più piccola delle

quantità positive

$$(151)\qquad \Lambda_{x_0}^{X} f(x+y_0\sqrt{-1}),\ \Lambda_{y_0}^{Y} f(X+y\sqrt{-1}),\ \Lambda_{x_0}^{X} f(x+Y\sqrt{-1}),$$

$$\Lambda_{y_0}^{Y} f(x_0+y\sqrt{-1}),$$

ed ammettendo che abbiasi per tutti i punti situati sul contorno OO'O''......

$$(152)\qquad f(s)=\Psi(x,y),$$

si caverà dalle formole (147), (151) riunite

$$(153)\qquad I_0^c((f(s)))=I_{x_0}^{X}((\Psi(t,y_0)))+I_{y_0}^{Y}((\Psi(X,t)))$$

$$-I_{x_0}^{X}((\Psi(t,Y)))-I_{y_0}^{Y}((\Psi(x_0,t))),$$

o ciò che torna lo stesso

$$(154)\qquad I_0^c((f(s)))=I_{x_0}^{X}((\Psi(x,y_0)))+I_{y_0}^{Y}((\Psi(x,y)))$$

$$-I_{x_0}^{X}((\Psi(x,Y)))-I_{y_0}^{Y}((\Psi(x_0,y))).$$

Imaginiamo per fissare le idee che τ indicando un arco reale si abbia

$$(155)\qquad f(s)=\frac{\varphi(s)\,\text{sen}.\tau-\chi(s)\cos.\tau}{\varphi(s)\cos.\tau+\chi(s)\,\text{sen}.\tau},$$

essendo le funzioni reali $\varphi(s)$ $\chi(s)$ dedotte dalla funzione imaginaria

$$f(z)=f(x+y\sqrt{-1})$$

col mezzo della equazione (53).

Allora se si dicano

$$\varphi(x, y), \quad \chi(x, y)$$

le due funzioni reali di x, y, che determina la formola

$$(156) \qquad f(x+y\sqrt{-1}) = \varphi(x, y) + \sqrt{-1}\,\chi(x, y),$$

di modo che $\varphi(s)$, e $\chi(s)$ siano precisamente ciò che divengono $\varphi(x, y)$ e $\chi(x, y)$ quando si esprima x ed y in funzione di s. Si avrà evidentemente

$$(157) \qquad \Psi(x, y) = \frac{\varphi(x, y)\,\text{sen}.\tau - \chi(x, y)\cos.\tau}{\varphi(x, y)\cos.\tau + \chi(x, y)\,\text{sen}.\tau}.$$

se si riduce l'arco τ a zero o a $\frac{\pi}{2}$ l' equazione

(157) diverrà semplicemente

$$(158) \qquad \Psi(x, y) = -\frac{\chi(x, y)}{\varphi(x, y)}$$

oppure

$$(159) \qquad \Psi(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\chi(x, y)}.$$

Allorchè la funzione $\underline{f}(z)$ si presenta sotto forma reale, l' equazione (156) seco trascina generalmente la seguente

$$(160) \qquad \underline{f}(x-y\sqrt{-1}) = \varphi(x, y) - \sqrt{-1}\,\chi(x, y);$$

si ha dunque allora

$$(161) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{f(x+y\sqrt{-1}) + \underline{f}(x-y\sqrt{-1})}{2} \\ \chi(x, y) &= \frac{f(x+y\sqrt{-1}) - \underline{f}(x-y\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \end{aligned} \right\}$$

e in conseguenza

$$(162)\quad \begin{cases} \varphi(x,y)\cos.\tau+\chi(x,y)\text{sen}.\tau=\dfrac{e^{\tau\sqrt{-1}}f(x-y\sqrt{-1})-e^{-\tau\sqrt{-1}}f(x+y\sqrt{-1})}{2} \\ \varphi(x,y)\text{sen}.\tau-\chi(x,y)\cos.\tau=\dfrac{e^{\tau\sqrt{-1}}f(x-y\sqrt{-1})+e^{-\tau\sqrt{-1}}f(x+y\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \end{cases}$$

di modo che le equazioni (157), (158), (159) possono scriversi così

$$(163)\quad \Psi(x,y)=\frac{e^{-\tau\sqrt{-1}}f(x+y\sqrt{-1})-e^{\tau\sqrt{-1}}f(x-y\sqrt{-1})}{e^{-\tau\sqrt{-1}}f(x+y\sqrt{-1})+e^{\tau\sqrt{-1}}f(x-y\sqrt{-1})}\sqrt{-1}$$

$$(164)\quad \Psi(x,y)=\frac{f(x+y\sqrt{-1})-f(x-y\sqrt{-1})}{f(x+y\sqrt{-1})+f(x-y\sqrt{-1})}\sqrt{-1}$$

$$(165)\quad \Psi(x,y)=\frac{f(x+y\sqrt{-1})+f(x-y\sqrt{-1})}{f(x+y\sqrt{-1})-f(x-y\sqrt{-1})}\sqrt{-1}.$$

Immaginiamo adesso che r e p essendo coordinate polari il contorno OO'O''. . . . . si riduca al sistema di due rette OO', O''O''', e di due archi di cerchio O'O'', O'''O rappresentati dalle equazioni (30). I valori di z corrispondenti alle quattro linee OO', O'O'', O''O''', O'''O saranno rispettivamente

$$(166)\quad z=re^{p_0\sqrt{-1}},\quad z=\text{R}e^{p\sqrt{-1}},\quad z=re^{\text{P}\sqrt{-1}},\quad z=r_0e^{p\sqrt{-1}},$$

e se si prendono per valori corrispondenti di t li seguenti

$$(167)\quad t=r,\quad t=p,\quad t=r_0,\quad t=p_0,$$

allora supponendo l'arco s contato a partire dal punto O, che ha per coordinate polari r_0, p_0 si troverà successivamente

$$(168)\quad t=r_0+s_0,\ t=-1+\frac{r_0}{\text{R}}+p_0+\frac{s}{\text{R}},\ t=2\text{R}-2r_0+\text{R}(\text{P}-p_0)-s,$$

$$t=2\left(\frac{\text{R}}{r_0}-1\right)+\frac{\text{R}}{r_0}(\text{P}-p_0)+\text{P}-\frac{s}{r}:$$

in conseguenza la variabile t crescerà o decrescerà per dei valori crescenti di s, secondochè si considererà un punto situato sopra l' una delle due prime linee OO', O'O'', o sopra l' una delle due ultime O''O''', O'''O.

Ciò posto il modulo (140) sarà la più piccola delle quantità positive

$$(169) \quad \mathrm{A}_{r_0}^{\mathrm{R}} f(re^{p_0\sqrt{-1}}),\ \mathrm{A}_{p_0}^{\mathrm{P}} f(\mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}}),\ \mathrm{A}_{r_0}^{\mathrm{R}} f(re^{\mathrm{P}\sqrt{-1}}),$$

$$\mathrm{A}_{p_0}^{\mathrm{P}} f(r_0 e^{p\sqrt{-1}}),$$

ed ammettendo che la funzione $f(s)$ verifichi per tutti i punti situati sul contorno OO'O'' la formola (152), si caverà dalle equazioni (147), (151)

$$(170) \qquad \overset{c}{I_0}((f(s))) = \overset{\mathrm{R}}{I_{r_0}}((\Psi(r\cos.p_0,\ r\mathrm{sen}.p_0)))$$

$$+ \overset{\mathrm{P}}{I_{p_0}}((\Psi(\mathrm{R}\cos.p,\ \mathrm{R}\mathrm{sen}.p))) - \overset{\mathrm{R}}{I_{r_0}}((\Psi(r\cos.\mathrm{P},\ r\mathrm{sen}.\mathrm{P})))$$

$$- \overset{\mathrm{P}}{I_{p_0}}((\Psi(r_0\cos.p,\ r_0\mathrm{sen}.p))).$$

Se la funzione $\underline{f}(z)$ presentandosi sotto una forma reale il valor generale di $\Psi(x,y)$ è determinato dal sistema delle formole (156), (157), (160), o ciò che torna lo stesso dall'equazione (163) si avrà evidentemente

$$(171) \ \Psi(r\cos.p, r\mathrm{sen}.p) = \frac{e^{-\tau\sqrt{-1}}\underline{f}(re^{p\sqrt{-1}}) + e^{\tau\sqrt{-1}}\underline{f}(re^{-p\sqrt{-1}})}{e^{-\tau\sqrt{-1}}\underline{f}(re^{p\sqrt{-1}}) - e^{\tau\sqrt{-1}}\underline{f}(re^{-p\sqrt{-1}})} \sqrt{-1}.$$

Si può facilmente esprimere con l' ajuto delle notazioni di cui abbiamo fatto uso il numero m delle radici della equazione (45), che corrispondono a dei punti racchiusi nel contorno OO'O''. . . . . allorchè questo contorno è formato dalle

quattro rette, o dalle due rette e dai due archi di cerchio qui sopra ricordati.

In fatti dall' equazione (85) congiunta alla formola (153) o (170) si ottiene nel primo caso

$$(172) \qquad m = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} I_{x_0}^{X}((\Psi(x, y_0))) + I_{y_0}^{Y}((\Psi(X, y))) \\ - I_{x_0}^{X}((\Psi(x, Y))) - I_{y_0}^{Y}((\Psi(x_0, y))) \end{array} \right\}$$

e nel secondo caso

$$(173) \quad m = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} I_{r_0}^{R}((\Psi(r\cos.p_0, r\text{sen}.p_0))) + I_{p_0}^{P}((\Psi(R\cos.p, R\text{sen}.p))) \\ - I_{r_0}^{R}((\Psi r\cos.P, r\text{sen}.P))) - I_{r_0}^{R}((\Psi(r_0\cos.p_0, r_0\text{sen}.p_0))) \end{array} \right\}$$

essendo i valori di $\Psi(x, y)$ determinati dal sistema delle equazioni (156), (157), che potranno venir rimpiazzate, se la funzione $\underline{f}(z)$ si presenta sotto forma reale dalla sola equazione (163).

Se si vuole determinare il numero delle radici reali, o immaginarie della equazione (45), che offrono dei moduli inferiori a R, bisognerà ridurre il contorno OO'O''.... alla circonferenza d'un cerchio descritto dall' origine delle coordinate col raggio R e la formola (173) darà

$$(174) \qquad m = \frac{1}{2} I_{-\pi}^{\pi}((\Psi(R\cos.p, R\text{sen}.p))).$$

Se vogliasi determinare il numero delle radici reali o immaginarie che offrono moduli inferiori ad R ad un tempo e parti positive reali, bisognerà ridurre il contorno OO'O''.... a un semicerchio descritto col raggio R, dalla parte delle x positive ed appoggiato sopra quello de' suoi diametri che coincide con l' asse delle y. In conseguenza si dovrà porre

$$p=-\frac{\pi}{2}\,,\ \mathrm{P}=\frac{\pi}{2}\,,\ r_0=0,$$

nella formola (173) dalla quale si otterrà

$$m=\tfrac{1}{2}\left\{ I_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}((\Psi(\mathrm{R}\cos.p,\ \mathrm{R}\operatorname{sen}.p)))+I_{0}^{\mathrm{R}}((\Psi(0,-r)))-I_{0}^{\mathrm{R}}((\Psi(0,r)))\right\}$$

o ciò che torna lo stesso

$$(175)\qquad m=\tfrac{1}{2}\,I_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}((\Psi(\mathrm{R}\cos.p,\ \mathrm{R}\operatorname{sen}.p)))-\tfrac{1}{2}\,I_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}((\Psi(0,y))).$$

Se al contrario vuolsi determinare il numero delle radici reali o immaginarie che offrono ad un tempo moduli inferiori ad R, e parti reali negative, si dovrà far successivamente nella formola (173)

$$p_0=-\pi,\ \mathrm{P}=-\frac{\pi}{2},\ r_0=0,\ \text{e}\ p_0=\frac{\pi}{2}\,,\ \mathrm{P}=\pi,\ r_0=0,$$

poi sommare i risultati così ottenuti, o ciò che torna lo stesso, fare immediatamente $p_0=\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{P}=\frac{3\pi}{2}$, $r_0=0$, e in questo modo si troverà

$$(176)\qquad m=\tfrac{1}{2}\,I_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}}((\Psi(0,y)))+\tfrac{1}{2}\,I_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}((\Psi(\mathrm{R}\cos.p,\ \mathrm{R}\operatorname{sen}.p))).$$

Se si volesse ottenere il numero delle radici, nelle quali le parti reali, ed i coefficienti di $\sqrt{-1}$ sono, astrazione fatta dal segno, inferiori ad R, bisognerebbe mettere nella formola (172)

$$x_0=-\mathrm{R},\quad \mathrm{X}=\mathrm{R},\quad y_0=-\mathrm{R},\quad \mathrm{Y}=\mathrm{R}$$

e troverebbesi in conseguenza

$$(177)\qquad m=\tfrac{1}{2}\,I_{-R}^{R}((\Psi(x,-R)))+\tfrac{1}{2}\,I_{-R}^{R}((\Psi(R,y)))$$
$$-\tfrac{1}{2}I_{-R}^{R}((\Psi(x,R)))-\tfrac{1}{2}\,I_{-R}^{R}((\Psi(-R,y))).$$

Se fra le stesse radici considerar si volessero soltanto quelle nelle quali la parte reale è positiva o negativa, si avrebbe nel primo caso

$$(178)\qquad m=\tfrac{1}{2}I_{0}^{R}((\Psi(x,-R)))+\tfrac{1}{2}\,I_{-R}^{R}((\Psi(R,y)))$$
$$-\tfrac{1}{2}I_{0}^{R}((\Psi(x,R)))-\tfrac{1}{2}\,I_{-R}^{R}((\Psi(0,y)))$$

e nel secondo caso

$$(179)\qquad m=\tfrac{1}{2}I_{-R}^{0}((\Psi(x,-R)))+\tfrac{1}{2}\,I_{-R}^{R}((\Psi(0,y)))$$
$$-\tfrac{1}{2}I_{-R}^{0}((\Psi(x,R)))-\tfrac{1}{2}\,I_{-R}^{R}((\Psi(-R,y))).$$

Allorchè il numero R è scelto tale che superi tutte le radici della equazione (45), ciascuna delle formole (174), (177) determina il numero totale delle radici reali o immaginarie; ciascuna delle formole (175), (178) determina il numero totale delle radici nelle quali la parte reale è positiva, al che aggiunger devesi, se le parti reali di alcune radici svaniscono, la metà del numero di queste ultime; finalmente ciascuna delle formole (176), (179) determina il numero totale delle radici nelle quali la parte reale è negativa, aggiunte, se vi è luogo, alla metà del numero di quelle di cui la parte reale si ridurrebbe a zero.

Se si volesse determinare il numero delle radici reali, di

cui il valor numerico è inferiore ad R, bisognerebbe mettere nella equazione (172)

$$x_0 = -R, \quad X_0 = R, \quad \text{ed} \quad y = -\varepsilon, \quad Y = \varepsilon$$

significando ε un numero infinitamente piccolo di modo che si avrebbe

$$(180) \quad m = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} I_{-R}^{R}((\Psi(x, -\varepsilon))) + I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(R, y))) \\ -I_{-R}^{R}((\Psi(x, \varepsilon))) - I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(-R, y))) \end{array} \right\}.$$

Parimente il numero delle radici positive, e il numero delle radici negative accresciuti ciascuno della metà del numero delle radici reali, se ne esistono, saranno determinati dalle equazioni

$$(181) \quad m = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} I_{0}^{R}((\Psi(x, -\varepsilon))) + I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(R, y))) \\ -I_{0}^{R}((\Psi(x, \varepsilon))) - I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(0, y))) \end{array} \right\},$$

$$(182) \quad m = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} I_{-R}^{0}((\Psi(x, -\varepsilon))) + I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(0, y))) \\ -I_{-R}^{0}((\Psi(x, \varepsilon))) - I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(-R, y))) \end{array} \right\};$$

se vogliasi limitare a considerare le radici il cui modulo è inferiore ad R. Poichè le formole (180), (181), (182) si estendono, la prima a tutte le radici reali, e le due altre a tutte le radici positive o negative, basta che il numero R superi il valore numerico di tutte le radici reali.

Del resto le formole (180), (181), (182) si trovano comprese nella seguente

$$(183) \quad m = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} I_{x_0}^{X}((\Psi(x,-\varepsilon))) + I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(X,y))) \\ - I_{x_0}^{X}((\Psi(x,\varepsilon))) - I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(x_0,y))) \end{array} \right\}$$

che si deduce immediatamente dalla formola (172), mettendo $y_0 = -\varepsilon$, $Y = \varepsilon$, e che dà il numero m delle radici reali della equazione (45) comprese fra i limiti x_0, X.

I valori di m che si determinano con le formole (181), (182) sono equivalenti a quelli che si dedurrebbero dalla formola (172), riducendo r_0 a zero, e mettendo

$$p_0 = -\varepsilon, \quad P = \varepsilon$$

o

$$p_0 = \pi - \varepsilon, \quad P = \pi + \varepsilon.$$

In conseguenza il numero delle radici positive inferiori ad R è ancora dato dall' equazione

$$(184) \quad m = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} I_0^{R}((\Psi(r\cos.\varepsilon, -r\,\mathrm{sen}.\varepsilon))) + I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(R\cos.p, R\,\mathrm{sen}.p))) \\ \qquad - I_0^{R}((\Psi(r\cos.\varepsilon, r\,\mathrm{sen}.\varepsilon))), \end{array} \right\}$$

ed il numero delle radici negative, i valori numerici delle quali sono inferiori ad R dall' equazione

$$m = \tfrac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} I_0^{R}((\Psi(-r\cos.\varepsilon, r\,\mathrm{sen}.\varepsilon))) + I_{\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon}((\Psi(R\cos.p, R\,\mathrm{sen}\, p))) \\ \qquad - I_0^{R}((\Psi(-r\cos.\varepsilon, -r\,\mathrm{sen}.\varepsilon))) \end{array} \right\}$$

o ciò che torna lo stesso, dalla seguente

$$(185)\quad m=\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} I_{0}^{R}((\Psi(-r\cos.\varepsilon, r\mathrm{sen}.\varepsilon)))-I_{-\varepsilon}^{\varepsilon}((\Psi(-\mathrm{R}\cos.p, -\mathrm{R}\sin p)) \\ \qquad -I_{0}^{R}((\Psi(-r\cos.\varepsilon, -r\mathrm{sen}.\varepsilon))). \end{array}\right\}$$

Sommando il secondo membro delle formole (184), (185) si riprodurrebbe il numero totale delle radici reali della equazione (45) o almeno di quelle il valor numerico delle quali è inferiore ad R.

Allorchè la funzione $\underline{f}(z)$ presentandosi sotto forma reale l'equazione

$$(186)\qquad \underline{f}(x)=0$$

non offre radici reali eguali fra loro, questa stessa equazione non ha radice alcuna che gli sia comune con la seguente

$$(187)\qquad \underline{f}'(x)=0,$$

e in conseguenza $\underline{f}'(x)$ non svanisce allorquando si attribuiscano ad x valori reali che facciano svanire $\underline{f}(x)$. Egli è facile il concludere che il valore di $\Psi(x,y)$ determinato dalla formola (164) potrà nelle formole (183), (184), (185) dove la quantità $y=r\sin.p$ diventa infinitamente piccola, essere rimpiazzata da quest' altro valore

$$(188)\qquad \Psi(x,y)=\frac{\gamma\underline{f}'(x)}{\underline{f}(x)}.$$

Ciò posto il numero m delle radici reali dell'equazione (186) dedotto dalla formola (183) sarà nell' ipotesi ammessa

$$(189)\qquad m=I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{\underline{f}'(x)}{\underline{f}(x)}\right)\right)$$

mentre che si ricaverà dalle formole (184), (185)

$$m = I_{0}^{R}\left(\left(\frac{rf'(r\cos.\varepsilon)}{f(r\cos.\varepsilon)}\right)\right), \quad m = -I_{0}^{R}\left(\left(\frac{rf'(-r\cos.\varepsilon)}{f(-r\cos.\varepsilon)}\right)\right)$$

o ciò che torna lo stesso

$$(190) \qquad m = I_{0}^{R}\left(\left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)\right),$$

$$(191) \qquad m = -I_{-R}^{0}\left(\left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)\right).$$

Se si sottragga l' ultimo valore di m dal penultimo, la differenza che io chiamerò μ sarà

$$(192) \qquad \mu = I_{-R}^{R}\left(\left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)\right),$$

e rappresenterà l' eccesso del numero delle radici positive sul numero delle radici negative, supponendo che si considerino soltanto le radici i cui moduli sono inferiori ad R. Del resto per stabilire direttamente le formole (189), (192) basta osservare che se si dica a una radice reale semplice dell'equazione (186), prendendo per ε un numero infinitamente piccolo si avrà

$$\frac{f'(a+\varepsilon)}{f(a+\varepsilon)} = \frac{f'(a)}{\varepsilon f'(x)} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{f'(a-\varepsilon)}{f(a-\varepsilon)} = -\frac{1}{\varepsilon},$$

e che in conseguenza venendo a crescere x, la funzione

$$(193) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)}$$

passerà divenendo infinita dal positivo al negativo. Se l'equazione (186) ammettesse un numero i di radici eguali aventi a per valor comune, si troverebbe

$$\frac{f'(a+\varepsilon)}{f(a+\varepsilon)} = \varepsilon^{i-1} \frac{\frac{f^{(i)}(a)}{1.2.....(i-1)}}{\frac{\varepsilon^i}{1.2...\varepsilon} f^{(i)}(a)} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{f'(a-\varepsilon)}{f(a-\varepsilon)} = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Dunque divenendo infinita la funzione (193) passerebbe dal negativo al positivo. Si deve concludere che generalmente il valore di m determinato dalla formola (189) rappresenta non già il numero totale delle radici reali dell'equazione (186) contenuto fra i limiti x_0, X, ma solamente il numero di quelle che essendo comprese fra questi limiti sono le une dalle altre diverse. Parimente il valore di m determinato dalla formola (192) rappresenterà generalmente la differenza fra il numero delle radici positive diverse e il numero delle radici negative differenti, se si limitiamo a considerar quelle fra le radici positive e negative che danno dei valori numerici inferiori ad R.

Ritorniamo ora alle formole (85) e (94). Da queste formole paragonate fra loro risulta che il contorno OO'O''. . . . . essendo qualunque, e indicando con la lettera c il perimetro di questo contorno si avrà

$$(194) \qquad I_0^c((f(s))) = -I_0^c\left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right).$$

Ora egli è facile di generalizzare la formola (194), e di stabilire la seguente proposizione.

6.° Teorema. Indicando $f(s)$ una funzione reale di s, che ottiene sempre un valore unico e determinato fra i limiti

$$s = s_0, \quad s = s_1,$$

ed essendo $s_0 < s_1$ la somma delle due radici

$$(195) \qquad I_{s_0}^{s_1}((f(s))), \quad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right)$$

sarà equivalente a $+1$, od a -1, o a zero secondo che le due quantità

$$(196)\qquad f(s_1),\quad -f(s_0)$$

saranno amendue negative, o amendue positive, o l' una positiva e l' altra negativa, di modo che si avrà

$$(197)\qquad I_{s_0}^{s_1}((f(s)))+I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right)=\tfrac{1}{2}\left[I\frac{f(s_1)}{((s))}-I\frac{f(s_0)}{((s))}\right].$$

Dimostrazione. Infatti se si applicano alla determinazione degli integrali equivalenti

$$\int_{s_0}^{s_1}\frac{f'(s)\sqrt{-1}}{1+f(s)\sqrt{-1}}\,ds,\ \int_{s_0}^{s_1}\frac{f'(s)}{f(s)-\sqrt{-1}}\,ds$$

i ragionamenti di cui abbiamo fatto uso per determinare le formole (70), (71), (83), si troverà immediatamente

$$(198)\qquad \int_{s_0}^{s_1}\frac{f'(s)\sqrt{-1}}{1+f(s)\sqrt{-1}}\,ds=\mathrm{L}[1+f(s_1)\sqrt{-1}]$$

$$-\mathrm{L}[1+f(s_0)\sqrt{-1}]-\pi\sqrt{-1}\,I_{s_0}^{s_1}((f(s))),$$

$$(199)\qquad \int_{s_0}^{s_1}\frac{f'(s)}{f(s)-\sqrt{-1}}\,ds=\mathrm{L}[\pm[f(s_1)-\sqrt{-1}]]$$

$$-\mathrm{L}[\pm[f(s_0)-\sqrt{-1}]]+\pi\sqrt{-1}\,I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right),$$

dovendosi poi ridurre ciascuno dei segni doppj al segno $+$ od al segno $-$, e dovendo essere sempre effettuata questa riduzione, in modo che la parte reale della espressione affetta di doppio segno divenga positiva. Ora sotto questa condizione la differenza

$$L[1+f(s_1)\sqrt{-1}]-L[\pm[f(s_1)-\sqrt{-1}]]$$

si riduce ora a

$$L(\sqrt{-1})=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$$

ora a

$$L(-\sqrt{-1})=-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$$

secondo che $f(s)$ sarà una quantità positiva o negativa; di modo che si avrà

$$(200)\quad L[1+f(s_1)\sqrt{-1}]-L[\pm[f(s_1)-\sqrt{-1}]]=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\,I\frac{f(s_1)}{((s))};$$

si troverà parimente

$$(201)\quad L[1+f(s_0)\sqrt{-1}]-L[\pm[f(s_0)-\sqrt{-1}]]=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\,I\frac{f(s_0)}{((s))}.$$

Dunque se dalla formola (198) si sottragga la formola (199) si concluderà dividendo i due membri per $\pi\sqrt{-1}$

$$(202)\quad I_{s_0}^{s_1}((f(s)))+I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right)-\frac{1}{2}\left[I\frac{f(s_1)}{((s))}-I\frac{f(s_0)}{((s))}\right]=0.$$

Ora l' equazione (202) che può scriversi ancora come segue

$$(203)\quad I_{s_0}^{s_1}((f(s)))=-I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{1}{f(s)}\right)\right)+\frac{1}{2}\left[I\frac{f(s_1)}{((s))}-I\frac{f(s_0)}{((s))}\right]$$

non differisce dalla formola (197).

Se coll' ajuto dell' equazione (203) si trasformano li secondi membri delle equazioni (189), (192), esse diventeranno rispettivamente

$$(204)\quad m = -\,I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)\right) + \tfrac{1}{2}\left[I\frac{f(X)}{((x))f'(X)} - I\frac{f'(x_0)}{((x))f'(x_0)}\right]$$

$$(205)\quad \mu = -\,I_{-R}^{R}\left(\left(\frac{f(x)}{xf'(x)}\right)\right) + \tfrac{1}{2}\left[I\frac{f(R)}{((x))f'(R)} + I\frac{f(-R)}{((x))f'(-R)}\right].$$

Se d' altronde il rapporto

$$\frac{f(R)}{f'(R)}$$

cangia di segno quando si sostituisce $-R$ ad R in modo che si abbia

$$(206)\qquad \frac{f(R)}{f'(R)} + \frac{f(-R)}{f'(-R)} = 0$$

la formola (205) si ridurrà a

$$(207)\qquad \mu = -\,I_{-R}^{R}\left(\left(\frac{f(x)}{xf'(x)}\right)\right).$$

Le formole (204), (205) che potrebbero anche dedursi dalle equazioni (183), (184), (185) unite alla formola (165) racchiudono due teoremi degni di osservazione, di cui ecco l'enunziato.

7.° Teorema. Se la funzione reale $f(x)$ resta finita o continua fra i limiti $x = x_0$, $x = X$, per conoscere quante radici reali abbia l' equazione

$$f(x) = 0$$

diverse fra loro comprese tra questi limiti, basterà cercare la differenza fra i due numeri, che indicano il primo, quante volte per dei valori crescenti di x contenuti fra i limiti x_0, X la funzione

$$(208)\qquad \frac{f(x)}{f'(x)}$$

passa divenendo infinita dal positivo al negativo; il secondo quante volte la stessa funzione passa divenendo infinita dal negativo al positivo, poi aggiungere a questa differenza 1, -1, o zero secondochè le due quantità

$$(209)\qquad \frac{f(\mathrm{X})}{f'(\mathrm{X})},\ -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

saranno amendue negative, o tutte due positive, o l' una positiva, e l' altra negativa.

8.° Teorema. Se la funzione reale $f(x)$ resta finita e continua fra i limiti $x=x_0$, $x=\mathrm{X}$, per determinare la differenza fra il numero delle radici positive, e il numero delle radici negative della equazione (186), che essendo diverse le une delle altre, ci offriranno dei moduli inferiori ad R, basterà cercare la differenza fra li due numeri che indicano, il primo, quante volte la funzione

$$(210)\qquad \frac{f(x)}{xf'(x)}$$

per dei valori crescenti di x contenuti fra i limiti x_0, X, passa divenendo infinita dal positivo al negativo; il secondo quante volte la stessa funzione passa divenendo infinita, dal negativo al positivo poi aggiungere a questa differenza 1, -1 o zero secondo che le due quantità

$$(211)\qquad \frac{f(\mathrm{R})}{f'(\mathrm{R})},\ \frac{f(-\mathrm{R})}{f'(-\mathrm{R})}$$

saranno tutte due positive, o tutte due negative, o l' una positiva e l' altra negativa.

Il teorema 7.° applicato all'equazioni algebraiche è stato per la prima volta enunciato dall'Abate Degua nelle Memorie dell'Accademia Reale delle Scienze. Io ho enunciato per le stesse equazioni supponendo $\mathrm{R}=\infty$ il teorema 8.° nel Giornale della Scuola politecnica, e partendo da questo teorema ho dimostrato io per il primo, che per qualunque equazione algebraica si potranno trovare delle funzioni razionali dei coefficienti, i segni delle quali somministrino il mezzo di determinare il numero delle radici reali positive, e il numero delle

radici reali negative. Mettendo nel teorema 7.° $x_0=0$, $X=\infty$, si conclude che il numero delle radici positive di una equazione algebraica non può superare il numero delle radici positive della equazione derivata che di una sola unità, e nel caso soltanto, che il termine costante e il coefficiente della prima potenza della variabile x siano affetti di segni contrarj. Mettendo $-x$ in vece di x si conclude che il numero delle radici negative della proposta non può superare il numero delle radici negative della derivata che di una sola unità e nel caso soltanto, che il termine costante e il coefficiente della prima potenza della variabile siano affetti dallo stesso segno. Da queste due osservazioni deducesi immediatamente il teorema di Cartesio, in virtù del quale il numero delle radici positive di una equazione algebraica è eguale, o minore del numero delle variazioni di segno, che può offrire il primo membro; e il numero delle radici negative è uguale o minore del numero delle permanenze di segno. Se i coefficienti di molte potenze della variabile di un grado inferiore a quello della equazione data si riducono a zero, basterà per impedire che svaniscano, di sostituire ad x, $x+\varepsilon$, indicando ε un numero infinitamente piccolo, e in questo modo si proverà facilmente che nell' applicazione del teorema di Cartesio si possono trascurare i termini che scompariscono, quando trattasi di valutare il numero totale delle variazioni di segno. Risulta ancora dal teorema 7.° che il numero delle radici reali di una equazione algebraica comprese fra due limiti dati x_0, X non può superare il numero delle radici reali della derivata comprese fra gli stessi limiti, che di una sola unità, e nel caso soltanto in cui, dei due rapporti

$$\frac{f(X)}{f'(X)}, \quad \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{212}$$

il primo è positivo, ed il secondo negativo, cioè a dire, nel caso in cui sostituendo $x+z$ ad x si ottiene una trasformata

in z, nella quale il termine indipendente da z e il termine proporzionale a z sono affetti di segno contrario, o dallo stesso segno, secondochè si suppone $x=x_0$, ed $x=X$. Egli è facile di concluderne che il numero delle radici reali comprese fra i limiti x_0, X, è sempre eguale od inferiore al numero delle variazioni di segno che prende la trasformata in z, quando si passa dalla supposizione $x=x_0+z$ alla supposizione $x=X+z$. Questa conclusione contiene il teorema che il sig. Budan ha dato nella sua Memoria pubblicata nel 1806 e che trovasi nell' opera postuma del Sig. Fourier intitolata: *Analisi delle equazioni determinate*. Del resto osserviamo che seguendo per dimostrare questo teorema e quello di Cartesio il metodo quì sopra indicato, si suppongono tacitamente le radici reali della equazione (186) semplici e diverse le une dalle altre. Ma per far vedere che gli stessi teoremi estendonsi al caso in cui l' equazione (186) dà delle radici uguali, basta sostituire alla formola (204) quella che si dedurrebbe dall' equazione (183) combinata con le equazioni (164) e (203), oppure anche, attribuire alle radici reali che fossero fra loro eguali, degli aumenti infinitamente piccoli e disuguali in modo di rendere tutte le radici reali diverse. Poichè operando così, non si altererebbero che infinitamente poco i coefficienti positivi o negativi della equazione in x, o delle sue trasformate in z, e per conseguenza non si altererebbero i segni di questi coefficienti.

Aggiungasi che se nelle equazioni in x e z di cui trattasi, alcuni dei coefficienti si riducessero a zero, converrebbe mettere invece di x, x_0, X; $x+\varepsilon$, $x_0+\varepsilon$, $X+\varepsilon$, essendo il numero ε infinitamente piccolo, e poscia prendere gli aumenti infinitamente piccoli delle radici, in modo che potessero venir trascurati in confronto di ε e delle potenze di ε delle quali si dovesse tener conto. Si potrebbe a cagion d'esempio, supporre questi aumenti proporzionali ad una potenza di ε di cui l' esponente superasse il grado della data equazione.

Del resto la formola (205) somministra il mezzo per determinar facilmente l' indice

$$\overset{s}{\underset{s_0}{I}}{}^{1}((f(s)))$$

ogni volta che la funzione $f(s)$ si riduce ad una frazione razionale. Infatti supponiamo

$$(212) \qquad f(s) = \frac{\Phi(s)}{\Phi_1(s)}$$

$\Phi(s)$, $\Phi_1(s)$ essendo due funzioni intiere e reali di s. Se $\Phi(s)$ è divisibile esattamente per $\Phi_1(s)$ si potrà ridurre $f(s)$ a un polinomio intiero, e per conseguenza si avrà

$$(213) \qquad \overset{s}{\underset{s_0}{I}}{}^{1}((f(s))) = 0\,;$$

se al contrario non essendo $\Phi(s)$ esattamente divisibile per $\Phi_1(s)$ si chiami

$\Phi_2(s)$ il resto della divisione di $\Phi(s)$ per $\Phi_1(s)$,

$\Phi_3(s)$ il resto della divisione di $\Phi_1(s)$ per $\Phi_2(s)$,

$\Phi_4(s)$ il resto della divisione di $\Phi_2(s)$ per $\Phi_3(s)$, ecc.

l' ultima delle funzioni

$$\Phi(s), \quad \Phi_1(s), \quad \Phi_2(s), \quad \Phi_3(s), \quad \Phi_4(s) \text{ ecc.}$$

che indicherò per

$$\Phi_i(s)$$

sarà il divisor comune più grande dei due polinomj

$$\Phi(s),\quad \Phi_1(s),$$

e si ridurrà se questi polinomj non hanno divisor comune ad una quantità costante.

Allora si avrà pure evidentemente

$$(214)\qquad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi(s_0)}{\Phi_1(s_0)}\right)\right) = I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_2(s)}{\Phi_1(s)}\right)\right)$$

e si caverà dalla formola (214) congiunta alla formola (205)

$$(215)\quad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi(s)}{\Phi_1(s)}\right)\right) = -I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_1(s)}{\Phi_2(s)}\right)\right) + \tfrac{1}{2}\left[I\frac{\Phi_1(s_1)}{((s))\Phi_2(s_1)} - I\frac{\Phi_1(s_0)}{((s))\Phi_2(s_0)}\right]$$

Si avrà parimente

$$I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_1(s)}{\Phi_2(s)}\right)\right) = -I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_2(s)}{\Phi_3(s)}\right)\right) + \tfrac{1}{2}\left[I\frac{\Phi_2(s_1)}{((s))\Phi_3(s_1)} - I\frac{\Phi_2(s_0)}{((s))\Phi_3(s_0)}\right]$$

$$I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_2(s)}{\Phi_3(s)}\right)\right) = -I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_3(s)}{\Phi_4(s)}\right)\right) + \tfrac{1}{2}\left[I\frac{\Phi_3(s_1)}{((s))\Phi_4(s_1)} - I\frac{\Phi_3(s_0)}{((s))\Phi_4(s_0)}\right]$$

ecc.

$$I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_{i-2}(s)}{\Phi_{i-1}(s)}\right)\right) = -I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_{i-1}(s)}{\Phi_i(s)}\right)\right) + \tfrac{1}{2}\left[I\frac{\Phi_{i-1}(s_1)}{((s))\Phi_i(s_1)} - I\frac{\Phi_{i-1}(s_0)}{((s))\Phi_i(s_0)}\right]$$

Finalmente essendo $\Phi_i(s)$ il più gran divisore algebraico delle due funzioni $\Phi(s)$, $\Phi_1(s)$, dividerà $\Phi_{i-1}(s)$ e si avrà in conseguenza

$$(216)\qquad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_{i-1}(s)}{\Phi_i(s)}\right)\right) = 0.$$

Ciò posto è chiaro che dalle formole (215) moltiplicate alternativamente per i fattori $+1$, e -1, poi sommate insieme si concluderà definitivamente

$$(217)\quad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi(s)}{\Phi_1(s)}\right)\right)=\tfrac{1}{2}\left[I\frac{\Phi_1(s_1)}{((s))\Phi_2(s_1)}-I\frac{\Phi_2(s_1)}{((s))\Phi_3(s_1)}+\ldots+(-1)^i I\frac{\Phi_{i-1}(s_1)}{((s))\Phi_i(s_1)}\right]$$

$$-\tfrac{1}{2}\left[I\frac{\Phi_1(s_0)}{((s))\Phi_2(s_0)}-I\frac{\Phi_2(s_0)}{((s))\Phi_0(s_0)}+\ldots+(-1)^i I\frac{\Phi_{i-1}(s_0)}{((s))\Phi_i(s_0)}\right].$$

Se si volesse ottenere il valore di

$$I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_1(s)}{\Phi(s)}\right)\right)$$

essendo il grado di $\Phi(s)$ superiore a quello di $\Phi_1(s)$, allora alle formole (215) bisognerebbe aggiungere la seguente

$$(218)\quad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_1(s)}{(\Phi s)}\right)\right)=-I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi(s)}{\Phi_1(s)}\right)\right)+\tfrac{1}{2}\left[I\frac{\Phi(s_1)}{((s))\Phi_1(s_1)}-I\frac{\Phi(s_0)}{((s))\Phi_1(s_0)}\right]$$

e si avrebbe in conseguenza

$$(219)\quad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_1(s)}{\Phi(s)}\right)\right)=\tfrac{1}{2}\left[I\frac{\Phi(s_1)}{((s))\Phi_1(s_1)}-I\frac{\Phi_1(s_1)}{((s))\Phi_2(s_2)}+\ldots+(-1)^i I\frac{\Phi_{i-1}(s_1)}{((s))\Phi_1(s_1)}\right]$$

$$-\tfrac{1}{2}\left[I\frac{\Phi(s_0)}{((s))\Phi_1(s_0)}-I\frac{\Phi_1(s_0)}{((s))\Phi_2(s_0)}+\ldots-(-1)^i I\frac{\Phi_{i-1}(s_0)}{((s))\Phi_i(s_0)}\right].$$

Se di più calcolar si volesse il valore di

$$(220)\qquad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{s\Phi_1(s)}{\Phi(s)}\right)\right)$$

vi si potrebbe arrivare sia immediatamente, sostituendo la funzione $s\Phi_1(s)$ alla funzione $\Phi(s)$ nella formola (219), sia combinando l'equazione (203) con altre equazioni dell' una delle forme

$$(221) \qquad \mathcal{I}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{s\Phi_1(s)}{\Phi_2(s)}\right)\right) = \mathcal{I}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{s\Phi_3(s)}{\Phi_2(s)}\right)\right)$$

$$(222) \qquad \mathcal{I}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi(s)}{\Phi_1(s)}\right)\right) - \mathcal{I}_{s_0}^{s_1}\frac{\Phi(0)}{((s))\Phi_1(0)} =$$

$$\mathcal{I}_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\Phi_2(s)}{s\Phi_1(s)}\right)\right) - \mathcal{I}_{s_0}^{s_1}\frac{\Phi_2(0)}{((s))\Phi_1(0)}.$$

Allorchè $f(x)$ è un polinomio intiero, basta sostituire nella formola (219) la variabile x' alla variabile s_1, ed alle funzioni $\Phi(s)$, $\Phi_1(s)$ le funzioni $f(x)$, $f'(x)$ per ottenere il numero intiero m che determina l' equazione (189), cioè a dire il numero delle radici reali e diverse dell' equazione

$$f(x) = 0$$

comprese fra i limiti $x = x_0$, $x = X$. Così ci troviamo ricondotti al teorema che il ch. Sig. Sturm ha dato in una Memoria presentata all'Accademia delle Scienze il 13 Maggio 1829.

Osserviamo ancora che se la funzione $f(z)$ è algebraica, si potrà calcolare con l' ajuto della formola (217) i valori di m somministrati dalle equazioni (172), (173), (174), (175), (176), (177), (178), (179) ecc. e per conseguenza il numero delle radici della equazione

$$f(z) = 0$$

che corrispondono a due punti compresi in un rettangolo, o in un settor circolare. Infatti nel caso di cui trattasi, il valore di $\chi(x, y)$ determinato dalla formola (163), (164) o (165) sarà evidentemente una funzione razionale di ciascuna delle variabili x, y, e se si ponga

$$(223) \qquad \text{tang.}\ \frac{p}{2} = t$$

il valore di

$$\chi(r\cos.p\,, \quad r\mathrm{sen}.p\,)$$

determinato dalla formola (171) sarà ancora una funzione razionale non solamente della variabile r, ma anche della variabile t. Avvi di più: con l'ajuto delle formole (85), o (94), (142), (147) e (217), o (219) si potrà calcolare immediatamente il numero $\overset{o}{n}$ delle radici reali della equazione

$$\underline{f}(z) = 0$$

corrispondenti a dei punti contenuti nel contorno OO′O″. . . sempre quando questo contorno sia soltanto composto di linee rette e d'archi circolari. Infatti in virtù di queste formole si potrà scomporre il numero cercato

$$m = \tfrac{1}{2}\, I_{0}^{c}\, ((f(s)))$$

in molte parti della forma

$$\tfrac{1}{2}\, I_{s_0}^{s_1}\, ((f(s)))$$

corrispondenti ai diversi punti del contorno OO′O″. . . . D'altra parte la funzione $\underline{f}(z)$ essendo per ipotesi algebraica, $f(s)$, ossia il rapporto fra il coefficiente di $\sqrt{-1}$ nella funzione $\underline{f}(z)$, e la parte reale presa col segno — sarà una funzione razionale di x, y. Ora per ciascuna delle porzioni rette del contorno OO′O″. . . . le variabili x, y, s saranno fra loro vincolate da due equazioni di primo grado; in conseguenza $f(s)$ diverrà una funzione razionale di s e si potrà ancora mettere in suo luogo una funzione razionale di x o di y.

Finalmente se nel contorno OO′O″. . . . si considera una porzione circolare che sia precisamente un arco di cerchio descritto con un dato raggio ρ, le x, y diventeranno funzioni lineari di

$$\cos.\frac{s-s_o}{\rho} \quad \text{e} \quad \text{sen}.\frac{s-s_o}{\rho}$$

indicando s_o il valore di s che corrisponde all'origine di quest' arco. Dunque se si fa

$$(224) \qquad \text{tang}.\frac{s-s_o}{2\rho} = t,$$

$f(s)$ si trasformerà per la porzione di cui trattasi, in una funzione razionale di t. Così in tutti i casi allorchè la funzione $\underline{f}(z)$ sarà algebraica ed il contorno OO'O''. . . . . unicamente composto di rette o di archi circolari, la determinazione del numero delle radici della equazione

$$\underline{f}(z) = 0$$

corrispondenti a punti contenuti in questo contorno potrà essere ridotta alla determinazione di indici di funzioni razionali, o ciò che torna lo stesso, avuto riguardo alla formola (217) alla ricerca del massimo comun divisore algebraico delle funzioni intiere di una sola variabile.

Generalmente, se il contorno OO'O''. . . . è composto di molte parti di linee di una natura tale che, l'ascissa x e l'ordinata y di ciascuna d'esse parti possano essere rappresentate da funzioni razionali di una terza variabile t, la determinazione del numero m delle radici corrispondenti a punti contenuti in questo contorno, si ricondurrà immediatamente al calcolo degli indici di molte funzioni razionali di t, e se per ciascuna porzione del contorno OO'O''. . . . la variabile t cresce o decresce costantemente, mentre l' arco si aumenta, allora per ottenere l' indice della frazione razionale relativa ad una data porzione, basterà cercare il massimo comun divisore algebraico delle funzioni intiere di t che rappresentano i due termini di questa frazione razionale, poi sostituire questi due termini, ed i resti delle divisioni parziali alle funzioni indicate nella formola (217) da

$$\Phi(s),\quad \Phi_{\prime}(s),\quad \Phi_{\prime\prime}(s)\ \text{ec.}$$

Ritorniamo ora alla condizione (97), alla quale è ben sovente utile il ricorrere nella teoria delle equazioni algebraiche e trascendenti, atteso che si è sicuri, quando è adempita questa condizione, che il numero m delle radici corrispondenti a punti compresi nel contorno OO'O''.... resta lo stesso per le due equazioni (45) e (100), o

$$(225)\qquad \Pi(z)=0,\quad \text{e}\quad \Pi(z)+\varpi(z)=0.$$

Da quanto si è detto qui sopra, se il contorno OO'O''.... si riduce al rettangolo formato dalle rette che rappresentano l'equazione (11), la condizione (97) si verificherà quando si avrà al tempo stesso

$$(226)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Lambda_{x_0}^{X}\dfrac{\varpi(x+y_0\sqrt{-1})}{\Pi(x+y_0\sqrt{-1})}<1,\quad \Lambda_{y_0}^{Y}\dfrac{\varpi(X+y\sqrt{-1})}{\Pi(X+y\sqrt{-1})}<1 \\ \Lambda_{x_0}^{X}\dfrac{\varpi(x+Y_0\sqrt{-1})}{\Pi(x+Y_0\sqrt{-1})}<1,\quad \Lambda_{y_0}^{Y}\dfrac{\varpi(x_0+y\sqrt{-1})}{\Pi(x_0+y\sqrt{-1})}<1 \end{array}\right\}$$

Allora il numero m sarà quello delle radici nelle quali la parte reale è compresa fra i limiti x_0 X, ed il coefficiente di $\sqrt{-1}$ fra i limiti y_0 Y. Se il contorno OO'O''.... si riduce al sistema di due rette, e di due archi di cerchio, rappresentati dalle equazioni (30), la condizione (97) si verificherà quando si avrà

$$(227)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Lambda_{r_0}^{R}\dfrac{\varpi(re^{p_0\sqrt{-1}})}{\Pi(re^{p_0\sqrt{-1}})}<1,\quad \Lambda_{p_0}^{P}\dfrac{\varpi(Re^{p\sqrt{-1}})}{\Pi(Re^{p\sqrt{-1}})}<1 \\ \Lambda_{r_0}^{R}\dfrac{\varpi(re^{P\sqrt{-1}})}{\Pi(re^{P\sqrt{-1}})}<1,\quad \Lambda_{p_0}^{P}\dfrac{\varpi(r_0e^{p\sqrt{-1}})}{\Pi(r_0e^{p\sqrt{-1}})}<1 \end{array}\right\}$$

ed allora il numero m sarà quello delle radici per le quali

il modulo r è compreso fra i limiti r_0, R, e l' angolo p fra i limiti p_0, P. Se il contorno OO'O''. . . . si riducesse alla circonferenza del circolo descritto col raggio R le condizioni (227) dovrebbero essere rimpiazzate da una sola cioè

$$(228) \qquad \Lambda_{-\pi}^{\pi} \frac{\varpi(\mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}})}{\Pi(\mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}})} < 1,$$

e il numero m sarebbe quello delle radici che offrono un modulo inferiore ad R.

Allorchè si fa successivamente

$$\Pi(z) = z, \quad \Pi(z) = z^m,$$

rappresentando m un numero intiero qualunque, la condizione (228) si trasforma in queste due altre

$$(229) \qquad \Lambda_{-\pi}^{\pi} \frac{\varpi(\mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}})}{\mathrm{R}} < 1,$$

$$(230) \qquad \Lambda_{-\pi}^{\pi} \frac{\varpi(\mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}})}{\mathrm{R}^m} < 1,$$

che si possono egualmente dedurre dalle formole (138) e (134). Se d'altronde la funzione $\varpi(z)$ è sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di z di modo che si abbia

$$(231) \qquad \varpi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots$$

e se si dicano

$$\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots\ldots.$$

i valori numerici, o i moduli dei coefficienti reali o immaginarj

$$a_0,\ a_1,\ a_1,\ \ldots\ldots$$

si troverà

$$(232)\qquad \Lambda_{-\pi}^{\pi}\varpi(Re^{p\sqrt{-1}}) = \text{oppur} < A_0 + A_1 R + A_2 R^2 + \ldots$$

In conseguenza la condizione (229), o (230) sarà verificata se si avrà

$$(233)\qquad \frac{A_0 + A_1 R + A_2 R^2}{R} + \ldots\ldots < 1$$

o

$$(234)\qquad \frac{A_0 + A_1 R + A_2 R^2}{R^m} + \ldots\ldots < 1.$$

D'altra parte se lo sviluppo di $\varpi(z)$ contenga al tempo stesso dei termini d'un grado inferiore, e dei termini di un grado superiore ad m, il rapporto

$$(235)\qquad \frac{A_0 + A_1 R + A_2 R^2}{R^m} + \ldots\ldots$$

$$= A_0 R^{-m} + Rn^{-m+1} + \ldots + A_{m-1} R^{-1} + A_m + A_{m+1} R + \ldots$$

otterrà un valor infinito positivo per $R=0$, decrescerà inseguito per dei valori crescenti di R e crescerà di nuovo indefinitamente mentre R si accosterà al limite ∞, o almeno al limite per il quale la serie

$$(236)\qquad A_0,\ A_1 R,\ A_2 R^2 \text{ ecc.} \ldots$$

cessa di essere convergente. Dunque nell' intervallo questo rapporto che varia con R per gradi insensibili diverrà un minimo per un certo valore di R. Ora questo valore di R potrà facilmente essere calcolato, poichè sarà la radice positiva unica della equazione

$$(237)\quad -mA_0R^{-m-1}-(m-1)A_1R^{-m}-\ldots A_{m+1}R^{-2}+A_{m+1}+A_{m+2}R+\ldots=0$$

di cui il primo membro crescerà incessantemente con R. Se si suppone in particolare $m=1$, l' equazione (237) ridotta alla

$$(238)\qquad \frac{A_0}{R^2}-A_2-A_3R-\text{ecc.}\ldots=0$$

somministrerà il valore di R corrispondente al valor minimo del rapporto

$$(239)\qquad \frac{A_0+A_1R+A_2R^2}{R}+\ldots=\frac{A_0}{R}+A_1+A_2R+\text{ecc.}\ldots$$

Allorchè facendo

$$z=Re^{p\sqrt{-1}}$$

si può scegliere l'angolo p in modo che abbiasi identicamente

$$(240)\qquad a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots\ldots$$

$$=(A_0+A_1R+A_2R^2+\text{ecc.})(\cos.\tau+\sqrt{-1}\,\text{sen}.\tau);$$

rappresentando τ un arco reale, la formola (232) si riduce alla

$$(241)\qquad A_{-\pi}^{\pi}\varpi(Re^{p\sqrt{-1}})=A_0+A_1R+A_2R^2+\ldots,$$

e il valore del rapporto (235) oppure (239) corrispondente alla radice positiva dell' equazione (237) oppure (238) è precisamente il modulo principale della funzione

$$\frac{\varpi(z)}{z^m}\quad \text{o}\quad \frac{\varpi(z)}{z}.$$

Questo è ciò che accaderà particolarmente se li coefficienti

$$a_0,\ a_1,\ a_2 \text{ ecc.} \ldots .$$

sono quantità reali dello stesso segno, o alternativamente positive e negative, poichè si verificherà la formola (240) nel primo caso ponendo

$$z = R, \quad \tau = 0, \quad \text{oppure a } \pi;$$

nel secondo caso prendendo

$$z = -R, \quad \tau = 0, \text{ oppure a } \pi.$$

Concepiamo, per fissare le idee, che si prenda

$$\varpi(z) = \alpha \cos. z$$

essendo α un coefficiente reale e positivo.

L' equazione (238) ridotta a

$$(242) \qquad 1 = \frac{R^2}{2} + \frac{1}{1.2}\,\frac{R^4}{4} + \frac{1}{1.2.3.4}\,\frac{R^6}{6} + \frac{1}{1.2.3.4.6}\,\frac{R_8}{8} + \ldots$$

ammetterà una sola radice positiva cioè

$$(243) \qquad R = 1{,}199678 \ldots$$

e il modulo principale della funzione

$$\frac{\varpi(z)}{z} = \frac{\alpha \cos.(z)}{z}$$

sarà

$$(244) \qquad \frac{\alpha}{0{,}662742 \ldots}.$$

Dunque la radice z della equazione

$$(245) \qquad z - \alpha \cos. z = 0$$

e le funzioni di questa radice saranno sviluppabili in serie

convergenti per mezzo della formola di Lagrange sempre quando si abbia

$$(246) \qquad a < 0,662742 \ldots .$$

il che già sapevasi.

Immaginiamo ora che nei teoremi 4.° e 5.° si riduca $f(z)$ ad una funzione intiera di z, di modo che abbiasi

$$(247) \qquad f(z) = z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

rappresentando m un numero intiero qualunque; allora prendendo per $\Pi(z)$ uno dei termini dei quali si compone quella funzione intiera, si stabilirà facilmente la seguente proposizione.

9.° Teorema sia

$$(248) \qquad z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

una equazione in z di grado m nella quale i coefficienti a_0, a_1, a_2, ... a_{m-1} possono essere reali o immaginarj. Se per un certo modulo R attribuito alla variabile z il modulo di un termine diventi maggiore della somma dei moduli di tutti gli altri, l' esponente di z in questo termine sarà precisamente il numero delle radici della equazione (248), le quali offrono dei moduli inferiori ad R, e si calcoleranno facilmente con l' ajuto di serie convergenti i coefficienti di una nuova equazione che non avrà altre radici che quelle di cui trattasi.

Dimostrazione. Infatti siano

$$A_0, A_1, \ldots A_{m-1}$$

i valori numerici, o i moduli dei coefficienti

$$a_0, a_1, \ldots . . a_{m-1},$$

e supponiamo che per il modulo R di z il modulo $A_l R^l$ del termine $a_l z^l$ divenga superiore alla somma dei moduli, ed a maggior ragione al modulo della somma di tutti gli altri termini, così che abbiasi

$$(249)\quad A_l R^l > A_0 + A_1 R + \ldots + A_{l-1} R^{l-1} + A_{l+1} R^{l+1} + A_{m-1} R^{m-1} + R^m.$$

Se si riduce il contorno OO′O″..... al cerchio descritto dall' origine delle coordinate col raggio R e se si ponga

$$\Pi(z) = a_l z^l,$$

il numero delle radici della equazione (248) le quali offrono dei moduli inferiori ad R sarà in virtù del teorema 4.° eguale al numero l delle radici dell' equazione

$$(250)\qquad z^l = 0;$$

se d' altronde si indicano le prime con

$$(251)\qquad z_1, z_2, \ldots z_l$$

si potrà in virtù del teorema 5.° calcolare con l' ajuto delle serie convergenti le somme

$$(252)\quad \begin{cases} z_1 + z_2 + \ldots + z_l \\ z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_l^2 \\ \text{ecc.} \\ z_1^l + z_2^l + \ldots + z_l^l, \end{cases}$$

e per conseguenza i coefficienti della equazione che avrebbe soltanto le radici $z_1, z_2 \ldots z_l$. D'altronde si potrà con l'ajuto delle formole (118), o (120) fissare i limiti degli errori commessi nel calcolo numerico delle somme (252).

Corellario 1.° Siccome la differenza

$$(253) \qquad R^m - (A_0 + A_1 R + \ldots + A_{m-1} R^{m-1})$$
$$= R^m\left(1 - \frac{A_{m-1}}{R} - \frac{A_{m-2}}{R^2} \ldots - \frac{A_1}{R^{m-1}} - \frac{A_0}{R^m}\right)$$

è evidentemente positiva allorchè il numero R supera la radice positiva unica dell' equazione

$$(254) \qquad 1 = \frac{A_{m-1}}{R} + \ldots\ldots + \frac{A_1}{R^{m-1}} + \frac{A_0}{R^m},$$

di cui il secondo membro decresce incessantemente e passa da un valore infinito a un valor nullo, mentre che si fa crescere R entro i limiti $R=0$, $R=\infty$. Egli è chiaro che se il modulo di z diviene superiore a questa radice, il modulo R^m del primo termine supererà la somma dei moduli di tutte le altre. Dunque l' equazione (248) ammette sempre m radici reali o imaginarie, ciascuna delle quali ha per modulo un numero inferiore o tutto al più eguale alla radice positiva della equazione (254).

Corollario 2.° Siccome il modulo A_0 del termine costante supera la somma dei moduli di tutti gli altri termini, quando il modulo R di z diventa minore della radice positiva unica dell' equazione

$$(255) \qquad A_0 - A_1 R - A_2 R^2 \ldots - A_{m-1} R^{m-1} - R^m = 0,$$

dal teorema 9.° ne segue che tutte le radici della equazione

(248) offrono dei moduli superiori alla radice positiva della equazione (255).

Corollario 3.° allorchè per

$$z = \mathrm{R}, \quad \text{o} \quad z = \mathrm{R}e^{p\sqrt{-1}}$$

il modulo del termine $a_1 z$ supera la somma dei moduli di tutti gli altri, una sola radice dell' equazione (248) offre un modulo inferiore ad R. Questa radice può essere immediatamente determinata con l' ajuto della formola,

$$(256) \qquad z = \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2..n a_1^m} \frac{d^{n-1}(a_0 + a_2 z^2 + \dots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m)^n}{dz^{n-1}}$$

che deducesi dall' equazione (237) in y mettendo invece della funzione $\varpi(z)$ il rapporto

$$(257) \qquad \frac{a_0 + a_2 z^2 + \dots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m}{a_1},$$

e nel quale z rappresenta un numero infinitamente piccolo che devesi ridurre a zero dopo la differenziazione. Aggiungiamo che se si limiti a calcolare gli n primi termini della somma che costituisce il secondo membro della formola (256), l' errore commesso non sarà maggiore del più piccolo dei valori che acquistano le espressioni (120) quando si suppone $c = 2\pi\mathrm{R}$, vale a dire della più piccola delle due quantità

$$(258) \qquad \mathrm{RM}^n \mathrm{L}\left(\frac{1}{1-m}\right), \quad \frac{\mathrm{RM}^n}{n(1-\mathrm{M})}$$

essendo il valore di M

$$(259) \qquad \mathrm{M} = \Lambda \frac{a_0 + a_2 z^{-2} + \dots + a_{m-1} z^{-(m-1)} + z^{-m}}{a_1 z}.$$

A maggior ragione l' errore commesso non supererà i

valori delle espressioni (258) corrispondenti al valore di M determinato dalla formola

$$(260) \qquad M = \frac{A_0 + A_2 R^2 + \ldots + A_{m-1} R^{m-1} + R^m}{A_1 R}.$$

Affinchè la formola (256) sia applicabile alla determinazione di una radice della equazione (248), basta che il più piccolo dei valori di M dedotti dalla formola (259), cioè a dire il modulo principale della funzione (257) sia inferiore all' unità. Del resto quando l' unità è maggiore del valor minimo del rapporto, che forma il secondo membro della formola (260), cioè del valore corrispondente alla radice positiva unica dell' equazione

$$(261) \qquad A_0 = A_2 R^2 + 2 A_3 R^3 + \ldots + (m-1) R^m,$$

può limitarsi a prendere per R la radice di cui trattasi. Per mostrare un' applicazione delle formole precedenti consideriamo in particolare l' equazione

$$(262) \qquad z^5 + 10 z - 1 = 0,$$

siccome in questa equazione il coefficiente 10 della prima potenza di z supera la somma dei valori numerici degli altri coefficienti 1 ed 1, si può affermare che una sola radice offrirà un modulo inferiore all' unità. Per determinare questa radice col mezzo di una serie convergente basterà ricorrere alla formola (256), in cui

$$(263) \qquad z = \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{1.2.3\ldots n} \left(\frac{1}{10}\right)^n \frac{d^{n-1} (1-\varepsilon^5)^n}{d\varepsilon^{n-1}}$$

dalla quale si ricava

$$(264)\qquad z=\frac{1}{10}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^5+\frac{10}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{10}-\frac{15.14}{2.3}\left(\frac{1}{10}\right)^{15}\right.$$

$$\left.+\frac{20.19.18}{2.3.4}\left(\frac{1}{10}\right)^{20}-\ldots\right]$$

e per conseguenza

$$(265)\qquad z=0,0999990000499996500094....$$

D' altronde siccome le formole (259), (260) daranno l' una e l' altra

$$M=\frac{1+R^5}{10R},$$

si potrà prendere per M e per R nelle formole (258) il modulo principale della funzione

$$\frac{1-z^5}{10z}$$

e il valore corrispondente di R, cioè la radice positiva unica dell' equazione (261) ossia

$$1=4R^5.$$

Così si troverà

$$R=\sqrt[5]{\tfrac{1}{4}}=0,\ 7578....\quad \text{e}\quad M=0,\ 1649....$$

Ora il secondo membro della formola (265) essendo il valore approssimato di z che somministra l' equazione (263), quando si trascura nella somma indicata dal segno Σ il termine corrispondente ad $n\pm 26$ e quelli che seguono, l' errore che si commetterà prendendo per z il numero

$$0,0999990000499996500094......$$

composto di ventidue cifre decimali sarà più piccolo della

seconda delle espressioni (258) nella quale il prodotto

$$\frac{0,7578}{26(0,8350....)}(0,16493...)^{26}=(0,0349...)(0,10493...)^{26}.$$

Ora il logaritmo decimale di questo prodotto essendo

$$-22+0,1926....$$

ne risulta che l' errore commesso sarà minore di

$$\frac{1,6.....}{(10)^{22}}.$$

In conseguenza nel secondo membro della formola (265) la 21ª cifra decimale è anche esatta.

Corollario 4.° Allorchè per

$$z=\mathrm{R},\quad \text{o}\quad z=\mathrm{R}e^{-p\sqrt{-1}}$$

il modulo AR^2 del termine $a_2 z^2$ supera la somma dei moduli di tutti gli altri termini, due sole radici dell' equazione (248) offrono dei moduli inferiori ad R. Se si dicano z_1, z_2 queste due radici, la loro somma, e la somma dei loro quadrati potranno essere immediatamente espresse in serie convergenti col mezzo delle formole

$$(266)\quad z_1+z_2=\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{na_2^n}\frac{1}{1.2...(2n-1)}\frac{d^{2n-1}(a_0+a_1\varepsilon+a_3\varepsilon^3+...+a_{m-1}\varepsilon^{m-1}+\varepsilon^m)^n}{d\varepsilon^{2n-1}}$$

$$(267)\quad z_1^2+z_2^2=\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{na_2^n}\frac{2}{1.2..(2n-1)}\frac{d^{2n-1}[\varepsilon(a_0+a_1\varepsilon+a_3\varepsilon^3+..+a_{m-1}\varepsilon^{m-1}+\varepsilon^m)^n]}{d\varepsilon^{2n-1}}$$

che si deducono dalle formole (132), (133) sostituendo alla funzione $\varpi(z)$ il rapporto

$$(268)\qquad \frac{a_0+a_1z+a_3z^3+..+a_{m-1}z^{m-1}+z^m}{a_2z^2},$$

e nelle quali ε rappresenta un numero infinitamente piccolo che deve ridursi a zero dopo la differenziazione. Aggiungiamo che se ci limitiamo a calcolare gli n primi termini delle due somme che costituiscono i secondi membri delle formole (266), (267), l' errore commesso non supererà riguardo alla prima somma il più piccolo dei valori che ricevono le espressioni (120) quando vi si faccia $c=2\pi R$, vale a dire la più piccola delle quantità

$$(269)\qquad RM^nL\left(\frac{1}{1-M}\right),\ \frac{RM^n}{n(1-M)}$$

essendo il valore di M

$$(270)\qquad M=A\frac{a_0+a_1\overline{z}+a_3\overline{z}^3+...+a_{m-1}\overline{z}^{m-1}+\overline{z}^m}{a_2\overline{z}^2},$$

e riguardo alla seconda somma il più piccolo dei valori che acquistano le espressioni (118) quando vi si faccia

$$c=2\pi R;\quad N=A(2\overline{z})=2R$$

cioè a dire la più piccola delle quantità

$$(271)\qquad 2R^2M^nL\left(\frac{1}{(1-M)}\right),\quad \frac{2R^2M^n}{n(1-M)}.$$

A più forte ragione gli errori di cui trattasi, non supereranno i valori che ricevono le espressioni (270), (271) quando si attribuisca ad M il valore determinato dalla formola

$$(272)\qquad M=\frac{A_0+A_1R+A_3R^3+..+A_{m-1}R^{m-1}+R^m}{A_2R^2}.$$

Dopo di aver calcolato con l'ajuto delle equazione (266), (267) le somme $z_1 + z_2$, $z_1^2 + z_2^2$ si determinerà facilmente il valore del prodotto $z_1 z_2$ per mezzo della formola

$$(273) \qquad z_1 z_2 = \frac{(z_1 + z_2)^2 - (z_1^2 + z_2^2)}{2}$$

si conosceranno dunque allora i coefficienti della equazione di secondo grado

$$(274) \qquad z^2 - (z_1 + z_2) z + z_1 z_2 = 0,$$

la soluzione della quale somministrerà immediatamente i valori delle radici z_1, z_2. Osserviamo d'altronde che potrebbesi determinare immediatamente il valore della differenza $z_1 - z_2$ per mezzo della formola

$$(275) \qquad (z_1 - z_2)^2 = 2(z_1^2 + z_2^2) - (z_1 + z_2)^2,$$

e calcolare in seguito z_1, z_2 per mezzo delle due seguenti

$$(276) \qquad \begin{cases} z_1 = \dfrac{z_1 + z_2}{2} + \dfrac{z_1 - z_2}{2} \\ z_2 = \dfrac{z_1 + z_2}{2} - \dfrac{z_1 - z_2}{2}. \end{cases}$$

Affinchè sussistano le formole (266), (267) basta che il più piccolo dei valori di M dedotti dalle formole (270), cioè il modulo principale della funzione (268) sia minore della unità. Del resto quando l' unità supera il valor minimo del rapporto che forma il secondo membro della formola (272), vale a dire il valor corrispondente alla radice positiva unica dell'equazione

$$(277)\qquad \frac{A_0}{R}+A_1=A_3R^2+2A_4R^3+\ldots+(m-3)A_{m-1}R^{m-2}+(m-2)R^{m-1},$$

si potrà limitare a prendere per R la radice di cui trattasi. Per mostrare una applicazione delle formole precedenti consideriamo in particolare l' equazione

$$(278)\qquad z^5+10z^2-1=0.$$

Siccome in questa equazione il coefficiente 10 di z^2 supera la somma dei valori numerici 1, ed 1 degli altri coefficienti, si può accertare che due sole radici z_1, z_2 offriranno dei moduli inferiori all' unità. Per determinare queste radici per mezzo delle serie convergenti basterà ricorrere alle formole (266), (267) nelle quali

$$(279)\qquad \begin{cases} z_1+z_2=\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\dfrac{2}{1.2\ldots(2n-1)\,n}\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^n\dfrac{d^{2n-1}(1-\varepsilon^5)^n}{d\,\varepsilon^{2n-1}} \\ z_1^2+z_2^2=\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\dfrac{4}{1.2\ldots(2n-1)2n}\cdot\left(\dfrac{1}{10}\right)^n\dfrac{d^{2n-1}(\varepsilon(1-\varepsilon^5)^n)}{d\,\varepsilon^{2n-1}} \end{cases}$$

dai quali si ricaverà

$$(280)\qquad \begin{cases} z_1+z_2=-\left(\dfrac{1}{10}\right)^3-\dfrac{7.6}{2.3}\left(\dfrac{1}{10}\right)^8-\dfrac{12.11.10.9}{2.3.4.5}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{13}-\text{ec.} \\ z_1^2+z_2^2=\dfrac{1}{10}+\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{10}\right)^6+\dfrac{10.9.8}{2.3.4}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{11}+\text{ec.} \end{cases}$$

e per conseguenza

$$(281)\qquad \begin{aligned} z_1+z_2&=-0,0010000700099\ldots\ldots \\ z_1^2+z_2^2&=0,1000025003o\ldots\ldots, \end{aligned}$$

si avrà dunque

$$(z_1 - z_2)^2 = 2(z_1^2 + z_2^2) - (z_1 + z_2)^2 = 0,20000400060 \ldots$$

e supponendo $z_1 < z_2$

$$z_1 - z_2 = - 0,447218068284 \ldots, \tag{282}$$

poi si concluderà dalle formole (281), (282) congiunte alle formole (276)

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = - 0,223559030637 \ldots\ldots \\ z_2 = + 0,223659037646 \ldots\ldots \end{array} \right. \tag{283}$$

Per altra parte siccome le formole (270), (272) daranno l'una e l'altra

$$M = \frac{1+R^5}{10R^4}$$

si potrà nelle espressioni (269), (271) prendere per M e per R il modulo principale della frazione

$$\frac{1-z^5}{10z^2}$$

e il valore corrispondente di R vale a dire l' unica radice positiva della equazione (277), ossia

$$1 = 3R^5$$

si troverà così

$$R = \sqrt[5]{\frac{1}{3}} = 0,8027 \ldots, \quad M = 0,2069 \ldots$$

In conseguenza la seconda delle espressioni (271) ed a maggior ragione la seconda delle espressioni (269) non supereranno il prodotto

$$(284) \qquad (0,1625\ldots\ldots) \frac{(0,2069\ldots\ldots)^n}{n}.$$

Ora i secondi membri delle formole (281) sono i valori approssimati che le equazioni (279) somministrano per le quantità $z_1 + z_2$, $z_1^2 + z_2^2$, quando si trascurano nelle somme indicate dal segno Σ i termini corrispondenti ad $n = 16$ e li susseguenti, ed allorchè nel prodotto (284) si fa $n=16$, esso diventa

$$\frac{3,9\ldots}{(10)^{12}}.$$

Dunque nel secondo membro di ciascuna delle formole (281) e in conseguenza nel secondo membro di ciascuna delle formole (283) l' undecima cifra decimale è ancora esatta.

Egli è importante l' osservare che se la fuzione $\underline{f}(z)$ algebraica o trascendente è il prodotto di molti fattori

$$\underline{f}_1(z), \quad \underline{f}_2(z), \ldots.$$

le formole (86), (87) trarranno seco non solamente l'equazione (88) ma ancora la seguente

$$(285) \quad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\underline{f}'(z)}{\underline{f}(z)} \frac{dz}{ds} ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{\underline{f}'_1(z)}{\underline{f}_1(z)} \frac{dz}{ds} ds + \int_{s_0}^{s_1} \frac{\underline{f}'_2(z)}{\underline{f}_2(z)} \frac{dz}{ds} ds \ldots$$

Ciò posto immaginiamo che le variabili reali x, y, e quindi la variabile immaginaria $z = x + y\sqrt{-1}$ essendo espressa in funzione dell' arco s si abbia non solo (53)

$$\underline{f}(z) = \varphi(s) + \sqrt{-1}\,\chi(s),$$

ma ancora

$$(286)\quad \begin{cases} \underline{f}_1(z) = \phi_1(s) + \sqrt{-1}\,\chi_1(s), \\ \underline{f}_2(z) = \phi_2(s) + \sqrt{-1}\,\chi_2(s), \\ \text{ecc.} \end{cases}$$

rappresentando

$$\phi_1(s),\quad \phi_2(s)\ldots\ldots\chi_1(s),\quad \chi_2(s)\ldots\ldots$$

come pure $\phi(s)$, $\chi(s)$ funzioni reali di s. Siano d' altronde z_0 e z_1, i valori di z corrispondenti ad $s = s_0$, ed $s = s_1$. Dalla formola (83) si ricaverà non solamente

$$(287)\quad \int_{s_0}^{s_1} \frac{\underline{f}'(z)}{\underline{f}(z)} \frac{dz}{ds}\, ds = \mathrm{L}[\pm \underline{f}(z_1)] - \mathrm{L}[\pm f(z_0)] - \pi\sqrt{-1}\; I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi(s)}{\phi(s)}\right)\right);$$

ma ancora

$$(288)\quad \begin{cases} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\underline{f}'_1(z)}{\underline{f}_1(z)} \frac{dz}{ds}\, ds = \mathrm{L}[\pm \underline{f}_1(z_1)] - \mathrm{L}[\pm \underline{f}_1(z_0)] - \pi\sqrt{-1}\; I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_1(s)}{\phi_1(s)}\right)\right), \\ \int_{s_0}^{s_1} \frac{\underline{f}'_2(z)}{\underline{f}_2(z)} \frac{dz}{ds}\, ds = \mathrm{L}[\pm \underline{f}_2(z_1)] - \mathrm{L}[\pm \underline{f}_2(z_0)] - \pi\sqrt{-1}\; I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_2(s)}{\phi_2(s)}\right)\right) \\ \text{ecc.}, \end{cases}$$

ed in conseguenza l' equazione (285) darà

$$(289)\qquad L[\pm \underline{f}(z_1)] - L[\pm \underline{f}(z_0)] - \pi\sqrt{-1}\; I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi(s)}{\varphi(s)}\right)\right)$$

$$= L[\pm \underline{f}(z)] + L[\pm \underline{f}_2(z_1)] + \ldots . - L[\pm \underline{f}_1(z_0)]$$

$$- L[\pm \underline{f}_2(z_0)] - \ldots - \pi\sqrt{-1}\left[I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_1(s)}{\varphi_1(s)}\right)\right) + I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_2(s)}{\varphi_2(s)}\right)\right)\right].$$

D' altra parte si caverà dall' equazione (86)

$$(290)\qquad \underline{f}(z_0) = \underline{f}_1(z_0)\,.\,\underline{f}_2(z_0)\ldots\ldots$$

e in conseguenza

$$(291)\qquad L[\pm \underline{f}(z_0)] = L[\pm \underline{f}_1(z_0)] + L[\pm \underline{f}_2(z_0)] + \ldots;$$

purchè la somma

$$(292)\qquad \text{arc. tang.}\frac{\chi_1(s_0)}{\varphi_1(s_0)} + \text{arc. tang.}\frac{\chi_2(s_0)}{\varphi_2(s_0)} + \ldots\ldots$$

resti compresa fra i limiti $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ si troverà parimente

$$(293)\qquad L[\pm \underline{f}(z_0)] = L[\pm \underline{f}_1(z_1)] + L[\pm \underline{f}_2(z_2)] + \ldots..$$

purchè la somma

$$(294)\qquad \text{arc. tang.}\frac{\chi_1(s_0)}{\varphi_1(s_0)} + \text{arc. tang.}\frac{\chi_2(s_1)}{\varphi_2(s_1)} + \ldots.$$

sia pur essa compresa fra i limiti $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$.

Dunque se le somme (292), (294) offrono valori numerici inferiori a $\frac{1}{2}\pi$, l' equazione (287) potrà ridursi a

$$(295)\qquad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi(s)}{\phi(s)}\right)\right)=I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_1(s)}{\phi_1(s)}\right)\right)+I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_2(s)}{\phi_2(s)}\right)\right)+\ldots\ldots$$

Imaginiamo per fissare le idee, che la funzione $\underline{f}(z)$ venendo spezzata in due parti $\Pi(z)$, $\varpi(z)$, si prenda

$$\underline{f}_1(z)=\Pi(z)\ ,\ \underline{f}_2(z)=1+\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\,.$$

Se i valori di $\Pi(z)$ corrispondenti a $z=z_0$, ed a $z=z_1$ sono tutti due reali si avrà

$$\chi_0(s_0)=0,\quad \chi_1(s_1)=0,$$

e in conseguenza ciascuna delle somme (292), (294) essendo ridotta ad un solo termine offrirà un valore numerico più piccolo di $\frac{\pi}{2}$. Se d' altronde la condizione (97) si verifica per i valori di s contenuti fra i limiti $s=s_0$, $s=s_1$ si avrà

$$I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_2(s_1)}{\phi_2(s_1)}\right)\right)=0,$$

e in conseguenza la formola (295) darà

$$(296)\qquad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi(s)}{\phi(s)}\right)\right)=I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\chi_1(s)}{\phi_1(s)}\right)\right)$$

essendo $\phi_1(s)$, $\chi_1(s)$ funzioni reali di s determinate dalla formola

$$(297)\qquad \Pi(z)=\phi_1(s)+\sqrt{-1}\,\chi_1(s).$$

Se essendo la condizione (97) adempita dai valori di s compresi fra i limiti s_0, s_1, i valori di $\Pi(z)$ corrispondenti a questi limiti, non presentassero parti reali, allora sostituendo a

$$f(z)=\varphi(s)+\sqrt{-1}\,\chi(s),\quad f(z)\sqrt{-1}=-\chi(s)+\sqrt{-1}\,\varphi(s),$$

a

$$\Pi(z)=\varphi_1(s)+\sqrt{-1}\,\chi_1(s),\quad \Pi(z)\sqrt{-1}=-\chi_1(s)+\sqrt{-1}\,\varphi_1(s),$$

e sostituendo in conseguenza alle funzioni reali

$$\varphi(s),\quad \chi(s),\quad \varphi_1(s),\quad \chi_1(s),$$

le seguenti

$$-\chi(s),\quad \varphi(s),\quad -\chi_1(s),\quad \varphi_1(s)$$

si otterrebbe invece dell' equazione (296) quest'altra formola

$$(298)\qquad I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\varphi(s)}{\chi(s)}\right)\right)=I_{s_0}^{s_1}\left(\left(\frac{\varphi_1(s)}{\chi_1(s)}\right)\right).$$

Imaginiamo ora che essendo $f(z)$ una funzione intiera di z determinata dalla equazione (247) si prenda

$$(299)\qquad \Pi(z)=z^m,\quad \varpi(z)=a_{m-1}z^{m-1}+\ldots+a_1z+a_0.$$

Il numero μ delle radici che offriranno contemporaneamente i moduli minori di R e delle radici reali positive sarà rappresentato dal secondo membro della formola (175), nella quale si potrà prendere per valore di $\chi(x,y)$ uno qualunque di quelli che somministrano le formole (158), (159), per conseguenza uno qualunque dei due rapporti

$$-\frac{\chi(s)}{\varphi(s)},\quad \frac{\varphi(s)}{\chi(s)}.$$

D' altronde se il modulo R supera la radice positiva unica dell' equazione (254), la condizione (97) si troverà adempiuta da tutti i punti situati sulla circonferenza del circolo descritto dall' origine col raggio R, cioè per tutti i punti corrispondenti a coordinate della forma

$$x = \mathrm{R}\cos.p, \quad y = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}.p.$$

Finalmente egli è chiaro che a quei punti che saranno situati sull' asse delle y corrisponderanno dei valori di z della forma

$$z = -\mathrm{R}\sqrt{-1}, \qquad z = \mathrm{R}\sqrt{-1};$$

in conseguenza valori reali di z^m o valori imaginarj di z^m senza parti reali secondo che m sarà un numero pari o un numero dispari. Dunque in virtù delle formole (296), (298) unite alla formola (175) si avrà primo

$$(300) \qquad \mu = -\tfrac{1}{2} I_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\mathrm{sen}.mp}{\cos.mp}\right)\right) + \tfrac{1}{2} I_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \left(\left(\frac{\chi(0,y)}{\phi(0,y)}\right)\right)$$

se m è numero pari: secondo

$$(301) \qquad \mu = \tfrac{1}{2} I_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\cos.mp}{\mathrm{sen}.mp}\right)\right) - \tfrac{1}{2} I_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \left(\left(\frac{\phi(0,y)}{\chi(0,y)}\right)\right)$$

se m è un numero dispari. Ora nel primo caso si troverà

$$(302) \qquad I_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\mathrm{sen}.mp}{\cos.mp}\right)\right) = -m$$

e nel secondo

$$(303) \qquad I_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\cos.mp}{\mathrm{sen}.mp}\right)\right) = m.$$

Dunque si avrà per dei valori pari di m

$$(304) \qquad \mu = \frac{m}{2} + \tfrac{1}{2} I_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \left(\left(\frac{\chi(0,y)}{\phi(0,y)}\right)\right),$$

e per dei valori dispari di m

$$(305)\qquad \mu = \frac{m}{2} - \frac{1}{2}\, I_{-R}^{R}\left(\left(\frac{\varphi(0,y)}{\chi(0,y)}\right)\right).$$

Tali sono le formole, che per una equazione algebraica di grado pari o dispari determinano il numero delle radici delle quali la parte reale è positiva. Il valore di R che in queste medesime formole superar deve la radice positiva unica della equazione (254) può essere, se si vuole, supposto infinito. Si avrà dunque ancora per dei valori pari di m

$$(306)\qquad \mu = \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\, I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\chi(0,y)}{\varphi(0,y)}\right)\right),$$

e per dei valori dispari di m

$$(307)\qquad \mu = \frac{m}{2} - \frac{1}{2}\, I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\varphi(0,y)}{\chi(0,y)}\right)\right).$$

In queste diverse formole

$$\varphi(0,y), \quad \chi(0,y)$$

sono funzioni reali di y determinate dall' equazione

$$(308)\qquad f(y\sqrt{-1}) = \varphi(0,y) + \sqrt{-1}\,\chi(0,y).$$

Aggiungiamo che dalla formola (197) si ricaverà

$$(309)\qquad I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\chi(0,y}{\varphi(0,y)}\right)\right) + I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\varphi(0,y)}{\chi(0,y)}\right)\right) = \pm 1,$$

dovendosi il doppio segno ridursi al segno + o al segno — secondo che il rapporto

$$\frac{\Phi(0,y)}{\chi(0,y)}$$

sarà positivo o negativo quando $y = \infty$.

Per mezzo di raziocinj simili ai precedenti potrebbesi determinar anche facilmente il numero delle radici della equazione (248), delle quali la parte reale è superiore a un valor dato x_0 della variabile x. Del resto siccome ponendo

$$z = x_0 + u,$$

si stabilisce fra le variabili u e z una relazione tale che la parte reale di u diviene positiva o negativa, secondochè la parte reale di z è maggiore o minore di x_0, egli è chiaro che per ottenere il numero cercato basterà sostituire nella formola (306) o (307) alle due funzioni

$$\varphi(0, y), \qquad \chi(0, y)$$

le seguenti

$$\varphi(x_0, y), \qquad \chi(x_0, y).$$

Dunque il numero μ delle radici della equazione (248) che offriranno delle parti reali maggiori di x_0, sarà per i valori pari di m

$$(310) \qquad \mu = \frac{m}{2} + \frac{1}{2} I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\chi(x_0,y)}{\varphi(x_0,y)}\right)\right),$$

e per i valori dispari di m

$$(311) \qquad \mu = \frac{m}{2} - \frac{1}{2} I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\varphi(x_0,y)}{\chi(x_0,y)}\right)\right).$$

D' altronde si avrà, qualunque sia il numero intiero m,

$$(312) \qquad I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\chi(x_0,y)}{\varphi(x_0,y)}\right)\right) + I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\varphi(x_0,y)}{\chi(x_0,y)}\right)\right) = \pm 1,$$

dovendosi prendere il segno + o il segno — secondo che il rapporto

$$\frac{\varphi(x_0, y)}{\chi(x_0, y)}$$

diverrà positivo o negativo per dei valori infiniti di y. Per mostrare una applicazione delle formole che abbiamo stabilite consideriamo l' equazione del 7.° grado, che il Sig. Fourier ha presa ad esempio nella prima parte del suo trattato di analisi cioè

$$(313) \qquad z^7 - 2z^5 - 3z^3 + 4z^2 - 5z + 6 = 0,$$

e proponghiamoci di trovare il numero μ delle radici che offrono parti reali positive. Questo numero dedotto dalle formole (307), (309) sarà

$$(314) \qquad \mu = 3 + \tfrac{1}{2}\, I_{-\infty}^{\infty} \frac{y(y^6 + 2y^4 - 3y^3 + 5)}{((4y^2 - 6))} = 3 + \tfrac{1}{2}\, I_{-\infty}^{\infty} \frac{y(y^6 + 5)}{((4y^2 - 6))} = 4.$$

Dunque quattro radici offriranno delle parti reali positive, e le tre altre delle parti reali negative. Fra queste ultime si troverà necessariamente una radice reale negativa. Si potrebbe parimente con l' ajuto della formola (311) determinare il numero delle radici della equazione (313), di cui la parte reale non superi un dato valore di x.

In generale se la funzione $\underline{f}(z)$ essendo reale e determinata dalla formola (247) si chiami $\underline{f}_n(x)$ il coefficiente di y^n nello sviluppo della funzione $\underline{f}(x+y)$, per modo che si abbia

$$(315) \qquad \underline{f}(x+y) = \underline{f}(x) + y\underline{f}_1(x) + y^2\underline{f}_2(x) + \ldots + y^{m-1}\underline{f}_{m-1}(x) + y^m$$

si concluderà

$$(316) \qquad \underline{f}(x+y\sqrt{-1}) = \underline{f}(x) + y\sqrt{-1}\,\underline{f}_1(x) - y^2\underline{f}_2(x) + \ldots\ldots$$

$$+ (y\sqrt{-1})^{m-1}\underline{f}_{m-1}(x) + (y\sqrt{-1})^m.$$

In conseguenza si troverà per dei valori pari di m

$$(317)\quad \begin{cases} \varphi(x,y)=[\underline{f}(x)-y^2\underline{f}_2(x)+\ldots\ldots+(-1)]^{\frac{m}{2}}\,y^m \\ \chi(x,y)=y[\underline{f}_1(x)-y^2\underline{f}_3(x)+\ldots\ldots-(-1)^{\frac{m}{2}}\,y^{m-1}\,\underline{f}_{m-1}(x)] \end{cases}$$

E per dei valori dispari di m

$$(318)\quad \begin{cases} \varphi(x,y)=\underline{f}(x)-y^2\underline{f}_2(x)+\ldots\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\,y^{m-1}\,\underline{f}_{m-1}(x) \\ \chi(x,y)=y[\underline{f}_1(x)-y^2\underline{f}_3(x)+\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\,y^{m-1}]\,. \end{cases}$$

Ciò posto se si rappresenta con

$$\underline{f},\ \underline{f}_1,\ \underline{f}_2\ \ldots\ldots\ \underline{f}_{m-1}$$

ciò che diventano le funzioni

$$f(x),\ \underline{f}_1(x),\ \underline{f}_2(x)\ \ldots\ldots\ \underline{f}_{m-1}(x)$$

per un valore dato di x, il numero μ delle radici che offrono parti reali superiori al valore di cui trattasi sarà in virtù delle formole (310), (311), (312) per dei valori pari di m

$$(319)\qquad \mu=\frac{m}{2}-\frac{1}{2}\,I\,\frac{\underline{f}_{m-1}}{((y))}$$

$$+\frac{1}{2}\,I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{y^m-y^{m-2}\underline{f}_{m-2}+y^{m-4}\underline{f}_{m-4}+\ldots\ldots+(-1)^{\frac{m}{2}}\underline{f}}{y(y^{m-2}\underline{f}_{m-1}-y^{m-4}\underline{f}_{m-3}+\ldots\ldots+(-1)^{\frac{m}{2}}\underline{f}}\right)\right)$$

e per dei valori dispari di m

$$(320)\quad \mu=\frac{m}{2}-\frac{1}{2}I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{y^{m-1}\underline{f}_{m-1}-y^{m-3}\underline{f}_{m-3}+\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\underline{f}}{y(y^{m-1}-y^{m-3}\underline{f}_{m-2}+\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\underline{f}_1)}\right)\right);$$

si può d'altronde ridurre la formola (319) alla

$$(321)\quad \mu=\frac{m}{2}-\frac{1}{2}I\frac{\underline{f}_{m-1}}{((y))}-\frac{1}{2}I\frac{\underline{f}}{((y))\underline{f}_1}$$

$$+I_0^{\infty}\frac{y^{\frac{m}{2}}-y^{\frac{m}{2}-1}\underline{f}_{m-2}+\ldots+(-1)^{\frac{m}{2}}\underline{f}}{((y^{\frac{m}{2}-1}\underline{f}_{m-1}-y^{\frac{m}{2}-2}\underline{f}_{m-3}+\ldots+(-1)^{\frac{m}{2}}\underline{f}_1))}$$

e la formola (320) alla

$$(322)\quad \mu=\frac{m}{2}-\frac{1}{2}I\frac{\underline{f}}{((y))\underline{f}_1}$$

$$-I_0^{\infty}\frac{y^{\frac{m-1}{2}}\underline{f}_{m-1}-y^{\frac{m-3}{2}}\underline{f}_{m-3}+\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\underline{f}}{((y^{\frac{m-1}{2}}-y^{\frac{m-3}{2}}\underline{f}_{m-2}+\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\underline{f}_1))}.$$

Ora da queste ultime formole si concluderà attribuendo ad m successivamente i valori particolari 3, 4, 5, 6, 7, che il numero μ delle radici delle quali la parte reale supera il valore dato di x è per una equazione di terzo grado

$$(323)\quad \mu=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}I\frac{\underline{f}}{((y))\underline{f}_1}-I_0^{\infty}\frac{y\underline{f}_2-\underline{f}_1}{((y-\underline{f}_1))},$$

per una equazione di quarto grado

$$(324) \qquad \mu = 2 - \frac{1}{2} I \frac{f_3}{((y))} - \frac{1}{2} I \frac{f}{((y))f_1} + I_0^{\infty} \frac{y^2 - y f_2 + f}{((y f_3 - f_1))},$$

per una equazione di quinto grado

$$(325) \qquad \mu = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} I \frac{f}{((y))f_1} - I_0^{\infty} \frac{y^2 f_4 - y f_2 + f}{((y^2 - y f_3 + f_1))},$$

per una equazione di sesto grado

$$(326) \qquad \mu = 3 - \frac{1}{2} I \frac{f_5}{((y))} - \frac{1}{2} I \frac{f}{((y))f_1} + I_0^{\infty} \frac{y^3 - y^2 f_4 + y f_2 - f}{((y^2 f_5 - y f_3 + f_1))};$$

finalmente per una equazione di settimo grado

$$(327) \qquad \mu = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} I \frac{f}{((y))f_1} - I_0^{\infty} \frac{y^3 f_6 - y^2 f_4 + y f_2 - f}{((y^3 - y^2 f_5 + y f_3 - f_1))};$$

o ciò che torna lo stesso

$$(328) \qquad \mu = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} I \frac{f}{((y))f_1} - \frac{1}{2} I \frac{f_5 f_6 - f_2}{((y))} - \frac{1}{2} I \frac{f_1 f_6 - f}{((y))f_1}$$

$$+ I_0^{\infty} \frac{y^3 - y^2 f_5 + y f_3 \cdot f_1}{((y^2 (f_5 f_6 - f_4) - y (f_3 f_6 - f_2) + f_1 f_6 - f))}.$$

Se si voglia applicare la formola (328) all'equazione (313) si troverà,

$$f(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6,$$

$$f_1(x) = 7x^6 - 10x^4 - 9x^2 + 8x - 5,$$

$$f_2(x) = 21x^5 - 20x^3 - 9x + 4,$$

$$f_3(x) = 35x^4 - 20x^2 - 3,$$

$$f_4(x) = 35x^3 - 10x$$

$$f_5(x) = 21x^2 - 2$$

$$f_6(x) = 7x;$$

si osserverà d' altronde che le diverse radici della equazione (313) devono offrire dei moduli inferiori alla radice positiva unica della equazione

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0 \tag{329}$$

e per conseguenza superando il numero 2 quest' ultima radice, avranno tutte delle parti reali comprese fra i limiti -2, $+2$.

Ora se si faccia successivamente

$$x = -1, \quad x = 0, \quad x = 1$$

si otterrà 1.° dalla formola (328) per $x = -1$.

$$\mu = 5 - I_0^\infty \frac{y^3 - 19y^2 + 12y + 25}{12((9y^2 - 8y - 13))} = 6:$$

2.° dalla formola (327) per $x = 0$

$$\mu = 4 - I_0^\infty \frac{4y - 6}{((y^3 + 2y^2 - 3y + 5))} = 3 + I_0^\infty \frac{y^3 + 5}{2((2y - 3))} = 4.$$

3.° Dalla formola (328) per $x = 1$

$$\mu = 3 + I_0^\infty \frac{y^3 - 19y^2 + 12y + 9}{4((27y^4 - 22y - 16))} = 2.$$

Dunque l'equazione (313) ammetterà una radice reale negativa contenuta fra i limiti -2, -1, e delle altre sei radici, due offriranno delle parti reali negative comprese fra i limiti -1, 0, due offriranno delle parti reali positive comprese fra i limiti 0, 1; finalmente due offriranno delle parti reali positive comprese fra i limiti 1, 2. Ritorniamo ancora all'equazione (248), e supponiamo che il primo membro o la funzione $f(z)$ essendo decomposta in due parti $\Pi(z)$, $\varpi(z)$, si indichi con $z = a$ una delle radici della equazione

$$\Pi(z) = 0\,; \tag{100}$$

se si faccia $z = a + u$, l'equazione (248) diventerà

$$\Pi(a + u) + \varpi(a + u) = 0; \tag{330}$$

se d' altronde per un certo modulo V della variabile imaginaria $\bar{u}$ la condizione

$$\Lambda \frac{\varpi(a + \bar{u})}{\Pi(a + \bar{u})} < 1 \tag{331}$$

si verifichi, il numero delle radici che renderanno il modulo della differenza $z - a$ inferiore ad V sarà lo stesso per l'equazione (248), e (100). Ciò posto ammettiamo che tutte le radici della equazione (100) diverse da a rendano il modulo della differenza $z - a$ superiore ad V, una sola sadice della equaziono (248) sarà della forma

$$a + u$$

essendo il modulo di u inferiore ad V, e questa radice potrà essere sviluppata in serie convergente dalla formola

$$z = a + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \, \mathrm{E}\left(\left(\left(\frac{\varpi(a+u)}{\Pi(a+u)}\right)^n\right)\right) \tag{332}$$

essendo il segno E relativo al solo valore $u=0$ della variabile u: o ciò che torna lo stesso dalla formola

$$z = a + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{n} \, \frac{d^{n-1}\left[\frac{u\varpi(a+u)}{\Pi(a+u)}\right]^n}{du^{n-1}}. \tag{333}$$

Aggiungiamo che se si esprime la variabile u in funzione di un'altra variabile v di modochè abbiasi

$$u = \mathrm{V} \tag{334}$$

rappresentando V una funzione di v, all'equazione (332) potrà sostituirsi la seguente

$$z = a + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2....n} \, \mathrm{E}\left(\left(\left(\frac{\varpi(a+v)}{\Pi(a+v)}\right)^n \frac{d\mathrm{V}}{dv}\right)\right) \tag{335}$$

essendo E il segno relativo al solo valore di v che si ricava mettendo nella formola (334), $u=0$. In quanto all' errore che si commetterà se nelle somme che contengono le formole (332), (333), (335) si trascuri il termine nesimo ed i seguenti esso non sorpasserà il prodotto

$$\frac{\mathrm{VM}^n}{n(1-\mathrm{M})} \tag{336}$$

essendo il valore di M

$$\mathrm{M} = \Lambda \frac{\varpi(a+\overline{u})}{\Pi(a+\overline{\overline{u}})}. \tag{337}$$

Torino, 8 *Agosto* 1832.

Postscriptum. Applicando all'equazione (313) le formole (327), (328), noi abbiamo concluso che questa equazione ammetterà una radice negativa compresa fra i limiti -2, -1 e che delle altre sei radici due solamente offrivano parti reali comprese sia fra i limiti -1, 0, sia fra i limiti 0, 1, sia fra i limiti 1, 2. Se saper si volesse quali sono fra queste ultime radici quelle che restano reali, basterebbe ricorrere alla formola (189). In fatti in virtù di questa formola il numero m delle radici reali della equazione (313) minori di un dato numero X sarà

$$(338)\qquad m = I_{-\infty}^{X} \frac{7x^6-10x^4-9x^2+8x-5}{((x^7-2x^5-3x^3+4x^2-5x+6))},$$

o ciò che torna lo stesso riguardo alla formola (203)

$$(339)\qquad m = I_{-\infty}^{X} \frac{62x^4-70x^3+123x^2-163x+10}{((629x^3-1266x^2+2830x-2933))} + 1$$

$$+\frac{1}{2} l \frac{7X^6-10X^4-9X^2+8X-5}{X^7-2X^5-3X^3+4X^2-5X+6} \cdot \frac{1}{((x))} + \frac{1}{2} l \frac{2X^5+6X^3-10X^2-15X-21}{7X^6-10X^4-9X^2+8X-5} \cdot \frac{1}{((x))}$$

$$+\frac{1}{2} l \frac{62X^4-70X^3+123X^2-163X+10}{2X^5+6X^3-10X^2-15X-21} \cdot \frac{1}{((x))} - \frac{1}{2} l \frac{629X^3-1266X^2+2830X-2933}{62X^4-70X^3+123X^2-163X+10} \cdot \frac{1}{((x))}.$$

D' altronde l' equazione

$$(340)\qquad 629X^3-1266X^2+2830X-2933=0$$

non ha che una sola radice reale atteso che le due radici della derivata sono imaginarie; e questa radice reale minore del numero 2 supera il rapporto $\frac{4}{3}$, la sostituzione del quale in luogo di x rende negativo il primo membro. Ora, siccome questa medesima sostituzione rende positivi li due binomj

$$62x^4-70x^3, \quad 123x^2-163x$$

ne risulta che si avrà

$$(341)\qquad I_{-\infty}^{X}\frac{62x^4-70x^3+123x^2-163x+10}{((629x^3-1266x^2+2830x-2933))}=0,$$

se il numero X è minore della radice positiva della equazione (340); e

$$(342)\qquad I_{-\infty}^{X}\frac{62x^4-70x^3+123x^2-163x+10}{((629x^3-1266x^2+2830x-2933))}=1.$$

nel caso contrario. Dunque se nella formola (339) si ponga successivamente $X=1$, $X=2$, se ne concluderà

$$\text{per } X=1,\quad m=1,\quad \text{e per } X=2,\quad m=3.$$

Dunque l'equaziene (313) ammette solamente tre radici reali, cioè una radice negativa compresa fra i limiti -2, -1, e due radici positive comprese fra i limiti 1 e 2, oppure fra i limiti 1, ed 1,55, a motivo che il polinomio

$$(343)\qquad f(z)=z^7-2z^5-3z^3+4z^2-5z+6$$

che resta positivo per $z=1$, e $z=2$ e diviene negativo per $z=\frac{1+2}{2}=1,5$, riconduce un valor positivo per $z=1,6$ ed anche per $z=\frac{1.5+1.6}{2}=1,55$.

Ciò posto siccome indicando con a una delle tre quantità

$$-2;\quad 1;\quad 1,55$$

e prendendo $\Pi(z)=f(a)$, $\varpi(z)=\underline{f(z)-f(a)}$, basterà attribuire il modulo $\frac{1}{5}$ o $\frac{1}{10}$ alla variabile $u=z-a$ per verificare la condizione (331), così le tre radici reali della equazione (313) potranno essere sviluppate in serie convergenti col mezzo della formola (333) o

$$z = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f''(a)}{2f'(a)} \left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^2 \tag{344}$$

$$- \left[2\left(\frac{f''(a)}{2f'(a)}\right)^2 - \frac{f'''(a)}{6f'(a)} \right] \left(\frac{f(a)}{f'(a)}\right)^3 - \text{ec.}$$

dalla quale si ricaverà per $a = -2$, $z = 1,9625.....$ per $a = 1$, $z = 1,107....$, per $a = 1,55$, $z = 1,5378......$

SOPRA
L'ANALISI LINEARE
PER LA RISOLUZIONE DEI PROBLEMI DI I.° GRADO
MEMORIA I.

DEL SOCIO PROF. GIUSEPPE BIANCHI

Ricevuta adì 3. *Gennajo* 1839.

1. Quanto più riesce all'Analisi di raccogliere, stringer e racchindere in poche verità o principj le varie parti e dottrine della Matematica, tanto più questa Scienza ne acquista di unità o coordinazione, di generalità o ampiezza, e di utilità o applicazione agli usi. Un siffatto intento è stato per molta parte con profondi studi conseguito dai moderni Analisti negli oggetti e nelle trattazioni del calcolo superiore; ma nei rami inferiori di questo, sebbene più facili ad esaminarsi, rimane tuttora a desiderarsi per avventura quà e là una maggiore connessione e generalità di cose, che comprenda ogni maniera di casi e questioni relative, e che inoltre faccia conoscere il legame o il passaggio dalle elementari alle teoriche dell'Algebra le più elevate. Mi è sembrato quindi opera non perduta l'occuparmi di uno degli argomenti più ovvj e semplici, qual è l'analisi lineare, nel quale io non so aver altri mostrato, come da una sola proposizione derivino tutte le indagini e determinazioni particolari spettanti ai problemi di 1.° grado. E tal è il soggetto che io mi propongo di cominciar a svolgere nella presente Memoria.

2. Indichiamo un numero m d'incognite diverse con x_0, x_1, x_2, ec., x_{m-1}; e siano esse vincolate fra loro con m equazioni lineari, come segue

$$(1)\ldots\ldots\begin{cases} a_0 x_0 + b_0 x_1 + c_0 x_2 + \ldots + r_0 x_{m-1} = s_0 \\ a_1 x_0 + b_1 x_1 + c_1 x_2 + \ldots + r_1 x_{m-1} = s_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} x_0 + b_{m-1} x_1 + c_{m-1} x_2 + \text{ec. ec.} + r_{m-1} x_{m-1} = s_{m-1} \end{cases}$$

Io dico ricavarsi da queste equazioni

$$(2)\ldots x_0 = \frac{A}{V}\,;\ x_1 = \frac{B}{V}\,;\ x_2 = \frac{C}{V}\,;\ \text{ec. ec. } x_{m-1} = \frac{R}{V}\,;$$

ove con A, B, C. . . . R, V s' intendano altrettante intere e determinate funzioni dei coefficienti a_0, b_0, ec. s_0, a_1 b_1 ec. s_1 ec. ec. a_{m-1}, b_{m-1} ec. s_{m-1}.

Supponiam infatti che questa proprietà si adempia e sussista nel caso di un numero $m-1$ di simili equazioni e di altrettante incognite. Dalle (1) eliminando la x_0 si hanno le seguenti di numero $m-1$

$$(a_1 b_0 - a_0 b_1)x_1 + (a_1 c_0 - a_0 c_1)x_2 + \text{ec.} + (a_1 r_0 - a_0 r_1)x_{m-1} = a_1 s_0 - a_0 s_1$$
$$\vdots$$
$$(a_{m-1} b_0 - a_0 b_{m-1})x_1 + (a_{m-1} c_0 - a_0 c_{m-1})x_2 + \text{ec.} + (a_{m-1} r_0 - a_0 r_{m-1})x_{m-1}$$
$$= a_{m-1} s_0 - a_0 s_{m-1}.$$

E proseguendo in queste l' eliminazione, se ne traggan dunque per ipotesi i valori

$$x_1 = \frac{B}{V}\,;\ x_2 = \frac{C}{V}\,;\ \text{ec. ec. } x_{m-1} = \frac{R}{V}\,.$$

Sostituiti questi nella prima delle (1), e posto per brevità

$$S = b_0 B + c_0 C + \text{ec. ec.} + r_0 R$$

si ottiene

$$a_0 x_0 + \frac{S}{V} = s_0 \; ; \quad \text{onde} \quad x_0 = \frac{s_0 V - S}{a_0 V}.$$

Ora dal modo, secondo il quale si è formato V ed S, è facile il dedurre che sì l'una che l'altra di queste quantità risulta moltiplicata e divisibile quindi esattamente per a_0. Fatto perciò $\frac{s_0 V - S}{a_0} = A$, ne viene $x_0 = \frac{A}{V}$, ove A e V sono ciascuna funzioni intere dei coefficienti delle (1). Ma tali pure si sono supposte B, C, ec. R: dunque l'enunciata proprietà si adempie altresì per m equazioni ed incognite: cosicchè sussistendo essa, come può verificarsi, nel caso di due equazioni, sussisterà quindi anche nel caso di tre, quindi anche per quattro, e infine per un qualunque numero m di equazioni lineari e d'incognite. In questo semplice teorema tutta si racchiude l'analisi lineare, ed io mi accingo a svilupparnela.

3. Poichè dalla scambievole permutazione degli a nei coefficienti b per le equazioni (1) la x_0 cangiasi nella x_1 e questa in quella, corrispondentemente A dovrà cangiarsi in B e B in A, senza riguardo al segno. Avvertasi però che il comune denominatore V è una funzione di tutti i coefficienti a, b, ec., r la quale nella scambievole permutazione di due qualunque fra essi non mutandosi di assoluta quantità, mutasi nondimeno di segno, come tosto si scorge per due equazioni ed incognite: appartiene cioè V a quelle che l'illustre analista Cauchy denomina funzioni *alternate*, anzi ha la forma della più semplice di esse qual è $a - b$. In conseguenza di che, ritenuto nelle (2) che V abbia sempre lo stesso valore positivo, sotto l'indicata permutazione scambievole A si cangerà propriamente in $-$ B e B in $-$A. Oltre a ciò avendosi identicamente

$$s_0 V = a_0 A + b_0 B + c_0 C + \text{ec.} + r_0 R$$

se ne deduce

$$(3) \qquad V = \frac{a_0 A + b_0 B + c_0 C + \text{ec.} + r_0 R}{s_0}$$

E quì si osservi che, dipendentemente dal modo praticato in formarlo, il denominatore V non contiene alcuno dei termini s_0, s_1, ec. s_{m-1}; cosicchè tai termini contenendosi in ciascuno dei numeratori A, B, C ec. R, nella funzione $a_0 A + b_0 B +$ ec. $+ r_0 R$ dovranno elidersi da sè i termini affetti da s_1, s_2 ec., s_{m-1} e solo vi resterà, come fattore dell'intera quantità, s_0. Quanto infine ai numeratori A, B, ec. R, scorgesi facilmente che ciascun d'essi cangiasi in V, senza mutazione di segno, solo dal permutarsi li s_0, s_1, s_2, ec. s_{m-1} in una specie dei coefficienti a_0, b_0, ec. r_0; e che nell'inversa permutazione V cangerebbesi rispettivamente in uno di quelli. E per esempio V si cangerà in A, sostituendo nel primo s_0, s_1, ec. s_{m-1} in luogo rispettivamente di a_0, a_1, ec. a_{m-1}; oppure in B, surrogando s_0, s_1, ec. s_{m-1} a b_0, b_1, ec. b_{m-1}; e così via discorrendo.

4. Date pertanto le m equazioni lineari colle m incognite diverse x_0, x_1 ec. x_{m-1}; fino a che i noti coefficienti a_0, b_0 ec. r_0, s_0; a_1 ec. ec. non avranno particolari valori e saranno affatto indipendenti fra loro, si otterrà sempre dall'eliminazione ciascuna incognita, e sussisteranno le (2), in cui A, B, C, ec. R, V sono quantità generali bensì o algebriche, ma pienamente determinate. Sotto questa condizione e in questo punto di vista ci si offre generalmente e propriamente l'analisi dei problemi determinati di 1.° grado. Ma quando pure si abbiano m incognite e altrettante equazioni diverse di 1.° grado fra esse, dipendentemente dai particolari valori dei coefficienti numerici e dalle relazioni che ne risultano, può accadere uno de' seguenti casi: 1.° che i rapporti $\frac{A}{V}$, $\frac{B}{V}$, ec. conservino

ciascuno un valor finito e determinato, nel qual caso l'analisi e il problema saranno bensì determinati, ma particolarmente: 2.° che una o più delle quantità A, B, ec., R diventi nulla; e allora insieme annullandosi una o più delle incognite, e rimanendo lo stesso numero m di equazioni, quindi maggiore di quello delle altre incognite, per queste l' analisi e il problema sarà piucchè determinato. Perciò inversamente un problema piucchè determinato può riguardarsi in generale come un caso di analisi determinata, ove fra m incognite un numero m' di esse abbia per ciascuna il valore zero; e perchè in particolare la soluzione sia possibile e tutte le m equazioni fra le $m-m'$ incognite siano soddisfatte, e non si contraddicano a vicenda, è necessario che fra i coefficienti a_0, b_0 ec. r_0, s_0, a_1 ec. ec. sussistano le m' relazioni $A=0$, $B=0$, ec. ec: 3.° che A, B, C, ec., R conservando tutte e ciascuna un valor finito, si trovi invece $V=0$; nel qual caso ciascuna delle incognite ha la forma $\frac{A}{0}$, e significa l'impossibilità del problema per tutte le incognite a un tempo. E tale è l' espressione della quantità immaginaria semplice o di primo grado; vale a dir essa è costituita nella forma che appellasi dell' infinito, la quale offre in sè l'assurdo e la contraddizione di un rapporto che non può come tale sussistere; poichè non può aversi relazione calcolabile se non fra cose della medesima natura; ed essendo A di una data specie qualunque, astratta o concreta, lo zero non è di alcuna specie, nè concreta nè astratta: 4.° che insieme a $V=0$, si abbia $A=0$, $B=0$, ec., onde ciascuna delle incognite prenda la forma $\frac{0}{0}$; e dovranno prenderla tutte a un tempo; affinchè per una delle A, B, ec. R che non fosse $=0$, il problema non sia impossibile, come nel caso 3.° precedente. E in questo caso di tutte le incognite eguali ciascuna a $\frac{0}{0}$ si ha propriamente e generalmente a rivolgere l'analisi indeterminata dei

problemi lineari. Quindi l' analisi indeterminata è anch' essa un caso particolare dell' analisi determinata; e così, pei problemi di 1.° grado, tutto si riduce a considerar un numero di equazioni eguale a quello delle incognite, coll' unica distinzione, dal determinato generale agli altri casi, che i coefficienti numerici delle m equazioni sieno fra loro indipendenti, oppure vincolati da relazioni particolari. Ora veniamo allo sviluppo dell' analisi lineare nei differenti casi avvertiti, limitandoci colla Memoria presente alla parte dei problemi determinati e piucchè determinati.

§ I.

Analisi lineare determinata.

5. Tutta l' arte del calcolo per la determinazione di m incognite da m equazioni di 1.° grado, a coefficienti sciolti e indipendenti fra loro, consiste, per l'eliminazione e per le cose premesse, nella formazione di una solamente fra le quantità A, B, ec., R: perocchè trovata una di queste, se ne deduce di seguito ciascun' altra mediante la rispettiva e vicendevole permutazione di alcuni dei coefficienti a_0, b_0, ec. r_0, a_1, ec. fra loro, cangiato il segno a calcolo finito, e se ne ha dipoi V per la (3), ovvero dalla permutazione reciproca degli a negli s per la sola A, o dei b negli s per la sola B, o analogamente per ciascun' altra (num. 3.). Posto ciò ed eliminata dalle (1) la x_0, nelle $m-1$ equazioni che ne derivano indichiamo per brevità i coefficienti di esse con $\overset{a}{b}_0$, $\overset{a}{c}_0$, $\overset{a}{d}_0$, ec. $\overset{a}{s}_0$, $\overset{a}{b}_1$, ec.; onde abbiasi

$$\overset{a}{b}_{0} x_{1} + \overset{a}{c}_{0} x_{2} + \overset{a}{d}_{0} x_{3} + \text{ecc.} + \overset{a}{r}_{0} x_{m-1} = \overset{a}{s}_{0}$$

$$\overset{a}{b}_{1} x_{1} + \overset{a}{c}_{1} x_{2} + \overset{a}{d}_{1} x_{3} + \text{ecc.} + \overset{a}{r}_{1} x_{m-1} = \overset{a}{s}_{1}$$

$$\vdots$$

$$\overset{a}{b}_{m-2} x_{1} + \overset{a}{c}_{m-2} x_{2} + \overset{a}{d}_{m-2} x_{3} + \text{ec.} + \overset{a}{r}_{m-2} x_{m-1} = \overset{a}{s}_{m-2}.$$

Del pari eliminando x_1 dalle precedenti $m-1$, e chiamando $\overset{b}{c}_{0}$, $\overset{b}{d}_{0}$, ec. $\overset{b}{s}_{0}$, $\overset{b}{c}_{1}$ ec. ec. i nuovi coefficienti delle risultanti $m-2$ equazioni, si avrà

$$\overset{b}{c}_{0} x_{2} + \overset{b}{d}_{0} x_{3} + \text{ec.} + \overset{b}{r}_{0} x_{m-1} = \overset{b}{s}_{0}$$

$$\overset{b}{c}_{1} x_{2} + \overset{b}{d}_{1} x_{3} + \text{ec.} + \overset{b}{r}_{1} x_{m-1} = \overset{b}{s}_{1}$$

$$\vdots$$

$$\overset{b}{c}_{m-3} x_{2} + \overset{b}{d}_{m-3} x_{3} + \text{ec.} + \overset{b}{r}_{m-3} x_{m-1} = \overset{b}{s}_{m-3}.$$

E così proseguendo a eliminar successivamente le incognite, e indicando i coefficienti successivi con $\overset{c}{d}_{0}$, ec., $\overset{c}{s}_{0}$, $\overset{c}{d}_{1}$ ec; $\overset{d}{e}_{0}$, ec. $\overset{d}{s}_{0}$, $\overset{d}{e}_{1}$, ec. ec., si arriverà infine all'equazione

$$\overset{q}{r}_{0} x_{m-1} = \overset{q}{s}_{0}:$$

quindi sarà

$$\text{(4)} \qquad R = \overset{q}{s}_{0}; \quad V = \overset{q}{r}_{0}$$

e le m incognite ne verranno tutte determinate. Non trattasi

dunque più se non di formare coi coefficienti primitivi a_0, b_0, ec. s_0, a_1, ec. ecc. il valore di $\overset{q}{s}_0$.

6. Per meglio conoscere la composizione del valor precedente di R, osserviamo quella dei successivi termini $\overset{a}{s}_{m-2}$, $\overset{b}{s}_{m-3}$, ec. ec. Si ha pertanto, dopo le sostituzioni e riduzioni opportune,

$$\overset{a}{s}_{m-2} = a_{m-1} s_0 - s_{m-1} a_0;$$

$$\overset{b}{s}_{m-3} = (a_1 \overset{a}{b}_{m-2} - a_{m-1} \overset{a}{b}_0) s_0 - (s_1 \overset{a}{b}_{m-2} - s_{m-1} \overset{a}{b}_0) a_0;$$

$$\begin{aligned}\overset{c}{s}_{m-4} = {} & (a_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_{m-3} - a_1 \overset{a}{b}_{m-2} \overset{b}{c}_0 - a_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_{m-3} + a_{m-1} \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0) s_0 \\ & - (s_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_{m-3} - s_1 \overset{a}{b}_{m-2} \overset{b}{c}_0 - s_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_{m-3} + s_{m-1} \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0) a_0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overset{d}{s}_{m-5} = {} & \left\{\begin{aligned} & a_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_1 \overset{c}{d}_{m-4} - a_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_{m-3} \overset{c}{d}_0 - a_1 \overset{a}{b}_2 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_{m-4} \\ & + a_1 \overset{a}{b}_{m-2} \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_0 - a_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_1 \overset{c}{d}_{m-4} + a_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_{m-3} \overset{c}{d}_0 \\ & + a_3 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_{m-4} - a_{m-1} \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_0 \end{aligned}\right\} s_0 \\ & - \left\{\begin{aligned} & s_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_1 \overset{c}{d}_{m-4} - s_1 \overset{a}{b}_1 \overset{b}{c}_{m-3} \overset{c}{d}_0 - s_1 \overset{a}{b}_2 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_{m-4} \\ & + s_1 \overset{a}{b}_{m-2} \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_0 - s_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_1 \overset{c}{d}_{m-4} + s_2 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_{m-3} \overset{c}{d}_0 \\ & + s_3 \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_{m-4} - s_{m-1} \overset{a}{b}_0 \overset{b}{c}_0 \overset{c}{d}_0 \end{aligned}\right\} a_0;\end{aligned} \tag{5}$$

$$
\overset{e}{s}_{m-6}=\left(\begin{aligned}
&\overset{a}{a}_1\overset{b}{b}_1\overset{c}{c}_1\overset{d}{d}_1 e_{m-5}-\overset{a}{a}_1\overset{b}{b}_1\overset{c}{c}_1\overset{d}{d}_{m-4} e_0-\overset{a}{a}_1\overset{b}{b}_1\overset{c}{c}_2\overset{d}{d}_0 e_{m-5}\\
&+\overset{a}{a}_1\overset{b}{b}_1\overset{c}{c}_{m-3}\overset{d}{d}_0 e_0-\overset{a}{a}_1\overset{b}{b}_2\overset{c}{c}_0\overset{d}{d}_1 e_{m-5}+\overset{a}{a}_1\overset{b}{b}_2\overset{c}{c}_0\overset{d}{d}_{m-4} e_0\\
&+\overset{a}{a}_1\overset{b}{b}_3\overset{c}{c}_0\overset{d}{d}_0 e_{m-5}-\overset{a}{a}_1\overset{b}{b}_{m-2}\overset{c}{c}_0\overset{d}{d}_0 e_0-\overset{a}{a}_2\overset{b}{b}_0\overset{c}{c}_1\overset{d}{d}_1 e_{m-5}\\
&+\overset{a}{a}_2\overset{b}{b}_0\overset{c}{c}_1\overset{d}{d}_{m-4} e_0+\overset{a}{a}_2\overset{b}{b}_0\overset{c}{c}_2\overset{d}{d}_0 e_{m-5}-\overset{a}{a}_2\overset{b}{b}_0\overset{c}{c}_{m-3}\overset{d}{d}_0 e_0\\
&+\overset{a}{a}_3\overset{b}{b}_0\overset{c}{c}_0\overset{d}{d}_1 e_{m-5}-\overset{a}{a}_3\overset{b}{b}_0\overset{c}{c}_0\overset{d}{d}_{m-4} e_0-\overset{a}{a}_4\overset{b}{b}_0\overset{c}{c}_0\overset{d}{d}_0 e_{m-5}\\
&+\overset{a}{a}_{m-1}\overset{b}{b}_0\overset{c}{c}_0\overset{d}{d}_0 e_0
\end{aligned}\right) s_0
$$

$$
-\left(\begin{aligned}
&\overset{a}{s}_1\overset{b}{b}_1\overset{c}{c}_1\overset{d}{d}_1 e_{m-5}-\overset{a}{s}_1\overset{b}{b}_1\overset{c}{c}_1\overset{d}{d}_{m-4} e_0-\overset{a}{s}_1\overset{b}{b}_1\overset{c}{c}_2\overset{d}{d}_0 e_{m-5}\\
&+\overset{a}{s}_1\overset{b}{b}_1\overset{c}{c}_{m-3}\overset{d}{d}_0 e_0-\overset{a}{s}_1\overset{b}{b}_2\overset{c}{c}_0\overset{d}{d}_1 e_{m-5}+\overset{a}{s}_1\overset{b}{b}_2\overset{c}{c}_0\overset{d}{d}_{m-4} e_0\\
&+\overset{a}{s}_1\overset{b}{b}_3\overset{c}{c}_0\overset{d}{d}_0 e_{m-5}-\overset{a}{s}_1\overset{b}{b}_{m-2}\overset{c}{c}_0\overset{d}{d}_0 e_0-\overset{a}{s}_2\overset{b}{b}_0\overset{c}{c}_1\overset{d}{d}_1 e_{m-5}\\
&+\overset{a}{s}_2\overset{b}{b}_0\overset{c}{c}_1\overset{d}{d}_{m-4} e_0+\overset{a}{s}_2\overset{b}{b}_0\overset{c}{c}_2\overset{d}{d}_0 e_{m-5}-\overset{a}{s}_2\overset{b}{b}_0\overset{c}{c}_{m-3}\overset{d}{d}_0 e_0\\
&+\overset{a}{s}_3\overset{b}{b}_0\overset{c}{c}_0\overset{d}{d}_1 e_{m-5}-\overset{a}{s}_3\overset{b}{b}_0\overset{c}{c}_0\overset{d}{d}_{m-4} e_0-\overset{a}{s}_4\overset{b}{b}_0\overset{c}{c}_0\overset{d}{d}_0 e_{m-5}\\
&+\overset{a}{s}_{m-1}\overset{b}{b}_0\overset{c}{c}_0\overset{d}{d}_0 e_0
\end{aligned}\right) a_0;
$$

e così di seguito. Si concepisce tosto come derivino e si compongano similmente le une dalle altre le funzioni $\overset{a}{s}$, $\overset{b}{s}$, $\overset{c}{s}$, $\overset{d}{s}$, $\overset{e}{s}$ ec., e ordinando l'ultimo sviluppo quì esposto secondo

i coefficienti s ed a, facilmente se ne ravviserebbe la formazione successiva nel numero, nei segni e nella singola specie dei termini, ciascun de' quali è di m dimensioni nella funzione $s_0^q = R$. Più semplicemente però e più presto si scorge la formazione medesima nel modo che segue.

7. Pongasi

$$(6) \qquad R = X_0^a s_0 - Y_0^s a_0$$

indicando con X_0^a la funzione degli a e con Y_0^s la funzione degli s nel valore di R. Con $X_0^{(a,s)}$ rappresentisi la X_0^a, ove siano permutati gli a negli s, e del pari con $Y_0^{(s,a)}$ la funzione Y_0^s permutando in essa gli s negli a rispettivamente. Si ha

$$(7) \qquad X_0^{(a,s)} = Y_0^s, \quad \text{ovvero} \quad Y_0^{(s,a)} = X_0^a.$$

Pongasi ancora.... $X_0^a = X_1^{b^a} a_1 - Y_1^a b_0^a$, ove $X_1^{b^a}$ indica una funzione di b_1^a, b_2^a, ec., b_{m-2}^a, e Y_1^a una funzione di a_2, a_3, ec, a_{m-1}; e sia quì pure $X_1^{(b_1^a, a_2)}$ la funzione $X_1^{b^a}$ permutati entro essa b_1^a in a_2, b_2^a in a_3, ec., b_{m-2}^a in a_{m-1}, e $Y_1^{(a_2, b_1^a)}$ la funzione Y_1^a nella quale si permuti a_2 in b_1^a, a_3 in b_2^a, ec., a_{m-1} in b_{m-2}^a. Si avrà

$$X_1^{(b_1^a, a_2)} = Y_1^a, \quad \text{ovvero} \quad Y_1^{(a_2, b_1^a)} = X_1^{b^a}.$$

Facciasi di nuovo.... $X_1^{b^a} = X_2^{c^b} b_1^a - Y_2^{b^a} c_0^b$, intendendo per $X_2^{c^b}$ una

funzione di c^b_1, c^b_2, ec. c^b_{m-3} e per $Y_2^{b^a}$ una funzione di b^a_2, b^a_3, ec. b^a_{m-2}; e sia $X_2^{(c^b_1,\, b^a_2)}$ la funzione $X_2^{c^b}$ allorchè in essa cangiasi c^b_1 in b^a_2, c^b_2 in b^a_3 ec. c^b_{m-3} in b^a_{m-2}, significata l'inversa operazione in $Y_2^{b^a}$ con $Y_2^{(b^a_2,\, c^b_1)}$. Sarà

$$X_2^{(c^b_1,\, b^a_2)} = Y_2^{b^a}, \quad \text{ovvero} \quad Y_2^{(b^a_2,\, c^b_1)} = X_2^{c^b}.$$

Parimente posto $X_2^{c^b} = X_3^{d^c} c^b_1 - Y_3^{c^b} d^c_0$, colle simili permutazioni si ottiene

$$X_3^{(d^c_1,\, c^b_2)} = Y_3^{c^b}, \quad \text{ovvero} \quad Y_3^{(c^b_2,\, d^c_1)} = X_3^{d^c}.$$

E similmente fatto $X_3^{d^c} = X_4^{e^d} d^c_1 - Y_4^{d^c} e^d_0$, si ha

$$X_4^{(e^d_1,\, d^c_2)} = Y_4^{d^c}, \quad \text{ovvero} \quad Y_4^{(d^c_2,\, e^d_1)} = X_4^{e^d};$$

e così di seguito. Pertanto, sostituendo le poste funzioni successivamente nella (6), avremo

$$)\quad R = X^{a}_{0}\, s_{0} - Y^{s}_{0}\, a_{0} = X^{a}_{0}\, s_{0} - X^{(a,s)}_{0}\, a_{0}$$

$$= \left(X^{b^a}_{1}\, a_{1} - Y^{a}_{1}\, b^{a}_{0}\right) s_{0} - X^{(a,s)}_{0}\, a_{0} = (X^{b^c}_{1}\, a_{1} - X^{(b^a_1, a_2)}_{1}\, b^{a}_{0}) s_{0} - X^{(a,s)}_{0}\, a_{0}$$

$$= \left((X^{c^b}_{2}\, b^{a}_{1} - Y^{b^a}_{2}\, c^{b}_{0}) a_{1} - X^{(b^a_1, a_2)}_{1}\, b^{a}_{0}\right) s_{0} - X^{(a,s)}_{0}\, a_{0}$$

$$= \left((X^{c^b}_{2}\, b^{a}_{1} - X^{(c^b_1, b^a_2)}_{2}\, c^{b}_{0}) a_{1} - X^{(b^a_1, a_2)}_{1}\, b^{a}_{0}\right) s_{0} - X^{(a,s)}_{0}\, a_{0}$$

$$= \left(((X^{d^c}_{3}\, c^{b}_{1} - Y^{c^b}_{3}\, d^{c}_{0}) b^{a}_{1} - X^{(c^b_1, b^a_2)}_{2}\, c^{b}_{0}) a_{1} - X^{(b^a_1, a_2)}_{1}\, b^{a}_{0}\right) s_{0} - X^{(a,s)}_{0}\, a_{0}$$

$$= \left(((X^{d^c}_{3}\, c^{b}_{1} - X^{(d^c_1, c^b_2)}_{3}\, d^{c}_{0}) b^{a}_{1} - X^{(c^b_1, b^a_2)}_{2}\, c^{b}_{0}) a_{1} - X^{(b^a_1, a_2)}_{1}\, b^{a}_{0}\right) s_{0}$$

$$- X^{(a,s)}_{0}\, a_{0}$$

$$= \left((((X^{e^d}_{4}\, d^{c}_{1} - X^{(c^d_1, d^c_2)}_{4}\, e^{d}_{0}) c^{b}_{1} - X^{(d^c_1, c^b_2)}_{3}\, d^{c}_{0}) b^{a}_{1} - X^{(c^b_1, b^a_2)}_{2}\, c^{b}_{0}) a_{1}\right.$$

$$\vdots \qquad \left. - X^{(b^a_1, a_2)}_{1}\, b^{a}_{0}\right) s_{0} - X^{(a,s)}_{0}\, a_{0}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$= \left(\ldots(((X^{q^p}_{m-2}\, p^{n}_{1} - X^{(q^p_1, p^n_2)}_{m-2}\, q^{p}_{0}) n^{l}_{1} - X^{(q^p_1, n^l_2)}_{m-3}\, p^{n}_{0}) l^{i}_{1} - \text{ec.}\right) s_{0}$$

$$- X^{(a,s)}_{0}\, a_{0} = s^{q}_{0}.$$

8. È manifesta di quì la legge, onde formasi s^{q}_{0} ossia R.

Imperocchè risalendo al primo dall' ultimo precedente valore di R, si ha tosto e semplicemente

$$(9) \qquad X_{m-2}^{q^p} = q_1^p; \quad X_{m-2}^{(q_1^p, p_2^n)} = p_2^n$$

e poscia facilmente si troverà

$$X_{m-3}^{(p_1^n, n_2^l)} = n_2^l q_1^p - n_3^l q_0^p;$$

$$X_{m-4}^{(n_2^l, l_2^i)} = (l_2^i p_1^n - l_3^i p_0^n) q_1^p - (l_2^i p_2^n - l_4^i p_0^n) q_0^p;$$

$$X_{m-5}^{(l_1^i, i_2^k)} = \left[(i_2^k n_1^l - i_3^k n_0^l) p_1^n - (i_2^k n_2^l - i_4^k n_0^l) p_0^n\right] q_1^p$$

$$- \left[(i_2^k n_1^l - i_3^k n_0^l) p_2^n - (i_2^k n_3^l - i_5^k n_0^l) p_0^n\right] q_0^p;$$

e così di mano in mano, fino a $X_1^{(b_1^a, a_2)}$, supposto che i coefficienti dell' incognite nell' equazione (1) s' indichino per ordine, dall'ultimo al primo, colle lettere r, q, p, n, l, i, k ec. Se pongasi ad esempio $m = 6$, si avrà

$$(10) \qquad R = \left((((X_4^{e^d} d_1^c - X_4^{(e_1^d, d_2^c)} e_0^d) c_1^b - \text{ec.}\right) s_0 - X_0^{(a,s)} a_0^e = s_0^e$$

e colle sostituzioni successive di $e_{e\,1}^d$ per $X_4^{e^d}$, di d_2^c per $X_4^{(e_1^d, d_2^c)}$ ec., se ne ricaverà il valore (5) di s_{m-6} antecedentemente sviluppato e in cui facciasi $m = 6$. E quì osserviamo che il primo elemento, a così dire, di R e del valore dell' incognita x_{m-1}, è la quantità q_1^p, risultandone da immediata e semplice per-

mutazione il secondo p^{n}_{2}, e con regolare andamento i termini o elementi consecutivi. Ma la proprietà essenziale o caratteristica della soluzione di un problema lineare determinato si è la forma stessa $Xs_0 - Ya_0$ di R, e consiste nella derivazione per semplice permutazione di Y da X, di una metà dei termini di X dall'altra, e così via discorrendo; lo che però è naturale conseguenza del metodo usato di eliminazione.

9. Resta che determiniamo i valori delle quantità compendiate $\overset{a}{b}$, $\overset{b}{c}$, $\overset{c}{d}$, ec., espressi pei coefficienti a_0, b_0, c_0, ec., r_0, a_1 ec. ec. dell'equazioni (1). Osserviamo perciò che si ha dall'eliminazione

$$\overset{a}{b}_0 = a_1 b_0 - b_1 a_0; \qquad \overset{b}{c}_0 = c_0 \overset{a}{b}_1 - \overset{a}{b}_0 \overset{a}{c}_1;$$

$$\overset{a}{b}_1 = a_2 b_0 - b_2 a_0; \qquad \overset{b}{c}_1 = c_0 \overset{a}{b}_2 - \overset{a}{b}_0 \overset{a}{c}_2;$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\overset{a}{b}_{m-2} = a_{m-1} b_0 - b_{m-1} a_0; \qquad \overset{b}{c}_{m-3} = \overset{a}{c}_0 \overset{a}{b}_{m-2} - \overset{a}{b}_0 \overset{a}{c}_{m-2};$$

$$\overset{c}{d}_0 = \overset{b}{d}_0 \overset{b}{c}_1 - \overset{b}{c}_0 \overset{b}{d}_1; \text{ ec.}$$

$$\overset{c}{d}_1 = \overset{b}{d}_0 \overset{b}{c}_2 - \overset{b}{c}_0 \overset{b}{d}_2; \text{ ec.}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\overset{c}{d}_{m-4} = \overset{b}{d}_0 \overset{b}{c}_{m-3} - \overset{b}{c}_0 \overset{b}{d}_{m-3}; \text{ec.}$$

e osserviamo pure che dalle $\overset{a}{b}_0$, $\overset{a}{b}_1$, ec. si deducono rispettivamente le $\overset{a}{c}_0$, $\overset{a}{c}_1$, ec., permutando nelle prime b in c; e parimente le $\overset{b}{d}_0$, $\overset{b}{d}_1$ ec. derivano dalle $\overset{b}{c}_0$, $\overset{b}{c}_1$ ec. permutando in

queste le c in d, e così di seguito. Quindi tutto il problema si risolve nella forma e nel valore delle funzioni b_0^a, b_1^a, ec. Pongasi per brevità

$$b_0^a = a_1 b_0 - b_1 a_0 = (a, b)$$

$$c_0^a = a_1 c_0 - c_1 a_0 = (a, c)$$

$$c_0^b = b_1 c_0 - c_1 b_0 = (b, c)$$

ec. ec.

Si ha da queste relazioni

$$(11) \qquad (a, b) = -(b, a); \quad (b, c) = -(c, b); \text{ ec.}$$

ed inoltre fra otto coefficienti a_0, b_0, c_0, d_0, a_1, ec. sussistono le formole di semplificazione o riduzione

$$(12) \qquad \begin{aligned} (a,b)(c,d) + (b,c)(a,d) &= (a,c)(b,d) \\ (b,a)(c,d) + (c,b)(a,d) &= (c,a)(b,d) \\ (a,b)(d,c) + (b,c)(d,a) &= (a,c)(d,b) \\ (b,a)(d,c) + (c,b)(d,a) &= (c,a)(d,b) \\ (b,a)(d,c) + (b,c)(a,d) &= (a,c)(b,d) \\ (a,b)(c,d) + (c,b)(d,a) &= (a,c)(b,d) \end{aligned}$$

delle quali avverandosi identicamente o per se la prima, le altre ne vengono per le (11). Similmente per abbreviazione pongasi

$$(13)\quad \begin{array}{l}(c,d)b_2 - (b,d)c_2 + (b,c)d_2 = (b,c,d)\\[1ex] (c,d)a_2 - (a,d)c_2 + (a,c)d_2 = (a,c,d)\\[1ex] \text{ec.}\quad \text{ec.}\quad \text{ec.}\quad \text{ec.}\end{array}$$

le quali potrebbero anche scriversi con segni tutti positivi nel modo seguente

$$\begin{array}{l}(c,d)b_2 + (d,b)c_2 + (b,c)d_2 = (b,c,d)\\[1ex] (c,d)a_2 + (d,a)c_2 + (a,c)d_2 = (a,c,d)\\[1ex] \text{ec.}\quad \text{ec.}\quad \text{ec.}\quad \text{ec.}\end{array}$$

ove nel 1.° membro ciascun termine deriva dal precedente con ordine e concatenazione costante di lettere; ma torna più comodo attenersi ai segni alternati e alla forma delle (13). In quest' ultima posizione di quantità si effettuano pure le seguenti permutazioni e relazioni

$$(14)\quad +(b,c,d) = +(c,d,b) = +(d,b,c) = -(d,c,b) = -(b,d,c) = -(c,b,d)$$
$$\text{ec.}\qquad \text{ec.}\qquad \text{ec.}\qquad \text{ec.}\qquad \text{ec.}$$

e si vedrà essere ancora

$$(15)\quad \begin{array}{l}(a,c,d)(b,c,e) - (a,c,e)(b,c,d) = +(a,b,c)(c,d,e)\\[1ex] (a,b,e)(b,c,d) - (a,b,d)(b,c,e) = +(a,b,c)(e,d,b)\\[1ex] (a,b,e)(a,c,d) - (a,b,d)(a,c,e) = -(a,b,c)(a,d,e)\\[1ex] \text{ec.}\qquad \text{ec.}\qquad \text{ec.}\end{array}$$

delle quali una sussistendo e avverandosi per sè, le altre ne derivan per le (14). Più oltre si faccia

$$(16)\quad \begin{aligned} &(c,d,e)b_3-(b,d,e)c_3+(b,c,e)d_3-(b,c,d)e_3=(b,c,d,e)\\ &(c,d,e)a_3-(a,d,e)c_3+(a,c,e)d_3-(a,c,d)e_3=(a,c,d\cdot e) \end{aligned}$$

ec. ec. ec. ec.

Similmente

$$(17)\quad (c,d,e.f)b_4-(b,d,e.f)c_4+(b,c,e.f)d_4-(b,c,d.f)e_4+(b,c,d,e)f_4 =(b,c,d,e,f)$$

e così successivamente; adempiendosi poi anche nelle (16), (17), ec. proprietà o relazioni analoghe alle (11) e (12), (14), e (15).

10. Si ha ora e si trova dalle premesse considerazioni e formole

$$a_{m-1}=a_{m-1}$$

$$\overset{a}{b}_{m-2}=b_0\,a_{m-1}-b_{m-1}\,a_0$$

$$\overset{b}{c}_{m-3}=[(b,c)a_{m-1}-(a,c)b_{m-1}+(a,b)c_{m-1}]\,a_0$$

$$(18)\quad \overset{c}{d}_{m-4}=[(b,c,d)a_{m-1}-(a,c,d)b_{m-1}+(a,b,d)c_{m-1} -(a,b,c)d_{m-1}](a,b)a^2_0$$

$$\overset{d}{e}_{m-5}=[(b,c,d,e,)a_{m-1}-(a,c,d,e)b_{m-1}+(a,b,d,e)c_{m-1} -(a,b,c,e)d_{m-1}+(a,b,c,d)e_{m-1}](a,b,c)(a,b)^2a^4_0\,.$$

ec. ec. ec.

È manifesta la formazione progressiva o la legge di questi valori che possono continuarsi fin all' ultimo coefficiente r delle incognite nelle date equazioni. Riguardo ai valori $\overset{a}{b}_0$, $\overset{a}{b}_1$, ec.

c_0^b, c_1^b, ec., essi contengonsi nei precedenti (18), in questi bastando porre, in luogo di m rispettivamente, gl' indici 1, 2, 3 ec., e avvertendo che nei secondi membri non si cangiano fuorchè a_{m-1}, b_{m-1}, c_{m-1} ec.; onde sarà per esempio

$$e_0^d=[(b,c,d,e)a_4-(a,c,d,e)b_4+(a,b,d,e)c_4-(a,b,c,e)d_4$$

$$+(a,b,c,d)e_4](a,b,c,)(a,b)^2a_0{}^4=(a,b,c,d,e)(a,b,c)(a,b)^2a_0{}^4.$$

Quindi ancora, essendo r_0, q_0, p_0, n_0, l_0 ec. gli ultimi coefficienti delle incognite, avremo

$$r_0^q=[(b,c,d,\text{ec.},r)a_{m-1}-(a,c,d,\text{ec.},r)b_{m-1}+\text{ec.}\dots$$

$$(19)\quad \pm(a,b,c,\text{ec.}q)r_{m-1}](a,b,c,\dots p)(a,b,c,\dots l)^2\dots(a,b)^{2^{m-4}}a_0^{2^{m-3}}$$

$$=(a,b,c,\dots r)(a,b,c,\dots p)(a,b,c,\dots l)^2(\dots(a,b)^{2^{m-4}}a_0^{2^{m-3}}.$$

valendo nello sviluppo del primo fattore di r_0^q il segno + dell' ultimo termine per m dispari e il — per m pari e non ammettendo le potenze negative del 2 nei fattori susseguenti. Così abbiam eziandio immediatamente ottenuto il valore di V, denominator comune delle incognite, attesa la (4).

11. Trovati i valori di R e V, formiam ora quelli di A, B, ec. Q; onde ne sia esplicitamente determinata ciascuna incognita, e ciò (come si disse num. 3) mediante le reciproche permutazioni dei coefficienti a_0, b_0, ec. A tal uopo richiamiamo il valore (8) di R; ed essendo indifferente che la prima incognita dell' equazioni (1) a sinistra sia piuttosto la x_0 che una delle altre x_1, x_2, ec., supponiam che prima diventi successivamente la x_1, la x_2 ec. Ritenuto nel resto l'ordine delle

precedenti operazioni si avrà

$$(20)\qquad \begin{aligned} R &= X_0^a s_0 - X_0^{(a,s)} a_0 \\ &= X_1^b s_0 - X_1^{(b,s)} b_0 \\ &= X_2^c s_0 - X_2^{(c,s)} c_0 \\ &\;\vdots \qquad\qquad \vdots \\ &= X_{m-2}^q s_0 - X_{m-2}^{(q,s)} q_0 \end{aligned}$$

denotando con X_1^b, X_2^c, ec. X_{m-2}^q quello che diviene X_0^a col permutar successivamente a_0 in b_0, in c_0, ec., in q_0 e inversamente. Dagli $m-1$ valori di R, permutando in essi ciascuna successivamente delle a_0, b_0, ec. q_0 in r_0, ciascuna delle a_1, b_1, ec. q_1 in r_1, ec. e viceversa, risulteranno i valori di $-$A, $-$B, ec. $-$Q; onde sarà

$$(21)\qquad \begin{aligned} A &= -X_0^r s_0 + X_0^{(r,s)} r_0 \\ B &= -X_1^r s_0 + X_1^{(r,s)} r_0 \\ C &= -X_2^r s_0 + X_2^{(r,s)} r_0 \\ &\;\vdots \qquad\qquad \vdots \\ Q &= -X_{m-2}^r s_0 + X_{m-2}^{(r,s)} r_0 \\ R &= +X_0^a s_0 - X_0^{(a,s)} a_0 . \end{aligned}$$

Ora essendo $Vs_0 = Aa_0 + Bb_0 + Cc_0 +$ ec. $+ Rr_0$, e i termini s non contenendosi nè in V, nè in alcuna delle funzioni X^r_0, X^r_1, ec., X^a_0, dovrà identicamente sussistere l' equazione

$$(22)\quad X^{(r,s)}_0 a_0 + X^{(r,s)}_1 b_0 + X^{(r,s)}_2 c_0 + \text{ec.} + X^{(r,s)}_{m-2} q_0 - X^{(a,s)}_0 a_0 = 0$$

e resterà più semplicemente

$$(23)\qquad V = X^a_0 r_0 - (X^r_0 a_0 + X^r_1 b_0 + X^r_2 c_0 + \text{ec.} + X^r_{m-2} q_0),$$

altra espressione del valore di V che in fondo è la stessa delle (3), (4) e (19), e riuscir deve una funzione alternata dei coefficienti a_0, b_0, ec. r_0, a_1, ec.

12. Nel fin quì esposto e nelle precedenti formole tutta si raccoglie la generalità e lo sviluppo dell'Analisi lineare determinata, poichè, senza ammettere particolari valori e relazioni dei termini s_0, s_1 ec. e dei coefficienti a_0, b_0, ec. r_0, a_1 ec. delle incognite, uguali in numero alle equazioni (1), abbiam trovato ed espresso il valore di ciascuna incognita. Niuno, ch' io sappia, degli Autori e Trattati di Algebra elementare, offre tale generalità e sviluppo sino a formarne il valor esplicito dell' una o dell' altra di m incognite dedotto da m equazioni di 1.° grado. Il Cramer aveva bensì ravvisata nell' equazioni lineari a qualunque numero d'incognite la regola generale per formar il valore di ciascuna d'esse coi dati loro coefficienti, e stabilì ben anche le avvertenze circa i segni dei termini che costituiscono il numeratore e il denominatore di quella; ma egli non fondò questa regola che su la semplice induzione, dall' osservare cioè la forma del valor delle incognite nel caso che il numero m sia di due o tre

soltanto (*). Per la risoluzione di simili equazioni Eulero segue il metodo di eliminazione che dicesi di *confronto*, e consiste nell' uguagliar fra loro successivamente i valori di una stessa incognita ricavati dall'equazioni diverse; ma sebbene un tal metodo possa praticarsi, qualunque sia il numero delle incognite, ove nondimeno sia questo maggiore di tre, avverte il medesimo Eulero che l' usar di quello esiggerebbe calcoli grandemente prolissi, e propone perciò di ricorrere ne' casi particolari ad artificj e mezzi di abbreviamento, de' quali egli era sì fecondo ed elegante inventore (**). Non trascura il Ruffini di spiegar il metodo di eliminazione e giovasi all' uopo degli apici per facilitare colle permutazioni la deduzione del valore di un' incognita da quello di un' altra; su di che anzi egli aggiunge una regola pratica per formar immediatamente il valore di ciascuna incognita, risparmiandosene il processo e la fatica dell'eliminazione: ma questa regola eziandio diviene assai complicata e brigosa oltre il numero tre delle incognite, onde l'Autore si limitò a indicarla nei primi casi di due e di tre incognite (***). Frattanto l'esimio Geometra Cauchy, cui tanto deve l' analisi moderna in ogni parte, dalla più elementare alla più trascendente, ha proposto e dimostrato un metodo elegantissimo, col quale il valore di una qualunque delle m incognite dell' equazioni (1) formasi per un semplice cangiamento di algoritmo, e senza bisogno alcuno di eliminazione. Il qual metodo per avventura non essendo a tutti noto, io mi reco a pregio di qui riferirlo brevemente.

13. Si consideri la più semplice delle funzioni alternate in riguardo ai numeri a, b, c, ec., r e chiamata Π tale funzione, sia perciò

$$24) \qquad \Pi=(b,a)(c-a)(c-b)\ldots\ldots\times(q-a)(q-b)(q-c)\ldots.(q-r).$$

(*) V. Introdution à l'analyse des lignes courbes. Appendice. Note 1.re pag. 658.

(**) Elemens d'Algèbre, par Euler, trad. de l'Allemand. T. I. §. 615.

(***) Ruffini. Algebra elementare. pag. 97.

Eseguito il prodotto del 2.° membro, se ne ha un polinomio, ciascun termine del quale ha la forma $a^{0} b^{1} c^{2} \ldots . q^{m-2} r^{m-1}$; variando però ne' diversi termini l' esponente di ciascuna lettera fra o ed $m-1$, e distruggendosi a due a due i termini per la permutazione reciproca di due lettere in uno di essi e non nell' altro. Se ora gli esponenti si cangino in apici, ovvero in indici situati al basso di ciascuna lettera, e si chiami Δ quello che allora diviene la funzione Π, sarà Δ un aggregato di termini della forma $a_{0} b_{1} c_{2} \ldots . r_{m-1}$, che avrà le stesse proprietà di Π relativamente alla permutazione delle lettere. E vorrà dire, per natura delle funzioni alternate, che se in tutti i termini della Δ permutasi una delle lettere in un' altra senza vicendevolmente permutarvi questa in quella, necessariamente ne verrà $\Delta=0$. Facciasi

$$(25) \qquad \Delta = A_{0} a_{0} + A_{1} a_{1} + A_{2} a_{2} + \text{ec.} + A_{m-1} a_{m-1}$$

e quindi

$$A_{0} b_{0} + A_{1} b_{1} + A_{2} b_{2} + \text{ec.} + A_{m-1} b_{m-1} = 0$$

$$(26) \qquad A_{0} c_{0} + A_{1} c_{1} + A_{2} c_{2} + \text{ec.} + A_{m-1} c_{m-1} = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$A_{0} r_{0} + A_{1} r_{1} + A_{2} r_{2} + \text{ec.} + A_{m-1} r_{m-1} = 0$$

ognuna delle quali sussiste identicamente. Ora moltiplicata la prima delle (1) per A_{0}, la seconda per A_{1}, ec., l' ultima per A_{m-1}, e sommando insieme tutti i prodotti, in conseguenza delle (25) e (26) si ottiene

$$\Delta x_{0} = A_{0} s_{0} + A_{1} s_{1} + \text{ec.} + A_{m-1} s_{m-1},$$

e perciò

$$(27) \qquad x_0 = \frac{A_0 s_0 + A_1 s_1 + \text{ec.} + A_{m-1} s_{m-1}}{\Delta},$$

ove il numeratore non è altro che Δ, cangiati in questo soltanto gli a negli s, come indica la (25). Poichè dunque si ha Δ, effettuando il prodotto (24), e a prodotto eseguito sostituendo gl' indici 0, 1, 2,... $m-1$ agli esponenti della stessa cifra, potrà il valore di x_0 rappresentarsi come segue:

$$(28) \qquad x_0 = \frac{(b-s)(c-s)(c-b)\ldots(q-s)(q-b)(q-c)\ldots(q-r)}{(b-a)(c-a)(c-b)..(q-a)(q-b)(q-c)..(q-r)}$$

e questo chiama il Cauchy un valor simbolico dell'incognita, non sussistendo esso difatti se non colle accennate condizioni (*). E dopo ciò sarà facile il persuadersi che la funzione Δ secondo il Cauchy non è altro che il comune denominatore delle incognite avvertito da Cramer e la quantità V semplificata della mia soluzione: se non che formar dovendosi questa Δ o V dall' aggregato dei termini, di numero 1.2.3.... m, secondo tutte le situazioni degl'indici 0, 1, 2. . . . , $m-1$ in uno di essi, come $a_0\, b_1\, c_2 \ldots . r_{m-1}$, e di più richiedendosi una speciale avvertenza sul segno di ciascun termine, mi sembra che nell'effettiva e pratica soluzione dei problemi tornar possa più spedita ed esente da sbagli la composizione del valor delle incognite nel modo per me dichiarato. Proponiamocene ad esempio la risoluzione di sei equazioni che richiederebbe di calcolar nel polinomio Δ settecento e venti termini; il qual esempio potrà servire in Astronomia nel caso che abbiansi, per opposizioni osservate, le sei equazioni lineari fra le cercate correzioni agli elementi elittici di un pianeta.

14. Siano dunque le equazioni proposte

(*) V. Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique 1.re partie. Ch. III. pag. 77. . 81. et la Note IV pag. 521.

$$a_0 x_0 + b_0 x_1 + c_0 x_2 + d_0 x_3 + e_0 x_4 + f_0 x_5 = s_0$$
$$a_1 x_0 + b_1 x_1 + c_1 x_2 + d_1 x_3 + e_1 x_4 + f_1 x_5 = s_1$$
$$a_2 x_0 + b_2 x_1 + c_2 x_2 + d_2 x_3 + e_2 x_4 + f_2 x_5 = s_2$$
$$a_3 x_0 + b_3 x_1 + c_3 x_2 + d_3 x_3 + e_3 x_4 + f_3 x_5 = s_3$$
$$a_4 x_0 + b_4 x_1 + c_4 x_2 + d_4 x_3 + e_4 x_4 + f_4 x_5 = s_4$$
$$a_5 x_0 + b_5 x_1 + c_5 x_2 + d_5 x_3 + e_5 x_4 + f_5 x_5 = s_5$$

Prepariamo le quantità come segue

$$(a,b) = a_1 b_0 - a_0 b_1$$
$$(a,c) = a_1 c_0 - a_0 c_1$$
$$(a,d) = a_1 d_0 - a_0 d_1$$
$$(a,e) = a_1 e_0 - a_0 e_1$$
$$(a,f) = a_1 f_0 - a_0 f_1$$
$$(b,c) = b_1 c_0 - b_0 c_1$$
$$(b,d) = b_1 d_0 - b_0 d_1$$
$$(29) \qquad (b,e) = b_1 e_0 - b_0 e_1$$
$$(b,f) = b_1 f_0 - b_0 f_1$$
$$(c,d) = c_1 d_0 - c_0 d_1$$
$$(c,e) = c_1 e_0 - c_0 e_1$$
$$(c,f) = c_1 f_0 - c_0 f_1$$
$$(d,e) = d_1 e_0 - d_0 e_1$$
$$(d,f) = d_1 f_0 - d_0 f_1$$
$$(e,f) = e_1 f_0 - e_0 f_1$$

$$
\begin{aligned}
(a,b,c) &= (b,c)a_2 - (a,c)b_2 + (a,b)c_2 \\
(a,b,d) &= (b,d)a_2 - (a,d)b_2 + (a,b)d_2 \\
(a,b,e) &= (b,e)a_2 - (a,e)b_2 + (a,b)e_2 \\
(a,b,f) &= (b,f)a_2 - (a,f)b_2 + (a,b)f_2 \\
(a,c,d) &= (c,d)a_2 - (a,d)c_2 + (a,c)d_2 \\
(a,c,e) &= (c,e)a_2 - (a,e)c_2 + (a,c)e_2 \\
(a,c,f) &= (c,f)a_2 - (a,f)c_2 + (a,c)f_2 \\
(a,d,e) &= (d,e)a_2 - (a,e)d_2 + (a,d)e_2 \\
(a,d,f) &= (d,f)a_2 - (a,f)d_2 + (a,d)f_2 \\
(30) \qquad (a,e,f) &= (e,f)a_2 - (a,f)e_2 + (a,e)f_2 \\
(b,c,d) &= (c,d)b_2 - (b,d)c_2 + (b,c)d_2 \\
(b,c,e) &= (c,e)b_2 - (b,e)c_2 + (b,c)e_2 \\
(b,c,f) &= (c,f)b_2 - (b,f)c_2 + (b,c)f_2 \\
(b,d,e) &= (d,e)b_2 - (b,e)d_2 + (b,d)e_2 \\
(b,d,f) &= (d,f)b_2 - (b,f)d_2 + (b,d)f_2 \\
(b,e,f) &= (e,f)b_2 - (b,f)e_2 + (b,e)f_2 \\
(c,d,e) &= (d,e)c_2 - (c,e)d_2 + (c,d)e_2 \\
(c,d,f) &= (d,f)c_2 - (c,f)d_2 + (c,d)f_2 \\
(c,e,f) &= (e,f)c_2 - (c,f)e_2 + (c,e)f_2 \\
(d,e,f) &= (e,f)d_2 - (d,f)e_2 + (d,e)f_2
\end{aligned}
$$

$$(a,b,c,d)=(b,c,d)a_3-(a,c,d)b_3+(a,b,d)c_3-(a,b,c)d_3$$

$$(a,b,c,e)=(b,c,e)a_3-(a,c,e)b_3+(a,b,e)c_3-(a,b,c)e_3$$

$$(a,b,c,f)=(b,c,f)a_3-(a,c,f)b_3+(a,b,f)c_3-(a,b,c)f_3$$

$$(a,b,d,e)=(b,d,e)a_3-(a,d,e)b_3+(a,b,e)d_3-(a,b,d)e_3$$

$$(a,b,d,f)=(b,d,f)a_3-(a,d,f)b_3+(a,b,f)d_3-(a,b,d)f_3$$

$$(a,b,e,f)=(b,e,f)a_3-(a,e,f)b_3+(a,b,f)e_3-(a,b,e)f_3$$

$$(a,c,d,e)=(c,d,e)a_3-(a,d,e)c_3+(a,c,e)d_3-(a,c,d)e_3$$

$$(a,c,d,f)=(c,d,f)a_3-(a,d,f)c_3+(a,c,f)d_3-(a,c,d)f_3 \tag{31}$$

$$(a,c,e,f)=(c,e,f)a_3-(a,e,f)c_3+(a,c,f)e_3-(a,c,e)f_3$$

$$(a,d,e,f)=(d,e,f)a_3-(a,e,f)d_3+(a,d,f)e_3-(a,d,e)f_3$$

$$(b,c,d,e)=(c,d,e)b_3-(b,d,e)c_3+(b,c,e)d_3-(b,c,d)e_3$$

$$(b,c,d,f)=(c,d,f)b_3-(b,d,f)c_3+(b,c,f)d_3-(b,c,d)f_3$$

$$(b,c,e,f)=(c,e,f)b_3-(b,e,f)c_3+(b,c,f)e_3-(b,c,e)f_3$$

$$(b,d,e,f)=(d,e,f)b_3-(b,e,f)d_3+(b,d,f)e_3-(b,d,e)f_3$$

$$(c,d,e,f)=(d,e,f)c_3-(c,e,f)d_3+(c,d,f)e_3-(c,d,e)f_3$$

$$(a,b,c,d,e) = (b,c,d,e)a_4 - (a,c,d,e)b_4 + (a,b,d,e)c_4$$
$$- (a,b,c,e)d_4 + (a,b,c,d)e_4$$
$$(a,b,c,d,f) = (b,c,d,f)a_4 - (a,c,d,f)b_4 + (a,b,d,f)c_4$$
$$- (a,b,c,f)d_4 + (a,b,c,d)f_4$$
$$(a,b,c,e,f) = (b,c,e,f)a_4 - (a,c,e,f)b_4 + (a,b,e,f)c_4$$
$$- (a,b,c,f)e_4 + (a,b,c,e)f_4$$
$$(32) \qquad (a,b,d,e,f) = (b,d,e,f)a_4 - (a,d,e,f)b_4 + (a,b,e,f)d_4$$
$$- (a,b,d,f)e_4 + (a,b,d,e)f_4$$
$$(a,c,d,ef) = (c,d,e,f)a_4 - (a,d,e,f)c_4 + (a,c,e,f)d_4$$
$$- (a,c,d,f)e_4 + (a,c,d,e)f_4$$
$$(b,c,d,e,f) = (c,d,e,f)b_4 - (b,d,e,f)c_4 + (b,c,e,f)d_4$$
$$- (b,c,d,f)e_4 + (b,c,d,e)f_4 .$$

Con questi valori si otterrà

$$b^a_0 = a_1 b_0 - a_0 b_1$$
$$b^a_1 = a_2 b_0 - a_0 b_2$$
$$(33) \qquad b^a_2 = a_3 b_0 - a_0 b_3$$
$$b^a_3 = a_4 b_0 - a_0 b_4$$
$$b^a_4 = a_5 b_0 - a_0 b_5$$

(34)
$$c_0^b=[(b,c)a_2-(a,c)b_2+(a,b)c_2]\,a_0$$
$$c_1^b=[(b,c)a_3-(a,c)b_3+(a,b)c_3]\,a_0$$
$$c_2^b=[(b,c)a_4-(a,c)b_4+(a,b)c_4]\,a_0$$
$$c_3^b=[(b,c)a_5-(a,c)b_5+(a,b)c_5]\,a_0$$

(36)
$$d_0^c=[(b,c,d)a_3-(a,c,d)b_3+(a,b,d)c_3-(a,b,c)d_3](a,b)a_0^2$$
$$d_1^c=[(b,c,d)a_4-(a,c,d)b_4+(a,b,d)c_4-(a,b,c)d_4](a,b)a_0^2$$
$$d_2^c=[(b,c,d)a_5-(a,c,d)b_5+(a,b,d)c_5-(a,b,c)d_5](a,b)a_0^2$$

(36)
$$e_0^d=[(b,c,d,e)a_4-(a,c,d,e)b_4+(a,b,d,e)c_4-(a,b,c,e)d_4+(a,b,c,d)e_4](a,b,c)(a,b)^2a_0^4$$
$$e_1^d=[(b,c,d,e)a_5-(a,c,d,e)b_5+(a,b,d,e)c_5-(a,b,c,e)d_5+(a,b,c,d)e_5](a,b,c)(a,b)^2a_0^4$$

e finalmente

(37)
$$f_0^e=[(b,c,d,e,f)a_5-(a,c,d,e,f)b_5+(a,b,d,e,f)c_5-(a,b,c,e,f)d_5+(a,b,c,d,f)e_5-(a,b,c,d,e)f_5](a,b,c,d)(a,b,c)^2(a,b)^4a_0^8$$
$$=(a,b,c,d,e,f)(a,b,c,d)(a,b,c)^2(a,b)^4a_0^8=\mathrm{V}.$$

Dalla quale, permutando gli f negli s, ricavasi

$$s_0^e = [(b,c,d,e,s)a_5 - (a,c,d,e,s)b_5 + (a,b,d,e,s)c_5 - (a,b,c,e,s)d_5$$

$$(38) \qquad + (a,b,c,d,s)e_5 - (a,b,c,d,e)s_5](a,b,c,d)(a,b,c)^2(a,b)^4 a_0^8$$

$$= (a,b,c,d,e,s)(a,b,c,d)(a,b,c)^2(a,b)^4 a_0^8 = \mathrm{F},$$

onde

$$(39) \qquad x_5 = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{V}} = \frac{(a,b,c,d,e,s)}{(a,b,c,d,e,f)}.$$

Per la scomparsa del comune fattore $(a,b,c,d)(a,b,c)^2(a,b)^4 a_0^8$ il valore così ottenuto di x_5 è ridotto algebraicamente a' minimi termini; e perciò nelle applicazioni particolari o numeriche gioverà sempre di anteporlo al risultamento dell'eliminazione ordinaria, quando il numero delle incognite sia maggiore di tre. Dal medesimo valore, mediante le reciproche permutazioni di f in e, in d, ec., in a, si ricaveranno quelli delle altre incognite x_4, x_3, ec., e, ponendo attenzione ai segni, si troverà facilmente in questo modo

$$x_4 = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{V}} = -\frac{(a,b,c,d,f,s)}{(a,b,c,d,e,f)}; \quad x_3 = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{V}} = \frac{(a,b,c,e,f,s)}{(a,b,c,d,e,f)};$$

$$(40) \qquad x_2 = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = -\frac{(a,b,d,e,f,s)}{(a,b,c,d,e,f)}; \quad x_1 = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{V}} = \frac{(a,c,d,e,f,s)}{(a,b,c,d,e,f)};$$

$$x_0 = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} = -\frac{(b,c,d,e,f,s)}{(a,b,c,d,e,f)}.$$

15. È chiara di presente la regola e operazione più semplice da seguirsi per comporre i cercati valori (39) e (40). Nascono questi e si formano come viene indicato dalle (37) e (38), le quali derivano e si compongono successivamente dalle (29), (30), (31) e (32). Si comincierà quindi il calcolo dalle quindici formole (29), che sono il fondamento delle altre, e ciascuna delle quali entra quattro volte nelle (30), corrispon-

dentemente per esempio ai prodotti della (a,b) per c_2, d_2, e_2, f_2. Ciascuna similmente delle (30) ripetesi tre volte nelle (31), corrispondentemente ai prodotti di una, come (a,b,c), per ognuno dei coefficienti d_3, e_3, f_3. E del pari ciascuna delle (31) si ripete due volte nelle (32), contemplandosi in queste i due prodotti di (a,b,c) per e_4, f_4. Da tutto ciò si riconosce il modo per giungere speditamente alla formazione e al valore delle sei incognite. Il numero dei termini da calcolarsi nelle (29), (30), (31) e (32) è in tutto di cent'ottanta, val a dire la quarta parte di quello che richiederebbesi per comporre distintamente ciascuno dei prodotti $a_0 b_1 c_2 d_3 e_4 f_5$ costituenti la nostra V, o la Δ del Cauchy.

16. Concludiamo dalle precedenti considerazioni che in generale si ha il valore delle m incognite dell' equazioni (1) espresso per le formule

$$x_{m-1} = \frac{(a,b,c,\text{ec.}q,s)}{(a,b,c,\text{ec.}q,r)}; \quad x_{m-2} = -\frac{(a,b,c,\text{ec.}p,r,s)}{(a,b,c.\text{ec.}q,r)}; \text{ ec. ec.}$$

$$x_0 = \pm \frac{(b,c,\text{ec.}q,r,s)}{(a,b,c,\text{ec.}q,r)}$$

valendo nell' ultima il segno + per m dispari e il — per m pari. Questa forma o rappresentazione parmi la più semplice che possa darsi, non occorrendo che di scrivere i coefficienti coll' ordine alfabetico progressivo; e lo sviluppo di tal forma, sino ad averne il valor esplicito e determinato di ciascuna incognita, procede sempre a un modo, nè richiede altre avvertenze fuorchè di conservar i segni alternativamente + e — ai termini successivi, e di scendere gradatamente dagl' indici più elevati agl' inferiori. Nel caso per esempio di tre sole incognite x_0, x_1, x_2, ritenuti i coefficienti a, b, c, s come sopra, si ha

$$x_2 = \frac{(a,b,s)}{(a,b,c)}; \quad x_1 = -\frac{(a,c,s)}{(a,b,c)}; \quad x_0 = \frac{(b,c,s)}{(a,b,c)}$$

e sviluppando

$$x_2 = \frac{(b,s)a_2 - (a,s)b_2 + (a,b)s_2}{(b,c)a_2 - (a,c)b_2 + (a,b)c_2}$$

$$x_1 = - \frac{(c,s)a_2 - (a,s)c_2 + (b,c)s_2}{(b,c)a_2 - (a,c)b_2 + (a,b)c_2}$$

$$x_0 = \frac{(c,s)b_2 - (b,s)c_2 + (b,c)s_2}{(b,c)a_2 - (a;c)b_2 + (a,b)c_2}$$

e in fine

$$x_2 = \frac{(b_1 s_0 - b_0 s_1) a_2 - (a_1 s_0 - a_0 s_1) b_2 + (a_1 b_0 - a_0 b_1) s_2}{(b_1 c_0 - b_0 c_1) a_2 - (a_1 c_0 - a_0 c_1) b_2 + (a_1 b_0 - a_0 b_1) c_2}$$

$$x_1 = - \frac{(c_1 s_0 - c_0 s_1) a_2 - (a_1 s_0 - a_0 s_1) c_2 + (b_1 c_0 - b_0 c_1) s_2}{(b_1 c_0 - b_0 c_1) a_2 - (a_1 c_0 - a_0 c_1) b_2 + (a_1 b_0 - a_0 b_1) c_2}$$

$$x_0 = \frac{(c_1 s_0 - c_0 s_1) b_2 - (b_1 s_0 - b_0 s_1) c_2 + (b_1 c_0 - b_0 c_1) s_2}{(b_1 c_0 - b_0 c_1) a_2 - (a_1 c_0 - a_0 c_1) b_2 + (a_1 b_0 - a_0 b_1) c_2}.$$

Questi ultimi sono i precisi valori che si trovano mediante l' eliminazione; ma essi ci sono quì scaturiti da una forma e proprietà che è generale.

17. Tale è dunque la soluzione generale, completa ed esplicita dei problemi lineari determinati. Per un solo caso particolare supponiamo i coefficienti di una delle incognite uguali rispettivamente al termine noto dell' equazioni (1); e sia per esempio

$$r_0 = s_0;\quad r_1 = s_1;\quad r_2 = s_2;\ \text{ec.}\ r_{m-1} = s_{m-1}.$$

Ne viene di conseguenza (num. 7.)

$$\overset{r}{X}_0 = \overset{(r,s)}{X}_0;\quad \overset{r}{X}_1 = \overset{(r,s)}{X}_1;\quad \overset{r}{X}_2 = \overset{(r,s)}{X}_2;\ \text{ec. ec.}$$

Richiamate quindi le (21), (22) e (23), da esse tosto si deduce V=R, e ciascuno degli altri numeratori A, B, C, ec., Q eguale a zero; per lo che sarà

$$x_{m-1}=1 \quad \text{e} \quad x_0=x_1=x_2 \ldots = x_{m-2}=0.$$

E già, dall' essere in questo caso $x_{m-1}=1$, si conchiuderebbe anche altramente dover annullarsi ciascuna delle altre incognite; poichè le equazioni (1) riducendosi pel supposto alle

$$a_0\, x_0+b_0\, x_1+c_0\, x_2+\text{ecc.}+q_0\, x_{m-2}=0$$

$$a_1\, x_0+b_1\, x_1+c_1\, x_2+\text{ecc.}+q_1\, x_{m-2}=0$$

ec. ec. ec. ec.

queste non posson sussistere per valori liberi e qualunque siano dei coefficienti a_0, b_0, ec., a meno che non sia $x_0=0$; $x_1=0$; $x_2=0$; ec. Divise dunque le equazioni (1), ciascuna rispettivamente pel suo termine noto, e riuscendone qualunque ogni rapporto $\frac{a_0}{s_0}$, $\frac{b_0}{s_0}$, ec., si ha la proprietà che le equazioni

$$a'_0\, x_0+b'_0\, x_1+c'_0\, x_2+\text{ec.}+x_{m-1}=1$$

$$a'_1\, x_0+b'_1\, x_1+c'_1\, x_2+\text{ec.}+x_{m-1}=1$$

$$\vdots$$

$$a'_{m-1}\, x_0+b'_{m-1}\, x_1+c'_{m-1}\, x_2+\text{ec.}+x_{m-1}=1$$

riduconsi necessariamente alla sola $x_{m-1}=1$.

§. II.

Analisi lineare piucchè determinata.

18. Abbiansi m equazioni, $m-m'$ incognite. Queste determinate da un numero $m-m'$ di quelle, se gli ottenuti valori delle incognite sostituiti nelle restanti m' equazioni le rendano identicamente soddisfatte, il problema sarà possibile e risoluto: in caso diverso il problema è assurdo e impossibile. Quindi, o un numero m' di condizioni del problema piucchè determinato risulta identico alle altre $m-m'$ condizioni, e perciò inutile, o le m' condizioni contraddicono alle $m-m'$, e il problema è assurdo. Tal è il comune ragionamento su la natura e risoluzione dei problemi piucchè determinati di 1.° grado, e in sè il discorso è giustissimo. Ma quali sono i criterj analitici e le generali formole da considerarsi per riconoscere se sussista l' uno o l'altro dei due casi, l'inutilità o l'assurdità di alcune condizioni. Ecco ciò che a mio avviso deriva e può dedursi ancora dall' analisi precedente, onde l' analisi lineare piucchè determinata immediatamente congiungesi a quella dei problemi determinati, anzi è in essa compresa come suo caso particolare.

19. Siano in prima le incognite di numero $m-1$, ed m le equazioni. Ritenute per questo e pei seguenti casi le equazioni (1), potremo in esse considerare che una delle m incognite, per esempio la x_{m-1}, sia $=0$. In conseguenza di ciò li m coefficienti della x_{m-1}, cioè r_0, r_1, ec., r_{m-1} restano quantità indeterminate, o piuttosto arbitrarie. Ma gli altri coefficienti non sono più affatto indipendenti fra loro, come nell' analisi determinata; perocchè avendosi $R=0$, per questa relazione uno di tali coefficienti diviene funzione degli altri. E si avverta pure che li r non entrano per nulla, dipendentemente dall' eliminazione, in R. Ora se dall' equazione $R=0$ prendasi il valore di un coefficiente, per esempio di s_{m-1}, e si sostituisca in A, B, C, ec. Q, dopo tale sostituzione tutti gli

altri coefficienti che restano in A, B, ec., Q saranno fra loro indipendenti, e i valori delle incognite x_{m-2}, x_{m-3}, ec., x_{0} si troveranno reali e soddisfatti, come in un problema lineare determinato. Pertanto richiamato dalla (19) il valore di r_{0}^{q}, ossia di V, che cangiasi in quello di R colla permutazione di r in s, ed ommesso il fattor comune di R e V, si ha

$$R=(a,b,c,d,\text{ec.},q,s)$$
$$=(b,c,d,\text{ec.},q,s)a_{m-1}-(a,c,d,\text{ec.}q,s)b_{m-1}+\text{ec.}\pm(a,b,c,d,\text{ec.}q)s_{m-1}=0$$

perciò

$$(41) \qquad s_{m-1}=\frac{(b,c,d,\text{ec.}q,s)a_{m-1}-(a,c,d,\text{ec.}q,s)b_{m-1}+\text{ec.}}{\mp(a,b,c,\text{ec.}q)}.$$

Questo è il valore da sostituire in ciascuna delle seguenti

$$(42) \qquad \begin{aligned} Q &= -(a,b,c,\text{ ec. }p,r,s) \\ P &= +(a,b,c,\text{ ec. }n,q,r,s) \\ &\ \vdots \\ A &= \pm(b,c,\text{ ec.}n,p,q,r,s) \end{aligned}$$

valendo sempre il segno superiore per m dispari e l'inferiore per m pari. Nel denominatore V non avviene alcun cambiamento, non contenendosi in esso li s; ma tanto in esso, come in ciascuno dei numeratori Q, P, ec., A abbiamo le arbitrarie quantità, m di numero, r_{0}, r_{1}, ec. r_{m-1} le quali gioveranno a semplificar le espressioni. Pongasi a cagion d'esempio $=0$ ciascuno delli r_{0}, r_{1} ec., uno eccettuato; mentre se tutti fossero nulli, l'incognita x_{m-1}, che si è supposta $=0$, potrebb'esser qualunque, distruggendosi non pertanto i termini $r_{0}x_{m-1}$, $r_{1}x_{m-1}$, ec. $r_{m-1}x_{m-1}$; e quindi pongasi $r_{m-1}=1$. Se ora si osserva che tutti i termini dello svolgimento di Q, P, ec., A e di V contenendo uno delli r debbon per ipotesi

annullarsi, meno quelli moltiplicati per r_{m-1}, si vedrà facilmente risultarne

$$\begin{array}{l} Q' = \pm (a,b,c,\text{ec}.p,s) \\ P' = \mp (a,b,c,\text{ec}.n,q,s) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ A' = \mp (b,c,\text{ec}.n.p,q,s) \\ V' = \mp (a,b,c,\text{ec}.,p,q) \end{array}$$

col segno superiore per m dispari: o è quanto dire si avrà

$$\begin{array}{l} Q' = \pm[(b,c,\text{ec}.p,s)a_{m-2} - (a,c,\text{ec}.p,s)b_{m-2} + \text{ec}. \\ \qquad \mp(a,b,c,\text{ec}.p)s_{m-2}] \\ P' = \mp[(b,c,\text{ec}.n,q,s)a_{m-2} - (a,c,\text{ec}.n,q,s)b_{m-2} + \text{ec}. \\ \qquad \mp(a,b,\text{ec}.n,q)s_{m-2}] \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ A' = \mp[(c,\text{ec}.n.p,q,s)b_{m-2} - (b,\text{ec}.n.p,q,s)c_{m-2} + \text{ec}. \\ \qquad \mp(b,c,\text{ec}.n,p,q)s_{m-2}] \\ V' = \mp[(b,c,\text{ec}.q)a_{m-2} - (a,c,\text{ec}.q)b_{m-2} + \text{ec}. \\ \qquad \mp(a,b,c,\text{ec}.p)q_{m-2}] \end{array} \tag{43}$$

e quindi

$$x_{m-2} = \frac{Q'}{A'}\,;\; x_{m-3} = \frac{P'}{V'},\ \text{ec.};\;\; x_0 = \frac{A'}{V'}.$$

Nè è difficile il vedere che i valori (43) sono tali, quali si avrebbero per eliminazione dalle prime date e di numero $m-1$ equazioni; e sussistendo con essi la (41) il problema ne verrà

sciolto e non ripugnante colla emmesima equazion data. Ma i valori (42) di Q, P, ec., A, che racchiudon s_{m-1} ed i coefficienti r_0, r_1, ec. r_{m-1}, sono perciò appunto più generali degli ultimi.

20. Siano m di numero le equazioni ed $m-2$ le incognite. Oltre la x_{m-1} si potrà supporre anche la $x_{m-2}=0$. Quindi per le R=o, Q=o sarà

$$(b,c,\text{ec.}q,s)a_{m-1}-(a,c,\text{ec.}q,s)b_{m-1}+\text{ec.}\pm(a,b,c,\text{ec.}q)s_{m-1}=0$$

$$(b,c,\text{ec.}p,r,s)a_{m-1}-(a,c,\text{ec.}p,r,s)b_{m-1}+\text{ec.}\pm(a,b,c,\text{ec.}p,r)s_{m-1}=0$$

per mezzo delle quali determineremo tosto due coefficienti, per esempio s_{m-1}, r_{m-1}, ed avremo

$$s_{m-1}=\frac{(b,c,\text{ec.}q,s)a_{m-1}-(a,c,\text{ec.}q,s)b_{m-1}+\text{ec.}}{\mp(a,b,c,\text{ec.}q)}$$

$$r_{m-1}=\frac{(b,c,\text{ec.}p,r,s)a_{m-1}-(a,c,\text{ec.}p,r,s)b_{m-1}+\text{ec.}\pm(a,b,c,\text{ec.}p,r)s_{m-1}}{\pm(a,b,c,\text{ec.}p,s)}$$

ove nella seconda si ponga il valore di s_{m-1} tratto dalla prima. E più semplicemente, avendo fatta $=0$ ciascuna delle arbitrarie r_0, r_1, ec; r_{m-2} e la $r_{m-1}=1$, si ricaverà s_{m-2} dalla Q'= o e si avrà

$$(44)\qquad s_{m-2}=\frac{(b,c,\text{ec.}p,s)a_{m-2}-(a,c,\text{ec.}p,s)b_{m-2}+\text{ec.}}{\pm(a,b,c,\text{ec.}p)}.$$

Fatta $=0$ anche ciascuna delle arbitrarie q_0, q_1, ec. q_{m-3} e la $q_{m-2}=1$ se ne dedurrà

$$P''=\pm(a,b,c,\text{ec}.n,s)=\pm[(b,c,\text{ec}.n,s)a_{m-3}-(a,c,\text{ec}.n,s)b_{m-3}+\text{ec}.$$
$$\pm(a,b,c,\text{ec}.n)s_{m-3}]$$

(45)

$$N''=\mp(a,b,c,\text{ec}.l,p,s)=\mp[(b,c,\text{ec}.p,s)a_{m-3}-(a,c,\text{ec}.p,s)b_{m-3}+\text{ec}.$$
$$\pm(a,b,c,\text{ec}.p)s_{m-3}]$$
$$\vdots$$
$$A''=\pm(b,c,\text{ec}.n,p,s)=\pm[(c,\text{ec}.n,p,s)b_{m-3}-(b,\text{ec}.n,p,s)c_{m-3}+\text{ec}.$$
$$\pm(b,c,\text{ec}.p)s_{m-3}]$$

$$V''=\pm(a,b,c,\text{ec}.p)=\pm[(b,c,\text{ec}.p)a_{m-3}-(a,c,\text{ec}.p)b_{m-3}+\text{ec}.$$
$$\pm(a,b,c,\text{ec}.n)p_{m-3}]$$

e saranno le incognite

$$x_{m-3}=\frac{P''}{V''};\ x_{m-4}=\frac{N''}{V''};\ \text{ec.}\ x_0=\frac{A''}{V''}.$$

Similmente per m equazioni ed $m-3$ incognite, avendosi ancora $x_{m-3}=0$, si dedurrà dalla $P''=0$.

$$(46)\qquad s_{m-3}=\frac{(b,c,\text{ec}.n,s)a_{m-3}-(a,c,\text{ec}.n,s)b_{m-3}+\text{ec}.}{\mp(a,b,c,\text{ec}.n)}$$

onde fatto ciascuno dei p_0, p_1, p_2, ec. p_{m-4} eguale a zero e $p_{m-3}=1$, si avrà

$$N''' = \pm(a,b,c,\text{ec}.l,s) = \pm[(b,c,\text{ec}.l,s)a_{m-4} - (a,c,\text{ec}.l,s)b_{m-4} + \text{ec}.$$

47) $$\mp(a,b,\text{ec}.l)s_{m-4}]$$

$$\vdots$$

$$A''' = \mp(b,c,\text{ec}.n,s) = \mp[(c,\text{ec}.n,s)b_{m-4} - (b,\text{ec}.n,s)c_{m-4} + \text{ec}.$$

$$\mp(b,c,\text{ec}.n)s_{m-4}]$$

$$V''' = \mp(a,b,c,\text{ec}.n) = \mp[(b,c,\text{ec}.n)a_{m-4} - (a,c,\text{ec}.n)b_{m-4} + \text{ec}.$$

$$\mp(a,b,\text{ec}.l)n_{m-4}]$$

$$x_{m-4} = \frac{N'''}{V'''}; \text{ ec. } x_0 = \frac{A'''}{V'''}.$$

Ed estendendo il discorso ad m equazioni ed $m-m'$ incognite, se ne determineranno i valori di s_{m-1}, s_{m-2}, ec. $s_{m-m'}$; e si otterranno come sopra i numeratori e il denominator comune delle $m-m'$ incognite, i quali già non sono che i valori di esse dedotti dalle prime date $m-m'$ equazioni e che, sostituiti nelle restanti m' equazioni, debbon soddisfare al dato valore dei coefficienti s_{m-1}, s_{m-2}, ec. $s_{m-m'}$, non indipendenti fra loro come tutti gli altri.

21. Ma per abbracciare la massima generalità e per includere nei valori delle incognite li m' coefficienti che dipendono dagli altri, poniamo per brevità

$$\pm(a,b,c,\text{ec }q) = \alpha_0;\ \mp(a,b,c,\text{ec}.p,s) = \beta_0;\ \pm(a,b,c,\text{ec}.n,q,s) = \gamma_0;$$

$$\mp(a,b,c,\text{ec}.p,r) = \alpha_1;\ \pm(a,b,c,\text{ec}.p,s) = \beta_1;\ \mp(a,b,c,\text{ec}.n,r,s) = \gamma_1;$$

48) $$\pm(a,b,c,\text{ec}.n,q,r) = \alpha_2;\ \mp(a,b,c,\text{ec}.n,q,s) = \beta_2;\ \mp(a,b,c,\text{ec}.n,r,s) = \gamma_2;\ \text{ec.}$$

$$\vdots$$

$$\mp(b,c,\text{ec}.q,r) = \alpha_{m-2};\ \pm(b,c,d,\text{ec}.q,s) = \beta_{m-2}\ \mp(b,c,d,\text{ec}.p,r,s) = \gamma_{m-2};$$

In conseguenza di ciò avremo

$$
(49)\quad \begin{array}{l}
R=\alpha_0\, s_{m-1}+\beta_0\, q_{m-1}+\gamma_0\, p_{m-1}+\text{ec.}+\rho_0\, a_{m-1}\\
Q=\alpha_1\, s_{m-1}+\beta_1\, r_{m-1}+\gamma_1\, p_{m-1}+\text{ec.}+\rho_1\, a_{m-1}\\
P=\alpha_2\, s_{m-1}+\beta_2\, r_{m-1}+\gamma_2\, q_{m-1}+\text{ec.}+\rho_2\, a_{m-1}\\
\vdots\\
B=\alpha_{m-2}\, s_{m-1}+\beta_{m-2}\, r_{m-1}+\gamma_{m-2}\, q_{m-1}+\text{ec.}+\rho_{m-2}\, a_{m-1}
\end{array}
$$

ove i coefficienti di s_{m-1}, q_{m-1}, ec. a_{m-1} non sono tutti sciolti fra loro; ma si ha $\beta_1=-\beta_0$; $\beta_2=-\gamma_0$; $\gamma_2=-\gamma_1$; ec. Essendo pertanto m di numero le equazioni (1) ed $m-m'$ le incognite, potremo supporre $=0$ ciascuna delle m' ultime incognite nelle m equazioni, ossia potrà farsi $x_{m-1}=x_{m-2}\ldots=x_{m-m'}=0$: cosicchè avrassi R=Q=P....= o, e quindi le (49) porgeranno un numero m' di equazioni per determinar un egual numero di coefficienti s_{m-1}, r_{m-1}, q_{m-1}, ec. Indicate perciò con $-\sigma_0$, $-\sigma_1$, $-\sigma_2$, ec. $-\sigma_{m'-1}$ le somme dei termini che nelle (49) non contengono alcuna delle m' quantità s_{m-1}, r_{m-1}, ec. si avranno le seguenti equazioni

$$
(50)\quad \begin{array}{l}
\alpha_0\, s_{m-1}+\beta_0\, q_{m-1}+\gamma_0\, p_{m-1}+\text{ec.}=\sigma_0\\
\alpha_1\, s_{m-1}+\beta_1\, r_{m-1}+\gamma_1\, p_{m-1}+\text{ec.}=\sigma_1\\
\alpha_2\, s_{m-1}+\beta_2\, r_{m-1}+\gamma_2\, q_{m-1}+\text{ec.}=\sigma_2\\
\vdots\\
\alpha_{m'-1}\, s_{m-1}+\beta_{m'-1}\, r_{m-1}+\gamma_{m'-1}\, q_{m-1}+\text{ec.}=\sigma_{m'-1}
\end{array}
$$

e se ne ricaverà

$$(51) \qquad s_{m-1} = \frac{A_0}{V_0}\,;\; r_{m-1} = \frac{B_0}{V_0}\,;\; q_{m-1} = \frac{C_0}{V_0} \text{ ec.}$$

Li quali valori di s_{m-1}, r_{m-1}, ec., sostituiti nei numeratori e nel denominator comune V delle $m - m'$ incognite, le renderanno di necessità soddisfatte e sussistenti, generalmente parlando.

22. Le equazioni (50) sono un caso speciale di analisi lineare determinata; poichè in ognuna di esse manca una delle ricercate quantità r_{m-1}, q_{m-1}, ec. e la sola s_{m-1} ritrovasi in tutte. Per ottener in questo caso col nostro metodo sopra esposto i valori di A_0, B_0, ec. V_0 delle (51), scriviamo le (50) come segue

$$(52) \quad \begin{array}{l}
\alpha_0\, s_{m-1} + \beta'_0\, r_{m-1} + \gamma'_0\, q_{m-1} + \delta'_0\, p_{m-1} + \text{ec.} = \sigma_0 \\
\alpha_1\, s_{m-1} + \beta_1\, r_{m-1} + \gamma'_1\, q_{m-1} + \delta'_1\, p_{m-1} + \text{ec.} = \sigma_1 \\
\alpha_2\, s_{m-1} + \beta_2\, r_{m-1} + \gamma_2\, q_{m-1} + \delta'_2\, p_{m-1} + \text{ec.} = \sigma_2 \\
\alpha_3\, s_{m-1} + \beta_3\, r_{m-1} + \gamma_0\, q_{m-1} + \delta'_0\, p_{m-1} + \text{ec.} = \sigma_3 \\
\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\alpha_{m'-1}\, s_{m-1} + \beta_{m'-1}\, r_{m-1} + \gamma_{m'-1}\, q_{m-1} + \delta_{m'-1}\, p_{m-1} + \text{ec.} = \sigma_{m'-1}
\end{array}$$

dalle quali viene

$$(53) \quad \begin{array}{l}
V_0 = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{ec.}) \\
A_0 = \pm(\beta, \gamma, \delta, \text{ec.}\,\sigma) \\
B_0 = \mp(\alpha, \gamma, \delta, \text{ ec.}\,\sigma) \\
C_0 = \pm(\alpha, \beta, \delta, \text{ec.}\,\sigma) \\
\text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.}
\end{array}$$

col segno superiore o inferiore, secondo che m' è dispari o pari. Convien però avvertire che negli sviluppi delle (53) debbon mettersi le quantità segnate d'accento $\beta'_0, \gamma'_0, \delta'_0$, ec. γ'_1, δ'_1, ec. δ'_2, ec. e che a sviluppo compiuto deve farsi $\beta'_0 = \gamma'_1 = \delta'_2 \ldots$ $\ldots = 0$; $\gamma'_0 = \beta_0$; $\delta'_0 = \gamma_0$; ec. $\delta'_1 = \gamma_1$; e così di seguito, con regolarità manifesta.

23. Ora, per un esempio, sussistano le sei equazioni del num. 14, ma colle sole tre incognite x_0, x_1, x_2; e sarà questo come il supporre nelle equazioni stesse $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Avendosi quindi $\mathrm{F} = \mathrm{E} = \mathrm{D} = 0$, dai valori di queste quantità recati nel detto numero si trae, per determinar s_5, f_5, e_5

$$(54)\quad \begin{aligned} &\alpha_0 = -(a,b,c,d,e);\ \beta_0 = +(a,b,c,d,s);\ \gamma_0 = -(a,b,c,e,s);\ \text{ec.} \\ &\alpha_1 = +(a,b,c,d,f);\ \beta_1 = -(a,b,c,d,s);\ \gamma_1 = +(a,b,c,f,s);\ \text{ec.} \\ &\alpha_2 = -(a,b,c,e,f);\ \beta_2 = +(a,b,c,e,s);\ \gamma_2 = -(a,b,c,f,s);\ \text{ec.} \end{aligned}$$

$$(55)\quad \begin{aligned} &\sigma_0 = -(b,c,d,e,s)a_5 + (a,c,d,e,s)b_5 - (a,b,d,e,s)c_5 + (a,b,c,e,s)d_5 \\ &\sigma_1 = (b,c,d,f,s)a_5 - (a,c,d,f,s)b_5 + (a,b,d,f,s)c_5 - (a,b,c,f,s)d_5 \\ &\sigma_2 = -(b,c,e,f,s)a_5 + (a,c,e,f,s)b_5 - (a,b,e,f,s)c_5 \end{aligned}$$

Formate perciò le tre equazioni

$$(56)\quad \begin{aligned} &\alpha_0\, s_5 + \beta'_0\, f_5 + \gamma'_0\, e_5 = \sigma_0 \\ &\alpha_1\, s_5 + \beta_1\, f_5 + \gamma'_1\, e_5 = \sigma_1 \\ &\alpha_2\, s_5 + \beta_2\, f_5 + \gamma_2\, e_5 = \sigma_2 \end{aligned}$$

si avrà da esse

$$e_5 = \frac{C_0}{V_0} = \frac{(\alpha,\beta,\sigma)}{(\alpha,\beta,\gamma)}$$

$$(57) \qquad f_5 = \frac{B_0}{V_0} = -\frac{(\alpha,\gamma,\sigma)}{(\alpha,\beta,\gamma)}$$

$$s_5 = \frac{A_0}{V_0} = \frac{(\beta,\gamma,\sigma)}{(\alpha,\beta,\gamma)}\,.$$

E sviluppando, col porre infine $\beta'_0=0$; $\gamma'_0=\beta_0$; $\gamma'_1=0$, si troverà

$$(58) \quad \begin{aligned} V_0&=(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)\beta_0-\alpha_0\beta_1\gamma_2\\ A_0&=(\sigma_2\beta_1-\sigma_1\beta_2)\beta_2-\sigma_0\beta_1\gamma_2\\ B_0&=(\alpha_2\sigma_1-\alpha_1\sigma_2)\beta_0+(\alpha_1\sigma_0-\alpha_0\sigma_1)\gamma_2\\ C_0&=(\alpha_2\sigma_0-\alpha_0\sigma_2)\beta_1-(\alpha_1\sigma_0-\alpha_0\sigma_1)\beta_2\,. \end{aligned}$$

Dipoi sostituiti questi valori di e_5, f_5, s_5 negli sviluppi di A, B, C, V del num. 14, ne risulteranno le tre incognite

$$x_0 = \frac{A}{V}\,;\; x_1 = \frac{B}{V}\,;\; x_2 = \frac{C}{V}\,,$$

determinate da tutte insieme le date sei equazioni lineari; e i coefficienti di esse, che compongono A, B, C, V, tutti saranno indipendenti fra loro, come nel caso del problema lineare determinato e generale. Inoltre di questi coefficienti sedici sono totalmente arbitrarj, e sono essi f_0, f_1, ec. f_4, e_0, e_1 ec. e_4, d_0, d_1 ec. d_5. E generalmente essendo m di numero le equazioni, $m-m'$ le incognite, nei valori di queste formati col metodo precedente si avrà un numero $m'(m-1)+1$ di coefficienti da determinarsi a piacere.

24. Pertanto nei problemi lineari più che determinati, affinchè generalmente sussistano e non ripugnino insieme le m condizioni o equazioni fra le $m-m'$ incognite, è duopo che il termine noto s_{m-1} sia tale da soddisfare la prima delle (51), eguale cioè alla funzione degli altri termini e coefficienti indicata da $\frac{A_o}{V_o}$; e inoltre che opportunamente si assegni il valore ad un numero $m'-1$ dei coefficienti arbitrarj, introdotti dal considerar nulle m' incognite nelle m equazioni, e val a dire che si prendano r_{m-1}, q_{m-1}, ec. tali da soddisfarne le (51) susseguenti. Dopo di che nei valori delle $m-m'$ incognite effettive del problema resteranno ancora le quantità o i coefficienti arbitrarj in numero di $m'(m-1)+1$. Queste condizioni soddisfatte, potrebbe accadere che la soluzione o il problema fosse tuttavia non trattabile e assurdo; ma ciò avverrebbe particolarmente e in conseguenza dei valori speciali numerici attribuiti ai termini e coefficienti noti dell'equazioni, qualora ne risultasse eguale a zero l' una o l' altra delle quantità V e V_o; il qual caso verrà in appresso esaminato. In riguardo poi alle condizioni o equazioni del problema più che determinato che sono dette superflue o inutili, quando non ripugnano colle altre, e che realmente non servono che a confermar i valori delle incognite tratti dalle ultime, tutto cio è vero finchè si considerano e distinguonsi le quantità del problema in date e incognite; nel qual caso tornerebbe anche svantaggiosamente o vanamente complicato il metodo precedente di formar il valore di ciascuna incognita, traendolo da tutte insieme le equazioni proposte, come di necessità deve farsi nei problemi determinati. Ma se le quantità si distinguano e si considerino altre variabili, ed altre costanti, e si ricerchi di esprimere quelle per queste, allora nelle applicazioni dell' analisi più che determinata è di molta importanza il tener conto di tutte le equazioni e di farle tutte concorrere nel valore di ogni variabile. Imperocchè le costanti es-

sendo somministrate dalle osservazioni, e riuscendo perciò alterate o affette dai piccioli errori probabili dell' osservatore e degli strumenti, coll'aumentare il numero delle osservazioni, e quindi anche quello delle equazioni di condizione impiegate nel calcolo di ciascuna variabile, diminuisce l'error probabile finale del risultamento. Quindi ancora in tal caso le costanti arbitrarie, che abbiam riconosciute nella generale soluzione del problema lineare più che determinato, possono per avventura utilmente adoperarsi all'oggetto di scemar l'influenza degli errori primitivi e proprj delle osservazioni nelle quantità calcolate che ne derivano, come a tal fine giova la correzione o il metodo de' minimi quadrati. Riserbandoci ad altra occasione di entrar in queste indagini ulteriori, proseguiremo in una seconda Memoria lo sviluppo dell'Analisi lineare dietro i principj nella presente dichiarati.

CALCOLO
DEGLI INDICI DELLE FUNZIONI

DEL SIGNOR AGOSTINO CAUCHY

MEMBRO DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI PARIGI

E DELLA SOCIETÀ REALE DI LONDRA.

Nella Memoria presentata all'Accademia di Torino il 17 Novembre 1831 ho fatto conoscere un nuovo calcolo che può essere molto utilmente impiegato nella risoluzione delle equazioni di qualunque grado. Ma nella memoria di cui trattasi, i principj di questo calcolo che io denomino calcolo degli indici delle funzioni trovansi dedotti dalla considerazione degli integrali definiti. Io mi propongo adesso di mostrare come si possano stabilire direttamente questi stessi principj senza ricorrere a formole di calcolo integrale.

Sia u una funzione reale della variabile reale x, e tale che se si fa crescere questa variabile per gradi insensibili fra due dati limiti,

$$x=x_0, \quad x=X,$$

u varii insensibilmente e non cangi mai di segno senza passare per zero o per l'infinito. Per un valore a di x compreso fra i limiti $x=x_0$, $x=X$ e proprio a verificare l'equazione

$$\frac{1}{u}=0. \tag{1}$$

la funzione u passerà divenendo infinita dal negativo al positivo, o dal positivo al negativo, oppure essa non cangerà in

modo alcuno di segno. La quantità $+1$ nel primo caso -1 nel secondo, zero nel terzo, sarà ciò che io chiamo l'indice della funzione u per il dato valore a della variabile x; e l'indice integrale di u preso fra i limiti

$$x = x_0,\ x = X > x_0,$$

non sarà altro che la somma degli indici corrispondenti alle diverse radici dell' equazione (1) contenute fra i limiti di cui si tratta.

Io indicherò questo indice integrale con la notazione

$$I_{x_0}^{X}((u))$$

essendo quì l' uso delle parentesi doppie lo stesso che nel calcolo dei residui. Ciò posto si stabilirà facilmente la seguente proposizione.

1.° *Teorema.* Sia u una funzione reale di x che fra i limiti $x{=}x_0$, $x{=}X$, non cangi mai di segno senza passare per zero o per l' infinito, ed u_0, U li due valori di u corrispondenti ai valori reali x_0, X della variabile X. La somma

$$I_{x_0}^{X}((u)) + I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right) \tag{2}$$

equivalerà allo zero, se le due quantità u_0, U sono dello stesso segno, a $+1$ se la prima essendo negativa, la seconda è positiva, a -1, se essendo positiva la prima è negativa la seconda.

Dimostrazione. Se si fa crescere x per gradi insensibili dal limite x_0 sino al limite X, i soli valori di x ai quali corrispondono degli indici di u, o di $\frac{1}{u}$ differenti da zero, saranno quelli per mezzo dei quali la funzione u diverrà infinita can-

giando di segno, e ad un simile valore di x corrisponderà sempre un indice di u, o di $\frac{1}{u}$ eguale a $+1$ se x passa dal negativo al positivo, ed un indice di u o di $\frac{1}{u}$ uguale a -1 se u passa dal positivo al negativo. Siano ora

$$a, b, c, d \ldots\ldots$$

i valori successivi di x compresi fra i limiti x_0, X, e pei quali la funzione u diviene nulla o infinita cangiando di segno, cioè a dire in altri termini, le radici delle due equazioni

$$(3) \qquad u = 0, \quad \frac{1}{u} = 0$$

contenute fra i limiti x_0, X essendo queste radici disposte per ordine di grandezza. Se u_0 è negativa, le radici di u o di $\frac{1}{u}$ corrispondenti ai valori

$$a, b, c, d \ldots\ldots$$

della variabile x saranno rispettivamente

$$+1, -1, +1, -1 \ldots\ldots$$

e per conseguenza la somma di questi indici sarà equivalente a zero, o a $+1$ secondo che il loro numero sarà pari o dispari, cioè a dire in altri termini secondo che U sarà negativo o positivo. Al contrario se x_0 è positivo, gli indici di u o di $\frac{1}{u}$ corrispondenti ai valori

$$a, b, c, d \ldots$$

della variabile x saranno rispettivamente

$$-1, +1, -1, +1 \ldots$$

ed in conseguenza la somma di questi indici sarà equivalente

a zero, od a -1 secondo che il loro numero sarà pari o dispari vale a dire in altri termini secondo che U sarà positivo o negativo. Dunque definitivamente l' espressione (2), o la somma degli indici delle funzioni

$$u, \frac{1}{u}$$

corrispondente ai valori

$$a, b, c, d \ldots .$$

della variabile x sarà equivalente a $+1$, a -1 od a zero, secondo che la variabile x passando bruscamente dal valore x_0 al valore X farà passare la funzione u dal negativo al positivo o dal positivo al negativo, o cesserà di produrre in questa funzione un cangiamento di segno.

Supponendo che la funzione reale u di x non cangi mai di segno senza passar per zero o per l' infinito, noi indicheremo con la notazione

$$I((u))$$

la somma degli indici di u corrispondente a tutte le radici dell' equazione (1) di modo che si avrà identicamente

$$I((u)) = I_{-\infty}^{\infty}((u)).$$

Se la funzione u si riduca alla forma $\frac{k}{x}$ essendo k una quantità costante si troverà

$$I\left(\left(\frac{k}{x}\right)\right) = I\frac{K}{((x))} = 1$$

oppure

$$I\left(\left(\frac{k}{x}\right)\right) = I\frac{k}{((x))} = -1.$$

secondo che la quantità k sarà positiva o negativa. Ciò posto il Teorema 1.° sarà evidentemente compreso nella formola

$$(4)\qquad \overset{X}{\underset{x_0}{I}}((u)) + \overset{X}{\underset{x_0}{I}}\left(\left(\frac{1}{u}\right)\right) = \frac{1}{2}\left[I\frac{U}{((x))} - I\frac{u_0}{((x))}\right].$$

Se alla funzione u si sostituisca il rapporto fra due funzioni date u, v scelte in modo che ciascuna di esse non cangi mai di segno fra i limiti $x=x_0$, $x=X$ senza passare per zero o per l'infinito, allora chiamando u_0, V_0 ed U, V i valori di queste due funzioni per $x=x_0$, e per $x=X$, si avrà in virtù della formola (4)

$$(5)\qquad \overset{X}{\underset{x_2}{I}}\left(\left(\frac{u}{v}\right)\right) + \overset{X}{\underset{x_0}{I}}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right) = \frac{1}{2}\left[I\frac{U}{V((x))} - I\frac{u_0}{v_0((x))}\right],$$

o ciò che torna lo stesso

$$\overset{X}{\underset{x_0}{I}}\left(\left(\frac{u}{v}\right)\right) + \overset{X}{\underset{x_0}{I}}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right) = \frac{1}{2}\left[I\frac{V}{U((x))} - I\frac{v_0}{u_0((x))}\right].$$

Allorchè u è algebraicamente divisibile per v l'indice integrale

$$\overset{X}{\underset{x_0}{I}}\left(\left(\frac{u}{v}\right)\right)$$

è evidentemente nullo, e la formola (5) dà

$$(6)\qquad \overset{X}{\underset{x_0}{I}}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right) = \frac{1}{2}\left[I\frac{U}{V((x))} - I\frac{u_0}{v_0((x))}\right].$$

2.° *Teorema.* Se essendo u, v due funzioni intiere di x, e il grado della prima eguale o superiore al grado della seconda, si chiami a il quoziente ed w il resto che somministra la divisione di u per v si avrà

$$\overset{X}{\underset{x_0}{I}}\left(\left(\frac{u}{v}\right)\right) = \overset{X}{\underset{x_0}{I}}\left(\left(\frac{w}{v}\right)\right)$$

qualunque siano i valori particolari di x rappresentati da x_0, X.

Dimostrazione. In fatti nell'ipotesi ammessa si avrà qualunque sia x,

$$\frac{u}{v} = a + \frac{w}{v} \tag{7}$$

e in conseguenza i rapporti

$$\frac{u}{v}, \frac{w}{v}$$

la cui differenza a resterà sempre finita al tempo stesso che la variabile x divenisse simultaneamente infinita per certi valori di x proprii a verificar l' equazione

$$v = 0. \tag{8}$$

Sia a uno di questi valori. Quando x differirà pochissimo da a, li due rapporti

$$\frac{u}{v}, \frac{w}{v}$$

offrendo valori numerici considerabilissimi, superiori a quelli di a, saranno necessariamente quantità dello stesso segno. Dunque per $x=a$ l' indice del rapporto $\frac{u}{v}$ sarà equivalente all' indice del rapporto $\frac{w}{v}$, e sussistendo questo rapporto per tutte le radici dell' equazione (8) strascinerà seco la formola (7).

Dalla formola (7) congiunta alla (5) si ricava

$$I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right) = \frac{1}{2}\left[I\frac{U}{V((x))} - I\frac{u_0}{v_0((x))}\right] - I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{w}{v}\right)\right). \tag{9}$$

In virtù di questa ultima equazione la determinazione dell' indice integrale di una frazione razionale $\frac{v}{u}$ fra limiti dati,

può essere ridotto alla determinazione dell'indice integrale di un' altra frazione razionale $\frac{w}{v}$ il numeratore e denominator della quale siano polinomj di minori gradi. D' altronde una induzion simile applicar puossi non solamente alla nuova frazione $\frac{w}{v}$, ma ancora a tutte le frazioni che se ne dedurranno successivamente, e che si formeranno dividendo l' uno per l' altro due avanzi consecutivi ottenuti nella ricerca del massimo comun divisore di due polinomj u ed v. Ora siccome il penultimo avanzo sarà esattamente divisibile per l' ultimo cioè a dire, per il massimo comun divisore, la formola (6) farà conoscere l' indice dell' ultima frazione, dal quale si dedurranno immediatamente gli indici di tutte le altre. Così puossi con l' ajuto delle formole (6) e (9) determinar l' indice di qualunque frazion razionale. Del resto si può abbreviar sovente il calcolo con l' ajuto delle considerazioni seguenti.

Se essendo u una funzione intiera della variabile x, si dica φ l' aumento di u corrispondente all'aumento ω della variabile x, la somma $u+\varphi$ potrà essere rappresentata da un polinomio ordinato secondo le potenze ascendenti di ω, o della forma

$$(10) \qquad u + \omega u' + \frac{\omega^2}{1.2} u'' + \frac{\omega^3}{1.2.3} u''' + \text{ec.}$$

e in questo polinomio i coefficienti di

$$\omega, \ \frac{\omega^2}{1.2}, \ \frac{\omega^3}{1.2.3} \ \text{ec.}$$

cioè

$$u, \ u', \ u'', \ \text{ec.}$$

saranno nuove funzioni di x che si chiamano derivate della funzione u, non essendo la derivata u' del primo ordine che il limite verso cui converge il rapporto

$$(11) \qquad \frac{\varphi}{\omega} = u' + \frac{\omega}{1.2} u'' + \frac{\omega^2}{1.2.3} u''' + \text{ec.}$$

mentre che ω si accosta indefinitamente a zero e la derivata $u^{(n)}$ dell' ordine n essendo il coefficiente di $\frac{\omega^n}{1.2.3.....n}$ nel polinomio (10).

Se si supponga per fissare le idee

$$(12)\quad u=k_0 x^m + k_1 x^{m-1} + k_2 x^{m-2} + \ldots + k_{m-2} x^2 + k_{m-1} x + k_m ,$$

essendo k_0, k_1, k_2 ... k_{m-2}, k_{m-1}, k_m quantità costanti, si troverà

$$(13)\quad u+\varphi = k_0(x+\omega)^m + k_1(x+\omega)^{m-1} + k_2(x+\omega)^{m-2} + \ldots + k_{m-2}(x+\omega)^2 + k_{m-1}(x+\omega) + k_m ,$$

e perciò

$$(14)\quad \begin{cases} u' = m k_0 x^{m-1} + (m-1) k_1 x^{m-2} + \ldots + 2 k_{m-2} x + k_{m-1} \\ u'' = (m-1) m k_0 x^{m-2} + (m-1)(m-2) k_1 x^{m-3} + \ldots + 1.2 k_{m-2} \\ \text{ecc.} \end{cases}$$

Ora risulta dalle formole (14). 1.° Che si otterrà la derivata del primo ordine u' moltiplicando ciascun termine della funzione u per l' esponente di x in quel termine e diminuendo questo medesimo esponente di una unità: 2.° che per ottenere le derivate di u dei diversi ordini, basta formare successivamente diverse funzioni, ciascuna delle quali sia la derivata della precedente, essendo la prima la derivata di u.

Imaginiamo ora che il grado della funzione intiera u essendo eguale o maggiore di m, u svanisca per un dato valore a della variabile x, e che $u^{(m)}$ sia allora il primo termine della serie

$$(15)\quad u,\ u',\ u'', \ldots\ u^{(m)},\ u^{(m+1)}\ \text{ec.} \ldots$$

che non si riduce a zero. Se si chiamino

$$A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, \text{ec.} \dots$$

i valori delle funzioni

$$\frac{u_m}{1.2\dots m}, \frac{u_{m+1}}{1.2\dots m(m+1)}, \frac{u_{m+2}}{1.2\dots m(m+1)(m+2)}, \text{ec.}$$

per $x=a$, il valore di u corrispondente a

(16) $$x = a + \omega$$

sarà

$$A_m \omega^m + A_{m+1} \omega^{m+1} + A_{m+2} \omega^{m+2} + \text{ec.}\dots;$$

in conseguenza l' equazione (16) porterà la seguente

(17) $$u = A_m \omega^m + A_{m+1} \omega^{m+1} + A_{m+2} \omega^{m+2} + \text{ec.}\dots$$

per modo che si avrà identicamente

$$u = A_m (x-a)^m + A_{m+1} (x-a)^{m+1} + A_{m+2} (x-a)^{m+2} + \dots$$

o ciò che torna lo stesso

(18) $$u = (x-a)^m [A_m + A_{m+1}(x-a) + A_{m+2}(x-a)^2 + \dots].$$

Allora l' equazione (19) potendo esser decomposta in due altre

$$(x-a)^m = 0, \text{ ed } A_m + A_{m+1}(x-a) + A_{m+2}(x-a)^2 + \dots = 0$$

dovrà considerarsi che ammetta m radici uguali delle quali a sarà il valor comune. Aggiungasi che per dei valori di x prossimi ad a il rapporto

$$(20)\qquad \frac{u}{(x-a)^m}$$

sarà in forza della formola (18) una quantità finita ma diversa dallo zero affetta dello stesso segno di A_m; in conseguenza del segno stesso di $u^{(m)}$. Ciò posto si dimostrerà facilmente la proposizione seguente.

3.° *Teorema*. Siano u, v due funzioni reali ed intiere di x, e supponiamo che le due equazioni

$$(19)\qquad u=0$$

$$(20)\qquad v=0$$

offrano, la prima m radici, la seconda n radici eguali e reali di cui sia a il valor comune, l' indice della funzione

$$(21)\qquad \frac{v}{u}$$

corrispondente ad $x=a$ sarà zero, se la differenza $m-n$ è pari o negativa. Ma se questa differenza è dispari e positiva, l'indice suddetto sarà $+1$, o -1 secondo che il valore del rapporto

$$(22)\qquad \frac{v^{(n)}}{u^{(m)}}$$

corrispondenti ad $x=a$ sarà positivo o negativo.

Dimostrazione. Nella ipotesi ammessa se si attribuisce ad x un valore prossimo quant' è possibile ad a, le due frazioni

$$(23)\qquad \frac{u}{(x-a)^m},\ \frac{v}{(x-a)^n}$$

acquisteranno valori finiti ma differenti da zero, il primo dei quali sarà una quantità affetta dello stesso segno che $u^{(m)}$, e il secondo una quantità affetta dello stesso segno $v^{(n)}$. In

conseguenza il quoziente che si ottiene dividendo la seconda frazione per la prima cioè

$$\frac{v}{u}(x-a)^{m-n}$$

sarà per dei valori di x infinitamente vicini ad a una quantità finita, ma differente da zero ed affetta dal segno stesso che il rapporto

$$\frac{v^{(n)}}{u^{(m)}}.$$

Dunque allora il valore di

$$\frac{v}{u}$$

sarà infinitamente piccolo, finito, o infinitamente grande mentre sia tale il prodotto

$$\frac{v^{(n)}}{u^{(m)}} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-n}}. \tag{24}$$

Ora se la differenza $x-a$ cambia di segno passando per zero, il prodotto (24) non potrà cambiar di segno passando per l' infinito, se non quando la differenza $m-n$ sarà dispari e positiva, e in questo caso il prodotto (24) passerà dal negativo al positivo, o dal positivo al negativo, secondo che il valore del rapporto

$$\frac{v^{(n)}}{u^{(m)}}$$

corrispondente ad $x=a$ sarà positivo o negativo. Dunque l'indice della funzione (21) svanirà se la differenza $m-n$ è pari o negativa, e quest' indice diverrà $+1$, oppur -1, allorchè la differenza $m-n$ sarà dispari e positiva, secondo che il rapporto $\frac{v^{(n)}}{u^{(m)}}$ diverrà positivo o negativo per $x=a$.

Corollario. Se a è una radice semplice della equazione (19) senza essere radice della equazione (18), l' indice della funzione

$$\frac{v}{u}$$

corrispondente ad $x=a$, sarà $+1$ oppur -1, secondochè il rapporto

$$\frac{v}{u'}$$

acquisterà per $x=a$ un valor positivo, o negativo.

Allorchè u e v rappresentando funzioni reali ed intiere di x, la forma della funzione u è tale che si possano determinar facilmente le radici di $u=0$ contenute fra i limili x_0 X, il Teorema (4) somministra il mezzo di calcolare immediatamente l' indice corrispondente a ciascuna di queste radici e per conseguenza l' indice integrale

$$I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right).$$

Nel caso contrario si può ricorrendo alla formola (9) sostituire alla frazione $\frac{v}{u}$ una frazione $\frac{w}{u}$ e continuare così finchè si arrivi ad una nuova frazione, l'indice integrale della quale fra i limiti x_0, X possa essere determinato facilmente con l' ajuto del Teorema (4). Si può ancora proseguire il calcolo sino alla frazione che ha per numeratore il più gran comun divisore dei due polinomii u, v, frazione l' indice della quale sarà immediatamente determinato dalla formola (6), ed allora si dedurrà senza fatica dalla formola (9) il teorema seguente.

4.° *Teorema.* Siano

$$u,\ v,\ \rho,\ \varsigma \ldots \chi,\ \omega \tag{25}$$

una serie di funzioni intiere di x scelte per modo, che di

tre termini consecutivi della serie (25) il terzo sia sempre uguale all' avanzo della divisione del primo per il secondo; essendo preso questo avanzo con segno contrario, $-\rho=\omega$ sarà il resto della divisione di u per v; $\pm\omega$ sarà il più gran comun divisore algebraico dei polinomj u, v e per determinar l' indice della frazione

$$\frac{v}{u}$$

fra i limiti $x=x_0$, $x=X$, basterà confrontare due a due sotto il rapporto dei segni i termini che si seguono immediatamente nella serie (25), supponendo che si attribuisca alla variabile x prima il valore x_0, secondo, il valore X, e che poscia si contino le variazioni di segno e le permanenze di segno che offrirà la serie (25) in ciascuna di queste due ipotesi. Se si chiami μ il numero delle variazioni di segno che si cambieranno in permanenze, e v il numero delle permanenze che si cambieranno in variazioni nel passaggio della prima ipotesi alla seconda, l' indice della frazione

$$\frac{v}{u}$$

preso fra i limiti $x=x_0$, $x=X$ sarà equivalente alla differenza fra i due numeri μ, e v, per modo che si avrà

$$I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{v}{u}\right)\right)=\mu-v. \qquad (26)$$

Se alla frazione $\frac{v}{u}$ si sostituisca la seguente

$$\frac{u'}{u}$$

e se si supponga sempre che essendo a radice dell'equazione

$$u=0$$

$u^{(m)}$ sia il primo termine della serie

$$u, u', u'' \ldots u^{(m)}, u^{(m+1)} \text{ ec...}$$

che non svanisca quando $x=a$, le due equazioni

$$(19) \qquad u=0, \qquad\qquad (27) \qquad u'=0$$

ammetteranno la prima m radici, la seconda $m-1$ radici uguali ad a, e siccome la derivata dell' ordine m di u sarà al tempo stesso la derivata dell' ordine $m-1$ di u', si concluderà in forza del teorema 3.° che l' indice di $\frac{u'}{u}$ si riduce all' unità per ciascun valore reale di x capace di verificare l'equazione $u=0$. In conseguenza se si dica N il numero delle radici reali ma disuguali di $u=0$ contenute fra i limiti $x=x_0$, $x=X$ si avrà

$$(28) \qquad N = I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{u'}{u}\right)\right).$$

Se si voglia ottenere il numero totale delle radici reali dell' equazione (19), basterà collocare nella formola (28) $x_0=-\infty$, $X=\infty$, od anche semplicemente

$$x_0=-R, \quad X=R$$

rappresentando R un numero superiore ai moduli di tutte le radici. Si potrà dunque con l' ajuto della formola (28) determinare il numero delle radici reali di un' equazione, o più generalmente il numero di quelle fra queste radici che trovansi comprese entro dati limiti. Aggiungiamo che se più radici siano contenute fra li due limiti x_0, X, si potrà fra questi due limiti frapporre un terzo valore di x equivalente alla loro media aritmetica $\frac{x_0+X}{2}$, e determinare il numero delle radici

comprese, 1.° fra $x=x_0$ ed $x=\frac{x_0+X}{2}$; 2.° fra $x=\frac{x_0+X}{2}$ ed $x=X$, in conseguenza fra due nuovi limiti la differenza dei quali sarà la metà della differenza dei due primi. Ora continuando in questo modo a restringere i limiti fra i quali si contengono le radici reali, si finirà per ottenere una serie di valori di x crescenti. e scelti in modo che due termini consecutivi non comprendano mai fra loro più di una radice reale di x atta a verificare l' equazione data

Se si volesse ottenere il numero delle radici positive dell'equazione (19), basterebbe fare $x_0=0$ ed $X=\infty$, oppure $X=R$ nella formola (28) che sarebbe così ridotta alla

$$(29) \qquad N=I_0^{\infty}\left(\left(\frac{u'}{u}\right)\right),$$

oppure

$$(30) \qquad N=I_0^{R}\left(\left(\frac{u'}{u}\right)\right).$$

Se si dicano u_0, u'_0 ed V, V' i valori delle due frazioni, u, u', per $x=0$, $x=X$, si ricaverà dalla formola (28) unita alla formola (9)

$$(31) \qquad N=\frac{1}{2}\left[I\frac{V}{V'((x))}-I\frac{u_0}{u'_0((x))}\right]-I_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{u}{u'}\right)\right).$$

Nel caso particolare in cui si suppone $x_0=0$, $X=\infty$ il rapporto

$$\frac{V}{V'}$$

acquista un valor infinito ma positivo e si ha in conseguenza

$$I\frac{V}{V'((x))}=1.$$

Allora anche u_0, u'_0 non essendo altra cosa che il termine

costante e il coefficiente della prima potenza di x nella funzione u; l' indice

$$I \frac{u_0}{u'_0((x))}$$

sarà equivalente a $+1$ od a -1, secondo che il sistema dei due ultimi termini di u offra una permanenza od una variazione di segno.

Finalmente l' espressione

$$- I_{x_0}^{X} \left(\left(\frac{u}{u'}\right)\right)$$

ridotta a

$$- I_{0}^{\infty} \left(\left(\frac{u}{u'}\right)\right)$$

non potrà superare il numero delle radici reali della equazione (27). Ciò posto si dedurrà immediatamente dalla formola (31) la proposizione seguente.

5.° *Teorema*. Il numero delle radici positive della equazione $u=0$ non potrà superare che d' una unità il numero delle radici positive della equazione derivata $u'=0$, e nel caso soltanto in cui il sistema dei due ultimi termini della funzione u offra una variazione di segno.

Corollario. Si proverà parimente che il numero delle radici della equazione derivata di prim'ordine $u'=0$ non può superare che di una unità il numero delle radici positive della equazione derivata di secondo ordine $u''=0$, e nel solo caso in cui il sistema dei due ultimi termini di u', e in conseguenza il sistema dei due termini che precedono l' ultimo in u offra una variazione di segno. Dunque il numero delle radici positive di $u=0$ supererà di una o di due unità al più il numero delle radici positive di $u''=0$, e nel caso soltanto in cui il sistema dei tre ultimi termini di u offrirà una o due variazioni di segno. Continuando così si finirà per stabilire la regola dei segni di Cartesio compresa nel teorema di cui ecco l' enunziato.

6.° *Teorema.* Il numero delle radici positive di una equazione $u=0$ nella quale u indica una funzione intiera di x, non può superare il numero delle variazioni di segno, che si ottengono confrontando due a due i termini che si succedono immediatamente nella funzione u. Il numero delle radici negative non può superare il numero delle permanenze di segno somministrate dal medesimo processo.

Nota. Dopo di aver stabilito, come più sopra si è spiegato, la prima parte del Teorema 6.° basterà per dedurne la seconda parte sostituire $-x$ ad x. Osserviamo ancora che se nella funzione u li coefficienti di più potenze della variabile x si riducono a zero, basterà perchè cessino di svanire, sostituire $x\pm\varepsilon$, indicando con ε un numero infinitamente piccolo. In questa maniera si assicura facilmente che nella applicazione del teorema di Cartesio si può lasciar di tener conto dei termini che scompariscono.

Se nel teorema 3.° si sostituisca alla funzione $\frac{v}{u}$

$$\frac{u'x}{u}$$

e se si faccia al tempo stesso $x_0=-\infty$, $X=\infty$ si troverà

$$N-K=-I_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{u}{u'x}\right)\right). \tag{32}$$

La formola (32) si accorda con un teorema, con l'ajuto del quale io per il primo ho dimostrato che per una equazione di qualunque grado, si possono trovare funzioni razionali dei coefficienti, i segni delle quali facciano conoscere il numero delle radici reali positive, e il numero delle radici reali negative.

Se si combina, la formola (32) col teorema 4.° si otterrà quest' altro teorema dovuto al Sig. Carlo Sturm.

7.° *Teorema.* Sia

$$u,\ u',\ \sigma,\ \varsigma \ldots \psi,\ \omega \tag{33}$$

una serie di funzioni intiere di x scelte per modo che di tre termini consecutivi della serie (33) il terzo sia sempre eguale, astrazione fatta dai segni, all'avanzo della divisione algebraica del primo per il secondo, ma affetto di un segno contrario al segno di questo avanzo; $\pm\,\omega$ sarà il più gran divisor comune algebraico dei due polinomii u, u', ed il numero delle permanenze di segni che offriranno i termini della serie (33) presi consecutivamente e confrontati due a due, non potrà che crescere per dei valori crescenti di x. Ora l' aumento che riceverà il numero di cui trattasi nel passaggio da un limite dato $x=x_0$, ad un limite più considerevole $x=X$ sarà precisamente il numero delle radici disuguali di $u=0$ contenute fra questi limiti.

Nota. Si possono senza inconveniente sostituire agli avanzi delle divisioni successivamente operate i prodotti di questi avanzi moltiplicati per numeri intieri qualunque; il che permette di far scompărire li divisori numerici nei polinomii $\sigma, \varsigma \ldots . \psi$, ω, allorchè i coefficienti delle diverse potenze di x nella funzione u saranno numeri iutieri.

Appoggiandosi ai principii quì sopra esposti si potrebbe anche estendere il calcolo degli indici alla determinazione delle radici immaginarie delle equazioni, come pure alla soluzione delle equazioni simultanee, e dimostrare in particolare la seguente proposizione.

8.° *Teorema.* Siano $f(x,y)$, $F(x, y)$ due funzioni di x, y, che rimangano continue tra i limiti $x=x_0$, $x=X$, $y=y_0$, $y=Y$. Chiamiamo $\varphi(x,y)$, $\Phi(x,y)$ le derivate di queste funzioni relativamente ad x, e $\chi(x,y)$, $\chi(x,y)$ le loro derivate relativamente ad y. Finalmente sia N il numero dei differenti sistemi dei valori di x, y proprii a verificare le equazioni simultanee $f(x,y)=0$, $F(x,y)=0$, e compresi fra i limiti qui sopra enunciati. Si avrà

$$N=\frac{1}{2}\Big[\int_{x_0}^{X}((\Psi(x,Y)))-\int_{x_0}^{X}((\Psi(x,y_0)))-\int_{y_0}^{Y}((\Psi((X,y)))$$

$$+\int_{y_0}^{Y}((\Psi(x_0,y)))\Big]$$

supponendo

$$\Psi(x,y)=\frac{\varphi(x,y)\chi(x,y)-f(x,y)\chi(x,y)}{F(x,y)}(fx,y).$$

Torino il 15 *Giugno* 1833.

FINE.

MEMORIE

DI MATEMATICA E DI FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA

DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

TOMO XXII.

PARTE

CONTENENTE LE MEMORIE DI FISICA

MODENA

DAI TIPI DELLA R. D. CAMERA.

MDCCCXLI.

INDICE

DI QUANTO CONTIENE

LA PARTE FISICA DEL TOMO XXII

DELLE PRESENTI MEMORIE

CATALOGO

DE' MEMBRI COMPONENTI LA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE RESIDENTE IN MODENA

Anno 1841.

Rispettiva loro Residenza

PRESIDENTE

Sua Eccellenza il Sig. Marchese LUIGI RANGONI rieletto per la seconda volta il giorno 6 Luglio 1835 — *Modena.*

Socii Attuali.

ABBATTI MARESCOTTI (Conte Pietro) Consigliere del Ministero di pubblica Economia ed Istruzione, Accademico onorario dell'Accademia di Scienze e lettere di Palermo, Socio attuale di quella di Scienze lettere ed Arti di Modena — *Modena.*

ALESSANDRINI (Dottor Antonio) Professore di Anatomia comparata — *Bologna.*

AMICI (Cavaliere Professore Gio. Battista) Direttore dell' Imperiale Regio Osservatorio di Firenze — *Firenze.*

AVOGADRO (Cav. Amedeo) Professore Emerito di Fisica sublime, Uditore nella R. Camera de' Conti di Torino — *Torino.*

BELLANI (Canonico Angelo) Fisico — *Milano.*

BELLI (Dottor Giuseppe) Professore di Fisica e Matematica applicata nell'I. R. Università di Padova membro della Facoltà filosofica dell' I. R. Università di Pavia, Socio onorario degli Atenei di Brescia e Bergamo — *Padova.*

BERTOLONI (Antonio) Professore di Botanica nella Pontificia Università di Bologna, Socio straordinario della Società Linneana di Parigi, e Lione,

Residenza

della Medico-Botanica di Londra, di quella dei Curiosi della Natura nell'Elvezia e di molte altre Accademie *Bologna.*

BIANCHI (Dottor Giuseppe) Professore di Matematica delle LL. AA. RR. i Principi Figli del Regnante Duca di Modena Francesco IV, Direttore dell'Osservatorio Astronomico, Professore di Cosmografia nella R. Università di Modena *Modena.*

BORDONI (Antonio) Professore attuale di Matematica nella R. Università di Pavia *Pavia.*

CARLINI (Cav. Fancesco) Astronomo Regio e Vice-Presidente dell' I. R. Istituto *Milano.*

CATULLO (Dottor Tommaso) Professore di Storia naturale *Padova.*

CONFIGLIACHI (Ab. Cav. Pietro) Professore ordinario di Fisica generale e particolare nell' I. R. Università di Pavia, Direttore presidente degli studj filosofici nell'Università stessa, membro dell'I. R. Istituto in Milano, Socio delle Accademie di Berlino, Torino, ec. *Pavia.*

FOSSOMBRONI (Conte Vittorio) Ministro degli affari esteri, Segretario di stato in Toscana, Pensionario anziano *Firenze.*

FUSINIERI (Dottor Ambrogio) *Vicenza.*

GENÈ (Giuseppe) Prof. di Zoologia e storia naturale, Segretario dell'Accademia Reale di Scienze ecc. di Torino *Torino.*

GIORGINI (Cav. Gaetano) Professore onorario nell' I. R. Università di Pisa, ed uno dei componenti il Consiglio degli Ingegneri del Gran Ducato della Toscana. *Pisa.*

INGHIRAMI (Prof. Giovanni) delle Scuole Pie *Firenze.*

LOMBARDI (Antonio) Ingegnere, primo Bibliotecario di S. A. R. il Duca di Modena, Socio delle

Residenza

Accademie di Scienze lettere ed arti di Modena, Lucca, Palermo *Modena.*

MAGISTRINI (Gio. Battista) Professore di matematica superiore nella Pontificia Università di Bologna, Pensionario anziano *Bologna.*

MAINARDI (Dottor Gaspare) Professore *Pavia.*

MARIANINI (Cav. Dottor Stefano) Professore di Fisica sperimentale nella Reale Università di Modena *Modena.*

MATTEUCCI (Carlo) Professore di Fisica *Pisa.*

MELLONI (Macedonio) Direttore dello stabilimento Fisico meteorologico di Napoli *Napoli.*

MICHELOTTI (Maurizio) Cavaliere dei SS. Maurizio e Lazzaro, Ispettor generale del Corpo degli Ingegneri civili e delle miniere, Intendente generale, Direttore dei Regj Canali, membro della R. Società agraria di Torino, e di altre Accademie *Torino.*

MOSSOTTI (Ottaviano Fabrizio) Professore di Matematiche sublimi ed applicate *Pisa.*

PANIZZA (Dottor Bartolommeo) Prof. di Anatomia *Pavia.*

PIANCIANI (Padre Gio. Battista) della Compagnia di Gesù Prof. di Fisica al Collegio Romano *Roma.*

PIOLA (Don Gabrio) Nobile Milanese Dottor di Matematica, Segretario dell'I. R. Istituto del Regno Lombardo Veneto *Milano.*

PLANA (Giovanni) Commendatore *Torino.*

RANGONI (Marchese Luigi) Ministro di pubblica Istruzione e di Economia di S. A. R. il Duca di Modena *Modena.*

RUSCONI (Mauro) Zoologo naturalista *Pavia.*

SANTINI (Giovanni) Dottore in Filosofia, Cavaliere dell'Ordine Reale di Dannebrog, Professore di Astronomia nella I. R. Università di Padova, Socio della I. R. Accademia di Padova, e della R. Società Astronomica di Londra, dell'Istituto Pontificio di Bologna ec. *Padova.*

Residenza

SAVI (Gaetano) Cavaliere dell' Ordine del Merito sotto il titolo di S. Giuseppe, Professore di Botanica e Direttore del Giardino dell' I. R. Università di Pisa *Pisa.*

TENORE (Cavalier Michele) Professore di Botanica e Direttore del R. Orto Botanico nella R. Univesità degli studj *Napoli.*

TOMMASINI (Giacomo) Professore di Terapia speciale e di Clinica medica nell' Università di Parma, Ispettore onorario della pubblica istruzione, medico consulente della Persona di Sua Maestà, Protomedico dello Stato, decorato della medaglia de' benemeriti della pubblica sanità 1836, Socio dell' Istituto di Bologna, delle Accademie di Parigi, Londra, Napoli ec. *Parma.*

TRAMONTINI (Giuseppe) Professore di Geometria descrittiva ed architettura civile nella R. Università di Modena, Accademico di Napoli ec. *Modena.*

VFNTUROLI (Cavalier Giuseppe) Prefossore emerito di matematica applicata nella Pontificia Università di Bologna, Presidente del Consiglio degli Ispettori d'acque e strade in Roma, Pensionario anziano. *Roma.*

ZAMBONI (Abate Giuseppe) Professore di Fisica sperimentale e matematica applicata nell' I. R. Liceo di Verona. *Verona.*

DIVISIONE

DEI SOCJ ATTUALI NELLE DUE CLASSI MATEMATICA E FISICA

Li numeri arabici indicano quali sono i Tomi in cui sono inserite le loro Memorie e quante di numero.

CLASSE MATEMATICA.

Abbati 19.
Bianchi 20. 20. 20. 21. 21. 22. 22. CXVII.
Bordoni 17. 18. 19. 19. 19. 20.
Carlini 18. I. 20.
Fossombroni 3. 7. 9. 12. 13. 17. 19. 22.
Giorgini 21.
Inghirami . . . .
Lombardi 19. I. 20. I. (21). 21. I. 21. I. 22. I. XXI. 22. XXXIV.
Magistrini 16. 17. 19.
Mainardi 21. 22.
Michelotti . . . .
Mossotti 19. 21.
Plana 17. 18. 19.
Piola 20. 21. 22.
Rangoni 19. 19. 21.
Santini 17. 19. 20. 21.
Tramontini 21.
Venturoli 12. 14. 19.

CLASSE FISICA.

Alessandrini . . . .
Amici 19. 19. 19 21.
Avogadro 19. 20.

Bellani 22.
Belli 22.
Bertoloni 20. 21. I. 21.
Catullo . . . .
Configliachi 20.
Fusinieri 22.
Genè . . . .
Marianini. 21
Matteucci . . . .
Melloni . . . .
Panizza . . . .
Pianciani 22. 22.
Rusconi . . . .
Savi 21. 21. 22.
Tenore 22.
Tommasini 21.
Zamboni 19. 20. 20. 21.

SOCII ONORARII

	Residenza
Berruti Dottor Secondo	*Torino.*
Brambilla Professor Paolo	*Milano.*
Cagnoli Ottavio	*Verona.*
Dietrichstein Sua Eccellenza Conte Maurizio Presidente della I. R. Biblioteca di Vienna e del Museo di Numismatica ed Archeologia ec. ec. Maggiordomo della Corte di S. M. l'Imperatrice d'Austria	*Vienna.*
Fabeni Dottor Vincenzo	*Padova.*
Gargallo Cav. Tommaso Marchese di Castellentini nel Regno di Napoli	*Napoli.*
Giorgi Padre Eusebio delle Scuole pie	*Firenze.*
Landi Cav. Ferdinando	*Piacenza.*
Lugli Professor Giuseppe	*Modena.*
Meneghelli Professor Antonio	*Padova.*

	Residenza
Palletta Dottor Marco	*Milano.*
Pezzana Cav. Professor Angelo Bibliotecario Ducale	*Parma.*
Rovida Cav. Professore Cesare	*Milano.*
Ruffo Sua Eccellenza Don Folco Principe di Scilla	*Napoli.*
Zoppi Dottor Gio. Battista	*Verona.*

SOCII STRANIERI

Arago Matematico e Fisico	*Parigi.*
Berzelius Chimico	*Stokolm.*
Biot Fisico Matematico	*Parigi.*
Cauchy Agostino Luigi Matematico	*Parigi.*
Decandolle Cav. Agostino Piramo	*Ginevra.*
Faraday Chimico e Fisico	*Londra.*
Fuss Paolo Enrico Segretario della Imperiale Accademia di Pietroburgo	*Pietroburgo.*
Gauss Matematico	*Gottinga.*
Gay-Lussac Fisico	*Parigi.*
Herschel Astronomo S. F. W.	*Londra.*
Humboldt Barone Alessandro	*Berlino.*
Thenard Chimico	*Parigi.*

Segretario

Lombardi Antonio	*Modena.*

Vice-Segretario Amministratore

Ruffini Avvocato Luigi	*Modena.*

ANNALI

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

CONTINUATI

DAL SOCIO E SEGRETARIO

ANTONIO LOMBARDI

DAL PRIMO GENNAJO MDCCCXXXVII A TUTTO IL MDCCCXL.

---

325. La Società scelse il sig. Cavaliere Michele Tenore Professor di Botanica in Napoli a rimpiazzare il Socio attuale Professor Morichini di cui si annunziò al § 322 la perdita, e mentre con mia Circolare 10 Marzo 1837 partecipai questa scelta ai signori Colleghi, dovetti proporre loro una nota di Candidati per sostituire un altro Socio attuale all' Arciprete Giuseppe Maria Giovene di Molfetta nel Regno di Napoli pensionario anziano, mancato di vita nella grave età di anni 84, e la cui pensione passò di diritto al Socio attuale sig. Professore Gio. Battista Magistrini abitante a Bologna.

326. L' Imperial Regio Istituto di Milano trasmise alla Società nostra il seguente programma in cui proponevasi un premio di lire Italiane 1500 a chi avesse sciolti alcuni quesiti di agricoltura, e come meglio si vedrà dallo stesso che quì si inserisce:

N. 7931

Regno Lombardo Veneto

IMPERIALE REGIO ISTITUTO

Di Scienze, Lettere, ed Arti.

PROGRAMMA.

In esecuzione delle sovrane benefiche disposizioni che permisero sia continuata la distribuzione di un premio biennale scientifico d' Italiane lire 1500, *pari ad Austriache* 1724 : 13, *l' I. R. Istituto nell' adunanza del* 7 *corrente dicembre ha deliberato che pel concorso, che spirerà coll' anno* 1838, *venga corrisposto esso premio il dì* 30 *maggio* 1839, *onomastico di S. M. I. R. A., a chi avrà presentata la migliore soluzione dei seguenti quesiti tendenti all' utilità dell' agricoltura, sorgente prima della ricchezza del Regno Lombardo-Veneto.*

1.° *Quali vantaggi possono ridondare all' agricoltura lombardo-veneta dalla più accurata ed estesa coltivazione delle radici bulbose.*

2.° *A quali degli animali domestici conferiscano meglio le singole radici bulbose pel mantenimento e per l' allevamento loro, e come convenga meglio conservarle ed apprestarle.*

3.° *Di quali di esse radici vorrebbesi preferire la coltivazione, avuto riguardo, in quanto alla barbabietola, anche alla produzione dello zuccaro indigeno cristallizzabile.*

4.° *Quali più utili modificazioni avrebbersi quindi ad introdurre nell' avvicendamento agrario secondo le condizioni speciali e la natura diversa dei terreni.*

5.° *Quale la migliore pratica in questo ramo di economia rurale, se le attuali lombarda o veneta, o le straniere. Questo confronto dovrà essere corredato dei relativi quadri sinottici; non omesse altresì le osservazioni sugli effetti presumibili dell' aumento delle sostanze animali tanto come ali-*

mento dell' uomo, quanto come oggetto di manifattura e di commercio.

I dotti nazionali e stranieri, eccettuati i soli membri dell' I. R. Istituto del Regno Lombardo-Veneto, sono egualmente ammessi al concorso, e potranno a loro grado valersi della lingua italiana, della latina, della tedesca e della francese. Gli scritti dovranno essere rimessi franchi di porto entro tutto l' anno 1838 alla Segreteria dell' I. R. Istituto medesimo in Milano, e giusta le norme accademiche saranno contraddistinti da un' epigrafe ripetuta in su di un biglietto suggellato, che contenga il nome, cognome ed indicazione del domicilio dell' autore.

Non verrà aperto che il biglietto dello scritto premiato, e gli altri scritti coi rispettivi biglietti suggellati saranno restituiti sulla domanda e presentazione della ricevuta di consegna.

Milano, il 30 dicembre 1836.

Il F. F. di Direttore delle due Classi.

CAV. CARLINI.

Il F. F. di Segretario.

FANTONETTI.

327. La votazione per sostituire un Socio all'Arciprete Giovene si decise a favore del Padre Gio. Battista Pianciani della Compagnia di Gesù Professore di Fisica al Collegio Romano. Come il Cav. Tenore gradì l' onore compartitogli dalla Società, così fece pure il Padre Pianciani come risulta dalle risposte che io ricevei da questi nuovi Socii, la scelta dei quali io comunicai con circolari 10 Marzo e 2 Giugno 1837 ai signori colleghi.

328. Continuando sempre la Società a perdere dei cooperatori, dovetti con altra mia 16 Dicembre di detto anno proporre sempre per disposizione di sua Eccellenza il meritissimo

nostro Presidente una nota di Candidati affine di sostituire un Socio attuale al Professor Bartolomeo Barani mancato di vita il 18 Novembre 1837, nella quale circostanza prevenni li signori Socii che andava a spedir loro la parte fisica del Tomo XXI delle nostre Memorie, di cui erasi allora compita la stampa. Il nuovo Socio di cui io partecipai la scelta con la Circolare 1 Marzo 1838 fu il sig. Professore Antonio Alessandrini di Bologna, che con sua lettera espresse alla Società il singolar suo gradimento per tale nomina.

329. Scorse l'anno 1838 senza avvenimenti importanti per il Corpo Accademico e solo nel 12 Marzo 1839 si diede ai Socii la notizia della morte del Socio attuale Padovano l'Abate Salvator Dal-Negro Professore di Fisica in quella I. R. Università, a cui venne sostituito coi soliti metodi regolari il Zoologo sig. Mauro Rusconi di Pavia, al quale io partecipai questa determinazione della Società nostra perlocchè egli con officiosa lettera la ringraziò. E mentre i signori Colleghi erano da me informati di tale scelta mi convenne propor loro nella Circolare 21 Giugno 1839 una nuova nota di soggetti per cuoprire il posto rimasto vacante nella schiera dei nostri Socii attuali per la morte avvenuta nel Febbrajo a Firenze del matematico Pietro Paoli.

330. Vide l'Italia nell' anno presente per la prima volta in Pisa la Riunione dei Professori e Cultori delle scienze naturali, e ciò la mercè della magnanima protezione accordata alle Scienze dall'Augusto Principe Gran-Duca di Toscana Leopoldo II splendido Mecenate, come comprovasi dalla lettera circolare che quì unita si riproduce, e dalla quale risulta che fra i benemeriti promotori di questa così utile istituzione la Società Italiana conta li suoi Socii attuali i Cavalieri Gio. Battista Amici, e Gaetano Giorgini.

Chiarissimo Signore

La fama ognor crescente delle Riunioni annue che i Professori e Cultori Tedeschi delle Scienze naturali sogliono tenere in una città della Germania per ciascun congresso diversa, invitandovi eziandio gli Stranieri, venne in Italia viemaggiormente diffusa per un Articolo relativo avidamente letto, non ha guari, nella Biblioteca Italiana (T. 91, pag. 267). Il desiderio perciò di vedere una simile istituzione fra noi, desiderio che già in molti dei nostri Scienziati allignava, si accrebbe in loro, e in non pochi altri si propagò di maniera, che ai voti nostri sonosi riuniti quelli di persone riputatissime nelle suddette facoltà, le quali accennarono altresì che la città di Pisa estimavano opportunissima a congregarvisi la prima volta colle semplicissime norme della Germania, e quindi provvedere in quale altra città d'Italia potesse rinnovarsi la convocazione per l' anno avvenire.

Se l' amore del luogo natio non rende sospetto il pensiero di alcuno tra i Soscrittori al presente foglio, se il dritto veder dei nostri Colleghi non può interpretarlo diversamente, bene ci sembra che si apponesse chi giudicava doversi incominciare da Pisa. Perchè questa città che fiorisce nel centro della nostra Penisola in ogni maniera di studj, è pure assai vasta ed opportuna ad albergare molti forestieri di ogni grado, è amena tranquilla e ricca di Musei; ed a perenne e scambievole onore della Religione, della Filosofia e delle Belle Arti, mostra altera la Torre da cui si bene esplorava le maraviglie del cielo il maggior dei Filosofi naturali dato dalla Toscana alla comun patria.

Se finora i Principi della Germania gareggiarono nell' offerire cospicue città dei loro Stati per cotali Riunioni, cui piace

rimaner libere nella scelta, come per esempio (senza ritornar molto indietro) abbiam veduto che S. A. R. il Granduca di Baden desiderasse di averla nell'amena Friburgo, dopo che la Cesarea Maestà dell' Imperatore d'Austria e del Re del Regno Lombardo Veneto aveala volentieri accolta nella Capitale della Boemia, come S. M. il Re di Wurtemberg albergavala prima nella stessa Stoccarda, e come in quest' anno S. A. il Principe di Waldeck invitolla in Pirmonte, chi potrà dubitare che S. A. I. e R. il Serenissimo Granduca di Toscana non sarà per godere assai di questo nostro invito nella sua dotta Pisa? A niuno forse degli Scienziati cui scriviamo giunge nuovo che l'A. S. I. e R. piacesi di possedere nella sua inestimabile Biblioteca privata qualunque bell' opera che tratti di scienze naturali, e che le ama e le coltiva a segno, che la severa Società Reale di Londra, con raro esempio, lo aggregava tra' suoi.

Seguendo pertanto il consiglio di molti, e l'approvazione di altri, nè discostandosi punto dalle pratiche tanto felici in Germania, veniamo ad annunciare che nel bel mezzo delle ferie autunnali del corrente anno 1839 dal dì primo al quindicesimo di Ottobre inclusive, sarà aperto in Pisa il Consesso dei Professori e dei Cultori delle scienze fisiche in Italia, comprese la Medicina e l' Agricoltura si utili alla umanità. E ciò conseguentemente ci affrettiamo di partecipare ai Professori delle scienze suddette nelle varie Università degli Stati italiani, ai Direttori degli studi delle medesime, ai Capi e Direttori dei Corpi del Genio, degli Orti botanici, dei Musei di storia naturale, ai Lincei di Roma, ai Membri dell' I. e R. Istituto di Milano, della R. Accademia delle scienze di Torino, della Società Italiana di Modena, dell' Istituto di Bologna, della R. Accademia delle scienze di Napoli, della Gioenia di Catania, e dell' I. e R. Georgofili di Firenze; non senza darne anche contezza oltremonti ai Capi delle più famose Accademie, affinchè possano comunicarne la notizia ai rispettabili Soci, che tra noi saranno meritamente accolti, esibendo i loro rispettivi diplomi.

È superfluo il trattenersi qui sul vantaggio che può derivare dal commercio delle peculiari idee dirette in ispecie al perfezionamento delle arti, poichè Voi Chiarissimo Signore, siete persuaso che questo mezzo è uno de' più efficaci a diffondere utili cognizioni, ed a conseguire sì nobile scopo.

Al Cattedratico italiano, seniore tra' presenti in Pisa nel primo giorno di Ottobre, toccherà aprire l' adunanza della quale siederà Reggitore in tutta la sua durata; ed il Segretario sarà scelto di suo genio tra' Professori della Università di Pisa. L' Assemblea generale si dividerà il secondo giorno in quante sezioni verranno suggerite dal riscontro delle diverse branche scientifiche coltivate dagli intervenuti; ed i membri di ciascuna sezione sceglieranno a loro stessi un Presidente ed un Segretario italiano. L' Assemblea generale medesima deciderà nel settimo giorno come e dove sarà per adunarsi nell' anno futuro.

Al cominciare del mese di Agosto si spediranno nuove lettere circolari, dalle quali verranno indicati i provvedimenti locali, non meno per gli alloggi che per tutto ciò che riguardar possa la comoda, lieta e pacifica dimora di tutti coloro che si compiaceranno d' intervenire.

Firenze, 28 Marzo 1839.

Principe CARLO L. BONAPARTE

Cav. VINCENZIO ANTINORI,
Direttore dell' I. e R. Museo di Fisica e Storia Naturale di Firenze.

Cav. GIO. BATTISTA AMICI,
Astronomo di S. A. I. e R. il Granduca di Toscana.

Cav. GAETANO GIORGINI,
Provveditor Generale dell' I. e R. Università di Pisa.

Dott. PAOLO SAVI,
Prof. di Storia Naturale nell' I. e R. Università di Pisa.

Dott. MAURIZIO BUFALINI,
Prof. di Clinica e Medicina nell' I. e R. Arcispedale di Firenze.

331. Successore del Cavalier Paoli fu il sig. Macedonio Melloni di Parma Direttore del Gabinetto fisico-meteorologico a Napoli, il quale rispose alla partecipazione fattagli esprimendo il sommo suo gradimento di essere stato ammesso nel nostro Corpo Accademico.

332. La Reale Accademia di Scienze lettere ed arti di Lisbona trasmise in dono l'intiera serie delle sue Memorie di scienze, di economia e letteratura alla Società, che corrispose a sì nobile offerta con spedire all'Accademia Portoghese il corpo completo delle sue memorie. Compita la stampa della parte matematica delle nostre Memorie io ne feci la spedizione ai Socii ed associati nel Luglio dell'anno 1839.

333. Proseguiva la morte a mietere le vite dei nostri Socii attuali, poichè tra il Settembre e l'Ottobre dell'anno 1839 si perdè a Torino il Cavaliere Professor Giorgio Bidone Idraulico, e nel 12 Febbrajo 1840 ci mancò in Roma l'Abate Andrea Conti, Astronomo; perlocchè osservando sempre le regole statuarie si sostituì al Socio Bidone un altro Torinese il sig. Dottor Giorgio Gènè Professore in quella R. Università di storia naturale e geologia, ed attuale Segretario di quella illustre Accademia delle scienze; il posto poi dell'Abate Conti venne occupato dal Professor di Fisica in Ravenna sig. Dottor Carlo Matteucci. Informati da me questi nuovi Socii della loro elezione mi risposero con li sentimenti della più sincera riconoscenza per la distinzione loro usata dalla Società.

334. Il figlio del celebre Astronomo e medico Olbers nostro Socio straniero si fece premura di partecipare alla Società aver egli perduto nella mattina del 2 Marzo 1840 il padre, per locchè io diedi al nominato figlio Olbers risposta ringraziandolo della benchè trista partecipazione da lui fattaci.

335. Pervenuta al Corpo Accademico una Circolare del chiar. sig. Conte Alessandro Saluzzo in cui avvisava gli scienziati Italiani che la loro seconda adunanza tener doveasi per l'anno 1840 a Torino dal 15 al 30 Settembre, io mi faccio un dovere di quì inserirla, e ad un tempo prevengo il pub-

blico che nella Segreteria della Società esiste il *Regolamento generale per le annuali Riunioni Italiane dei Cultori delle scienze naturali* stampato nel 1839 a Pisa trasmessomi unitamente alla Circolare che, come dissi, quì si riproduce.

SECONDA RIUNIONE

DEGLI SCIENZIATI ITALIANI

In conformità della deliberazione presa dagli Scienziati Italiani nell'adunanza generale del giorno 3 di Ottobre 1839 in Pisa e gradita da S. M. il Re mio Augusto Signore, la seconda riunione degli Scienziati Italiani si terrà quest'anno nella Città di Torino dal giorno 15 al giorno 30 del mese di Settembre.

Mi reco quindi ad onore di porgere avviso a tutti coloro che secondo il Regolamento generale hanno il diritto di esserne Membri cioè agli Italiani ascritti alle principali Accademie o Società istituite per l'avanzamento delle Scienze naturali, ai Professori delle scienze fisiche e matematiche, ai Direttori degli alti studi, o di stabilimenti scientifici, agli Ingegneri civili e delle miniere ed agli uffiziali dei Corpi delle armi dotte. Gli esteri che pei loro titoli ed affari appartengono alle indicate categorie saranno pure ammessi alla Riunione.

L' uffizio di ammissione si aprirà col giorno 10 di Settembre, e gli scienziati riceveranno al loro arrivo una Istruzione stampata che conterrà l'indicazione dell'uffizio suddetto, e quelle altre notizie che saranno credute ad essi necessarie ed opportune.

Giusta l'Articolo VI del Regolamento generale ho nominato Assessori della Riunione il Cav. Prof. FRANCESCO ROSSI Vice Presidente della R. Accademia delle Scienze, Preside del Collegio di Chirurgia in questa Regia Università ec. e il sig. ANGELO SISMONDA Professore di mineralogia e Direttore del Museo mineralogico.

I Presidenti delle Accademie, i Rettori delle Università, i Capi degli Istituti Scientifici, ec. sono pregati di partecipare ai Corpi cui presiedono queste notizie.

Torino li 27 Aprile 1840.

Il Presidente Generale
Conte *ALESSANDRO SALUZZO*

Il Segretario generale
Prof. Giuseppe Géné.

336. L'Imperial Regio Istituto del Regno Lombardo Veneto richiamò l'attenzione degli Architetti Italiani sulla costruzione dei tetti degli edifizii, e propose con programma del dì 5 Aprile 1840 trasmesso alla Società Italiana, un premio di Austriache lire 1700 per la Memoria su questo argomento, che ne fosse poi giudicata meritevole ec. e come meglio rilevasi dal programma stesso che quì si soggiunge:

REGNO LOMBARDO-VENETO

IMPERIALE REGIO ISTITUTO

DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI.

PROGRAMMA.

Incaricato l' I. R. Istituto di proporre un quesito per l' aggiudicazione del premio scientifico biennale concesso dalla Sovrana Munificenza, ha deliberato di coronare la miglior Me-

moria sulla costruzione dei tetti degli edificj tanto di genere umile quanto di genere grandioso, inteso l' argomento nel senso scientifico e tecnologico. Perciò i concorrenti dovranno:

1.° Prendere in esame ragionato i principali fra i varii metodi di costruzione praticati all' estero soggiungendo i propri divisamenti per introdurli presso di noi e migliorarli.

2.° Indicare i materiali che può fornire la Lombardia più adatti a tali costruzioni, ed insegnare il miglior modo di prepararli e porli in opera, considerata possibilmente l' economia.

3.° Dimostrare quali sieno i preferibili fra i mezzi a procurare lo scolo delle acque, massimamente nella circostanza dello squagliamento delle nevi, avendo cura che i condotti non abbiano con filtrazioni nè a danneggiare, nè a deturpare gli edificj.

4.° Proporre una costruzione che allontani possibilmente i pericoli degli incendj e ne agevoli i soccorsi in caso sinistro.

5.° Unire le tavole dimostratrive in disegni di sufficiente grandezza perchè all' uopo possano servire all' insegnamento tecnologico.

Il premio è di austr. lir. 1700.

I Dotti nazionali e stranieri, eccettuati i Membri effettivi dell' I. R. Istituto, sono egualmente ammessi al concorso, e potranno valersi indifferentemente delle lingue italiana, latina, francese e tedesca. Gli scritti dovranno essere rimessi franchi di porto entro tutto l' anno 1841 alla segreteria dell' Istituto medesimo residente in Milano nell' I. R. Palazzo delle Scienze ed Arti di Brera, e giusta le norme accademiche saranno contraddistinti da un' epigrafe, ripetuta su di una scheda suggellata che contenga il nome, cognome e l' indicazione del domicilio dell' Autore.

Non verrà aperta se non la scheda dello scritto premiato, il quale rimarrà di proprietà dell' I. R. Istituto, e gli altri scritti colle rispettive schede suggellate saranno restituiti dietro

domanda e presentazione della ricevuta di consegna nel limitato periodo di un anno dopo la proclamazione del conferito premio.

Milano, 5 Aprile 1840.

Il Presidente
CASTIGLIONI

Il F. F. di Segretario
Piola.

337. Li signori Barone Alessandro Humboldt di Berlino e Cavaliere Agostino Piramo Decandolle di Ginevra furono secondo le regole statutarie della Società nostra nominati a Socii stranieri invece di Olbers e Poisson defunti; e con mia Circolare 4 Agosto 1840 partecipai questa determinazione del Corpo Accademico ai signori Colleghi, proponendo a un tempo per disposizione di sua Eccellenza il Presidente in forza dell'Art. VI del nostro statuto a Socii onorarii li signori Palletta Dottor Marco Autore dell' Elogio del Socio Cavalier Gio. Battista Palletta, Milano, Berruti Dottor Secondo che ha scritto l' Elogio del Socio Prof. Anton-Maria Vassalli-Eandi, Torino, Fabeni Dottor Vincenzo Autore della Orazione in lode del Prof. Stefano Gallini, Padova, Giorgi Padre Eusebio delle Scuole pie che ha scritto li Cenni storici sulla vita ecc. del Cavaliere Leopoldo Nobili, Firenze.

Questa proposizione fu approvata a grande pluralità di voti, ed io informai con altra mia Circolare del 16 Ottobre 1840 i Colleghi di questa determinazione presa dalla Società, e scrissi le solite lettere di partecipazione ai nuovi eletti tanto *Stranieri* che *Onorarii* i quali tutti gentilmente risposero e gradirono la loro elezione.

338. Si continuò a compensare alla fine d'ogni anno le spese di posta a quei signori Socii abitanti fuori di Modena che risposero pienamente a tutte le Circolari loro spedite, e per esprimere la dovuta riconoscenza agli Autori che hanno trasmesse in dono alla Società nostra opere o memorie scientifiche dopo la pubblicazione della parte matematica del T. XXII dei nostri Atti, io soggiungo quì il Catalogo di queste produzioni.

ELENCO DEI LIBRI

MANDATI IN DONO

ALLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA.

Dal 1 *Maggio* 1839 *a tutto Marzo* 1841.

Pezzana Cav. Angelo. Elogio storico di Pietro Rubini. Edizione terza migliorata dall'Autore. 8.° Pistoja Tipografia Cino 1839.

Ziccardi Dottor Michel Angelo. Dell' Epizootia di taluni animali nel Sannio al chiar. Giovanni Semola 12.° Napoli.

—— Della descrizione delle acque termo-minerali e delle stufe dell' Isola d' Ischia del Cav. Stefano Chevalley de Rivaz fatta in Italiano sulla terza edizione francese e di note fornita dal Dottor Michel Angelo Ziccardi di Campo basso. Discorso cavato da rapporto fattone all'Accademia Pontaniana il dì 4 Luglio 1838 4.°

Cervelleri Dottore F. De Galvanismi acupuncturae magneticae conjuncti nonnullis in nervorum morbis praestantia. Epistola, 8.° Napoli 1839.

Memorie economiche dell'Accademia Reale delle Scienze di Lisbona per l' avanzamento dell' agricoltura, delle arti, e della industria del Portogallo e delle sue conquiste. Tomi cinque in 8.° Lisbona 1789-1815.

Memorie di Letteratura Portoghese pubblicate dall'Accademia stessa, 8.° Lisbona. Tomi otto 1792-1814. In lingua Portoghese

N. B. il tomo 8.° *è composto di due parti ma in un sol volume.*

Bullettino delle Scienze mediche. Bologna per gli anni 1839, 1840.

Zantedeschi Prof. Francesco. Saggi dell' Elettro-magnetico, e magneto-elettrico, 8.° Venezia Tipografia Armena di S. Lazzaro.

Michelotti Joannis. Specimen Zoophytologiae diluvianae. 8.° Augustae-Taurinorum.

Gènè Josephi. Synopsis reptilium Sardiniae indigenorum. Augustae Taurinorum. Typographia Regia 4.°

—— De quibusdam insectis Sardiniae novis aut minus cognitis Fasciculus II.

Memorie della Società medico-chirurgica di Bologna. Vol. II. Fasc. 2°, 3°, 4.°

Memorie della Società Reale Astronomica di Londra, ivi 1838 4.° Tomo X.°

Associazione Britannica per l'avanzamento delle scienze. Rapporto della settima radunanza tenuta a Liverpool 1837. T. VI°, Londra 1838, 8.°

Bruschetti Ingegnere Giuseppe. Appendice alla sua Memoria sul modo più conveniente e facile di liberar Como e Lecco dalle innondazioni 8.°

—— Seguito dell'Appendice stessa in risposta all' esame della detta Memoria pubblicato dal sig. I. P. F. nel fascicolo di Gennajo 1839 della Biblioteca Italiana.

Questi due scritti sono inseriti nei Tomi 92, 93 *di essa Biblioteca.*

Distribuzione dei premii di industria ed agricoltura dell' anno 1838. Venezia 1839, 8.°

Giulio C. I. Professore di Meccanica. Di un caso particolare della dottrina dell' efflusso dell' acqua dai vasi. Torino stamperia Reale 1839. 4.°

De la Casa Prof. Vittorio. Cose di analisi sublime, d'Algebra ordinaria e di Trigonometria piana, 4.° Padova.

Inserite negli Annali delle Scienze Fisiche del Dottor Fusinieri.

—— Altro metodo per assegnare le relazioni differenziali in termini finiti.

Questa memoria è il seguito di quella registrata nell'elenco che trovasi in fronte alla parte matematica di questo tomo.

Kupffer A. T. Annuaire magnetique et météorologique du Corps des Ingenieurs des mines de Russie; ou Recueil d'Observations magnetiques et météorologiques faites dans l'etendue de l'Empire de Russie dans l'annèe 1837. S. Petersbourg 1839, 4.°

Ateneo di Venezia. Esercitazioni scientifiche e letterarie. T. II, 4.° ivi 1838.

Namias sig. Dottor Giacinto. Giornale per servire ai progressi della Patologia e della Terapeutica da lui compilato. 8.° Venezia 1831-1839 Fascicoli 31.

Accademia I. R. di scienze, lettere ed arti di Padova. Nuovi saggi. ivi 1838 in 4.°

Annunzio delle opere botaniche del sig. Cavaliere Professore *Michele Tenore* Socio attuale della Società Italiana delle Scienze. 8.° Napoli.

Tenore Cav. Michele. Memoria sulle diverse specie e varietà di cotone coltivato nel Regno di Napoli con le istruzioni pel coltivamento del Cotone Siamese, e le notizie sulle altre specie di cui puossi provare l'introduzione. 4.° Napoli 1839.

Marianini Dottor Pietro. Commentario sul Colera asiatico. 8.° Vigevano 1836.

—— Osservazioni sulla pratica del solfato di Cinconina e cenno di alcune febbri intermittenti trattate con la Cinconina pura. 8.° Mortara 1836.

Cacciatore Cav. Niccolò. Esercizio di Goniometria e di trigonometria sferica. 8.° Palermo 1837.

—— Raccolta di tavole utili per le osservazioni astronomiche, 8.° ivi.

—— Sulle macchie del sole. Lettera al sig. Ernesto Capocci 8.° ivi 1839.

Cacciatore Innocenzo. Risposta all' invito della Deputazione metrica di Palermo, 8.° ivi 1839.

Hecker G. F. C. Professore di medicina a Berlino. La peste Antoniniana, versione dall' originale con note del Dottor Valentino Fassetta medico primario dell' Ospedale civile e Provinciale di Venezia ec.

N. B. il donatore è il sig. Dottor Fassetta.

Matteucci Prof. Carlo. Sopra gli elementi del progresso della scienza dell'Organismo. Discorso. Edizione seconda ampliata dall'Autore. 8.° Forlì ap. Casali 1839.

Cervetto Giuseppe Medico. Di Gio. Battista del Monte e della medicina Italiana del Secolo XVI. Verona 1839. 8.°

Cocconcelli Cav. Antonio. Istruzioni di Idraulica teorico-pratiche. 8.° Parma appresso Rossetti 1832, tomi tre.

Tronchetti Dottor Odoardo. Rendiconto statistico clinico degli infermi curati a Fucecchio nel primo anno della sua condotta. 8.° Torino ap. Fontana 1839.

—— Della sorte dei medici specialmente condotti, e dei mezzi più idonei per farla migliore. 8.° Pistoja ap. Cino 1840.

Silva Domenico da Brescia. Trebbiatojo. *Estratto dalla Gazzetta di Milano del Settembre* 1839. *Con disegno a colori sopra una scala grande.*

Fusinieri Dottor Ambrogio. Annali delle scienze del Regno Lombardo Veneto, Gennajo Febbrajo e Marzo 1840.

Atti dell'Accademia Irlandese, T. XVIII, parte 2, 4.° Dublino 1839.

Avogadro Cav. Amedeo. Fisica dei Corpi ponderabili. 8.° Torino 1839, T. II.

Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie seconda, Tomi I e II.

Giorgini Cav. Gaetano. Ragionamento sopra il regolamento idraulico della pianura Lucchese e Toscana interposta fra l'Arno ed il Serchio. 8.° Pisa ap. Pieraccini 1839.

Mossotti Prof. Ottaviano Fabrizio. Sulla Costituzione del sistema stellare di cui fa parte il Sole. 8.° Corfù Tipografia del Governo 1840.

Liancourt Comte A. Godde. Reflexions sur les bateaux de salut et quelqu' autres moyens destinès a preserver la vie aux Naufragès. 8.° Paris 1839.

Rivelli Dottor Giacomo. Osservazioni sopra allo svolgimento de' corpi organici le quali *appoggiano direttamente* la dottrina palingenica. Parte prima ed appendice. 8.° Fano 1839 appresso Giovanni Lana.

—— Articolo ovologico tratto dal *Raccoglitor medico di Bologna.*

Estiller Emanuele. Trattato elementare di Fisica matematica. T. I. Meccanica 8.° Palermo 1838.

Giuli Giuseppe. Sull'influenza che sembrano avere le correnti elettriche per ristabilire la salute in alcune malattie ec. 8.° Bologna 1840.

Istituto Regio Imperiale del Regno Lombardo-Veneto. Memorie Vol. V. 4.° Milano 1838.

Mainardi Professor Gaspare. Lezioni di introduzione al calcolo sublime. Parte II, 8.° Pavia 1839.

—— Estensione del metodo immaginato da *Daniele Bernoulli* per risolvere le equazioni algebraiche col mezzo delle serie ricorrenti.

Inserita nel bimestre VI degli Annali delle scienze di Fusinieri 1839.

Bruschetti Ingegnere Giuseppe. Memoria delle macchine locomotrici e stazionarie ad uso di motore per trasporti celeri sopra le vie di terre e di acqua in Lombardia.

Inserita nel T. 96 *della Biblioteca Italiana Milano* 1840.

—— Sulla scelta delle linee per le strade di ferro. (*Inserita nel T.* 98, *della Biblioteca Italiana.*)

Bellavitis Giusto. Sopra alcuni teoremi di geometria, brano di lettera al sig. Girolamo Resti-Ferrari.

Inserita nel bimestre IV dei suddetti annali Fusinieri per l' anno 1832.

—— Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di geometria analitica. Calcolo delle Equipollenze (*V. il V e VI bimestre anno* 1835 *di detti Annali*).

—— Metodo delle equipollenze (*V. li bimestri V, VI* 1837.)

—— Saggio di Geometria derivata 4.° (*V. Saggi nuovi della I. R. Accademia di Padova Vol. IV.*)

—— Effemeridi di Milano per l' anno 1840.

Cipelli Dottor Carlo sostituito alla Cattedra di Anatomia e fisiologia in Parma. Osservazioni microscopiche sulla membrana interna dei vasi. 4.° Parma 1840.

Cervelleri P. Professeur d'Anatomie. De l' emploi de l' Electro-magnetisme dans les maladies des nerfs ec. 8.° Naples 1840.

Bellani Canonico Angelo. Elenco d' uomini celebri per santità per dottrina e per dignità di nome GERARDO, che fiorirono nei secoli bassi in occasione che si celebrò in Monza la festa di S. GERARDO dei tintori. ivi 1840, 12.°

Berruti Secondo Professore. Esperienze sulla esistenza delle correnti elettrico-fisiologiche negli animali a sangue caldo ec. Torino 1840.

Bellani Canonico Angelo. Sulla formazione della grandine (*inserita nella Biblioteca Italiana T.* 99.)

De Vico Padre Francesco D. C. D. G. Memoria intorno a parecchie osservazioni fatte nella specola della Università Gregoriana in Collegio Romano dagli Astronomi della Compagnia di Gesù l' anno 1839. 4.° Roma Tipografia Marini 1840.

Santini Professore Giovanni. Descrizione del Circolo meridiano dell' I. R. Osservatorio di Padova seguita da un Catalogo di Stelle fisse per l' anno 1840 distribuito in zone rapporto alla declinazione. 4.° Padova 1840, Coi tipi Cartellier e Sicco.

Cesarini Emilio Avvocato. Principj della Giurisprudenza commerciale esaminati. Edizione seconda con molte variazioni ed aggiunte dell'Autore. 4.° Macerata 1840 ap. Cortesi.

Selmi Francesco. Nota intorno all' azione dei cloruri di ammonio, e di sodio sul cloruro mercuroso. *Inserita nel giornale scientifico modenese. Dicembre* 1840.

Rubbiani Dottor Nicola. Sull' injezione polmonale a metallo già eseguita dall' illustre anatomico modenese Santo Fattori. Lettera diretta al preclaro Cavaliere e Professore Bartolomeo Panizza. 8.° Modena ap. gli Eredi Soliani 1841.

ELOGIO STORICO

DEL CANONICO ARCIPRETE

GIUSEPPE MARIA GIOVENE

SCRITTO DALL'ARCIDIACONO

DON ANDREA TRIPALDI

No che non è più convenevole che giusto il tributar encomii agli illustri trapassati, che per virtù esimie, e non volgar sapere rendutisi distinti nella loro mortale carriera, trassero sù di se la stima dei dotti, non che de' savj la venerazione e il rispetto. Assai più convenevole e più giusto diviene poi l'elogio, e la ragion ben volontieri vi consente, allorquando ricchi di sapere e di virtù, modesti e cauti, celati si tennero alla fama ed agli onori. Che dirò poi se a tali pregi quello aggiungasi del particolare impegno che fecersi ognora simili personaggi di soffocare la lode giustamente loro dovuta, mentre impiegavano tutte le forze dello spirito e del cuore al solo oggetto di giovare ai loro simili, e procurare la pubblica utilità? A questi benefattori della umanità, e benemeriti delle scienze, non encomii, non elogi soltanto, ma pubblici monumenti e magnifici erger si denno per eccitare nei giovani contemporanei una generosa emulazione, e per dimostrare ai posteri che in ogni tempo il Pubblico giusto estimatore delle virtù, e del sapere, è grato a chì tutte impiegò le proprie forze a suo vantaggio, e render seppe dopo morte quegli onori a coloro che vivendo non li curarono. Buon per me che incaricato a nobile disimpegno da chi per meriti e per dottrina il più cospicuo posto occupa nella insigne, e rinomata Società Italiana delle Scienze, l' elogio tesser deggio di tal personaggio, che di tanti elogi è meritevole, quanti furono i rami delle

scienze ch' ei conobbe, che furono ben molti, come ce lo appalesano gli scritti da lui fatti di pubblica ragione. Non ho io duopo di elevatezza di stile, di frasi non comuni, e ricercate, di abbellimento di contornati periodi. A tali mezzi ricorrer debbono quei benchè valenti Oratori, ai quali per la tenuità dei meriti del soggetto lodato non rimane altro partito da scegliere. Basta per me la nuda storia de' fatti e non di tutti, che lungo e nojoso sarebbe il sol cennarli, e son certo che al solo prospetto di essi senza prestigi d' ornamenti, e d' arte esposti, chiunque pesar li vorrà nelle esatte bilancie della ragione, scorgerà gli insigni pregi dell'animo, e l'eccellente bontà di cuore del soggetto che encomio. E quand'anche dicessi solo che vivendo appartenne alla illustre Società Italiana delle Scienze, di cui divenuto era da parecchi anni Socio anziano pensionato, e che morendo venne fino alla tomba accompagnato dalle lagrime e dai singhiozzi non dei dotti, e degli amici soltanto, ma di una intiera popolazione, che non si illude nel discernere il vero merito e le virtù cospicue, e non avrei io pienamente soddisfatto all' impegno assunto? Me fortunato, che ragionar debbo di un Uomo in cui tutti verificaronsi gli esposti pregj, dir voglio dell'Arciprete Don Giuseppe Maria Giovene, nome venerando che sempre ricorderà la riconoscente posterità (1).

Vide egli la luce del giorno in Molfetta (2) il dì 23 Gennajo dell' anno 1753, e benchè morte gli rapisse mentre era

---

(1) Fu aggregato a tutte le Accademie e Società letterarie del Regno di Napoli, alle altre d'Italia, e ad alcune della Germania, e lo sarebbe anche stato ad altre Accademie estere, se la somma sua modestia non glielo avesse impedito.

(2) Una delle più popolose, più commercianti Città della Peucezia in riva all'Adriatico. Nel suo porto ha di proprietà de' suoi cittadini venti fra Pielaghi, Polacche, Scunner, che commerciano coll' estero, e circa cento barche da pesca. Ferace di sommi ingegni fino da tempi remoti conta parecchi i quali sonosi renduti celebri con opere pubblicate. Fra questi rammenterò Antonio Lupis, Antonello de Lacertis, Giuseppe Marinelli, li due Zio, e nipote Riganti, l' ultimo de' quali fu insignito della

in tenera età il suo pio ed illustre genitore Giovanni, non gli mancò l' educazione, poichè la savia genitrice Antonia Graziosi alle cure affidollo di abile ed ottimo Sacerdote il quale gli servì da Ajo, lo indirizzò nel cammino delle virtù, e lo istruì nella buona grammatica fino all' anno ottavo di sua età. Non la vivacità del temperamento che ai fanciulli è presso a poco comune, ma lo sviluppo precoce delle facoltà dello spirito impegnò la buona sua Madre a procurargli l' istruzione particolare dei PP. Gesuiti, che allora occupavano il gran Collegio di Molfetta, ed i quali diligenti indagatori degli ingegni e dei cuori, il momento anelavano per farne acquisto. Per la qual cosa scoperto avendo que' sagaci Religiosi nel giovine allievo qualità oltre ogni credere esimie, lo guidarono innanzi l' età d' anni dodici al termine della carriera di amene lettere, sicchè non discaro riuscì fin d'allora alle muse componendo eleganti versi latini.

Di cuore ben fatto, avido di sapere, e amante della virtù, credè non poter meglio soddisfare la sua brama il Giovene, che coll' abbracciare lo stato ecclesiastico: spiegò quindi il suo desiderio di volersi arruolare alla illustre Compagnia di Gesù, ed ottenuto il consentimento materno, venne mandato a Roma, ove innanzi l' età prescritta fu ammesso con massimo suo giubilo al noviziato. Ma oh perchè in questa valle di lagrime piena e di miserie, non è dato all' uomo il ritrovare la sua felicità! Scorsi non erano per anche otto mesi che colla soppressione di quell' Istituto deluse rimasero le speranze del nostro giovine, e presto a soffrir cominciò le amarezze della vita, e il contrasto degli opposti affetti. Penetrato vivamente il suo cuore dalla idea di doversi staccare da quei Padri che

---

Sacra Porpora, il P. Giovanni Vista de' Minori Osservanti, il Canonico Snuscati, Giovanni Linguiti, Giulio Candido, Felice Fiori. Di essi, e di altri, non che delle loro produzioni ne parlano a dovizia gli Scrittori degli uomini illustri; quelli però che sommo onore rendettero alla patria, sono l'Abate Ciro Saverio Minervini, Giuseppe Saverio Poli, ed in modo speciale il nostro Arciprete Giuseppe Maria Giovene.

tanta cura prendevano di lui, e della sua gracile complessione, decisamente si determinò a voler seguire il loro destino; il che eseguito avrebbe, se la mal ferma salute che forse pel rigido ma savio metodo di vita aveva incontrato, ed una forza imperiosa obbligato non lo avesse di restituirsi in seno alla propria famiglia colla trista prescrizione dei medici di dover abbandonare ogni ben che discreta applicazione allo studio, se desiderio nudriva di veder prolungati i suoi giorni.

Doppia afflizione! ma alla legge della necessità non si resiste, ed in realtà a varj malori soggiacque. Nemico però dell' ozio siccome egli era, ed avido di saper tutto, altra risorsa procurar non potevasi, che di tenersi lontano dai giovanili diletti, dei quali facilmente nojavasi, e di frequentare il più che poteva la conversazione d' uomini dotti, onde aver mezzi di istruirsi. Per la qual cosa non appena invigorito un tal poco nelle forze del corpo, ruppe tutti gli argini, e diede opera agli studj della filosofia, e della matematica nel Seminario vescòvile sotto la direzione del dotto, e zelantissimo Vescovo Orlandi (3) che con trasporto lo amava. Contento bensì, ma non pienamente soddisfatto rimase di questa istruzione, perchè in lui cresceva ognora l'ardore di maggiormente estendere

(3) Celestino Orlandi Padre della Congregazione di S. Pier Celestino per la sapienza e dottrina si acquistò in Roma la venerazione di tutti gli Ordini religiosi, non che la stima degli Eminentissimi Porporati, e percorse tutti gli stadj della sua religione. Erasi di comune consentimento stabilito che fosse Generale dell' Ordine, ma per un tratto di zelo spiegato nel dì precedente alla formale elezione vennero con artificioso maneggio rivocati i voti. Amico e confidente dell' immortale supremo Gerarca della Chiesa Benedetto XIV, fu tosto creato Vescovo di Molfetta, ed a questo degno Prelato devesi la riedificazione, e l' ampliazione delle fabbriche, e la rinomanza del Seminario da lui arricchito di valenti Professori. Dotto ed erudito in sommo grado lasciò varj manoscritti di teologia, e di altre materie ecclesiastiche, ed al Capitolo la tanto savia disciplina corale: fu egli fratello del celebre Monsignor Giuseppe Orlandi Vescovo di Giovinazzo Matematico insigne, già pubblico Cattedratico in Napoli, autore delle note alla fisica di Musschembroeck, e di un trattato di sezioni coniche.

le proprie cognizioni, a misura che queste in lui aumentavansi; perlocchè sotto la disciplina di quel Vicario Generale perito assai nelle leggi, imprese lo studio del diritto di natura, e civile. Al tempo stesso fu promosso con piena sua soddisfazione e del Prelato ai quattro ordini minori; e il trasporto che sentiva per le scienze naturali piucchè per le altre lo trasse in Napoli, ove conversando con li chiarissimi Giuseppe Saverio Poli, e Ciro Saverio Minervini, onore entrambi, e decoro di Molfetta, seppe il Giovene ancorchè giovine chierico, trar profitto dalla loro istruzione, e penetrar negli arcani delle scienze naturali, e del Santuario di Temi, seppe egli fin d'allora procurarsi l'amicizia dei più dotti di Napoli in ogni ramo dell' umano sapere, e guadagnossi in modo particolare i riguardi, e l'amicizia del celebre Petagna, che gli aprì i recessi della Botanica, e della Entomologia.

Ricco di sapere, e fornito specialmente di quelle cognizioni che il bel suolo Partenopeo offre in copia ai contemplatori della natura e dell' antichità, si restituì alla patria, ed accolto con giubilo dal Pastore sullodato, lo ammise egli all' intima sua confidenza, e penetrato dall' idea del sommo vantaggio che ne ritrarrebbe la Chiesa e la Religione da un uomo di tanto valore, cercò di schiudergli la via onde promuoverlo ad ecclesiastiche dignità. Erasi già intimato un concorso di morale Teologia per provvedere di Pastore la parrocchial Chiesa di Santo Stefano, ed a malgrado che il Giovene resistesse, il Prelato obbligollo a concorrervi, ciocchè eseguì con piena soddisfazione di Monsignore e del Pubblico, e così gli aprì il campo a farsi conoscere. Aveva il Governo allora determinato che si trasferisse la residenza di Monsig. Orlandi e la Cattedra Vescovile nella Casa e Chiesa dei Gesuiti espulsi, e mentre questi attendeva gli ordini per un tale traslocamento, prescelse il giovine già divenuto suddiacono a tessere l'orazione inaugurale. Volle però sventura che per la sopravvenuta improvvisa morte del Vescovo si convertisse questa in funebre orazione, a recitare la quale il Capitolo incaricò il

Giovene (4), che così diede nuove prove de' sommi suoi talenti e che nell'anno stesso venne promosso in seguito di commendatizia del Vescovo alla Santa Sede, ad un Canonicato Diaconale. E poichè questa nuova carica non obbligavalo piucchè all' assistenza al coro, con fervore si dedicò, senza però abbandonare lo studio delle scienze ecclesiastiche e legali, a quello della storia naturale. Attivo siccome egli era, applicavasi ancora alla pratica della Giurisprudenza, e dava consiglj a difesa dei poveri, degli orfani, e dei pupilli, a sue spese scudo facevasi e loro protettore, quando anche da lontano scoperto avesse negli avversarj ombre di capriccio, e di oppressione. Componeva i pareri discordi degli avvocati, che innanzi a lui portavansi a tenere sessioni, e procurava l' istruzione del popolo nei doveri di Religione; e quantunque così occupato, trovava tempo per iscrivere e comporre, e per istruirsi con la lettura dei Classici.

Provvedutosi verso il terminar del 1775 alla Cattedra Vescovile di Molfetta con la elezione del zelantissimo, e di grata memoria Monsignor Antonucci, o la fama, o la sperienza, o entrambe portarono gli sguardi del prudentissimo Vescovo sul Canonico Giovene, ed ammessolo più alla intima sua confidenza che alla sua amicizia, conobbe il Prelato che divider poteva il Governo della sua Chiesa con quest' uomo di specchiati costumi, di vasti talenti, e di soda dottrina fornito. Procurò quindi di promuoverlo sollecitamente all' ordine dei Sacri Leviti, ed al Presbiterato; usandogli la particolar distinzione di esaminarlo egli stesso sui dubbj dei Sacri Canoni, e della Sacra Liturgia, e così felice riuscì questa prova, che Monsignore si confermò vieppiù nell'assunta determinazione di volerlo suo Vicario Generale (5). Nel 1781 assunse il Canonico

(4) Fu questa Orazione stampata nell' anno 1775 a Napoli.

(5) Siccome era duopo per esercitare il Vicariato di essere laureato, così dovette egli a tale oggetto recarsi alla Capitale, ed approfittando di questa opportunità frequentò la conversazione degli amici, e dei dotti, osservò con piacere gli oggetti di antichità, di belle arti, e di storia naturale, e fece acquisto di libri utili a lui, ed alla sua biblioteca.

Giovene il peso di questa carica gravoso assai per le contese in allora vigenti, ma più gravoso ancora per le cure pastorali' delle quali era stato chiamato a parte; carica però ed obblighi che con zelo e plauso generale egli adempir seppe; e mentre incombeva egli a tutto ciò, prese anche l'impegno di insegnare il diritto civile nel Seminario di Molfetta, e di sorvegliare tutte le scuole. Occupato egli in tanti, e così svariati oggetti trovava pur anche tempo per scrivere di varj argomenti; e per evitare la noja che genera d'ordinario lo studio a lungo protratto sopra un dato oggetto, aveva costume di portar nella sua cartella diversi oggetti di componimenti, per sceglier poi nelle ore che avanzavangli libere dalle ordinarie sue occupazioni, quello che più gradito a trattare allora gli riuscisse memore del precetto del Venosino.

Tu nihil invita dices, faciesve minerva.

Quando poi condur voleva a compimento qualche suo lavoro letterario o scientifico, ritiravasi per qualche giorno alla solitudine di sua villa da lui chiamata *Eremo*, ed ivi trovando ristoro al suo corpo, e tregua al suo spirito tutto occupavasi ad osservare l' atmosfera, e le piante, ed a stendere le sue osservazioni.

I primi saggi però de' suoi talenti, e de' suoi studj giovenili versarono sopra argomenti di cose ecclesiastiche; e tale era il trasporto che sentiva per i Salmi di Davide, e tale eccitamento nell' animo gli svegliavano le vive e naturali immagini in essi contenute, che dispensar non potevasi dal consecrare qualche ora del giorno a meditarli. Di ciò ne rende testimonianza la lettera sul primo Salmo diretta al chiarissimo Consiglier Mattei che approvò l' interpretazione del Giovene, ed inserir volle nelle proprie opere la lettera stessa. E questo esercizio avrebbe continuato a somministrare gradito pascolo alle sue meditazioni, se un avvenimento impreveduto chiamato non lo avesse ad occuparsi in altri oggetti, i quali sebbene giovassergli a divenire peritissimo nella chimica, e gli procurassero molta rinomanza, non gli risparmiarono però gravi pispiaceri.

Era l'anno 1783 quando il rinomato naturalista Abate Fortis curioso di osservare oggetti di Storia naturale, fece una corsa per l'Apulia, e diretto dalla Capitale al Canonico Giovene, strettissima amicizia con lui contrasse per modo, che più contento rimase di conoscere i talenti e il sapere dell'acquistato amico, anzichè della scoperta della *nitriera naturale* da essi unitamente fatta nel così detto *Pulo*. (6)

Trovò non v'ha dubbio, oppositori la nitriera naturale del Pulo, nei discepoli delle antiche scuole i quali perciò contesero con gli scuopritori di essa, ma così non ragionarono il celebre Professore di Chimica Don Giuseppe Vairo, e il suo valente allievo D. Antonio Pitaro, i quali sopra luogo assicuraronsi della patente di lei esistenza. E sebbene questa scoperta portasse un rilevante danno agli appaltatori del nitro artificiale, nè l'Abate Fortis, nè il Canonico Giovene impeguaronsi a ribattere gli artificiosi raggiri di coloro che sostenevano gli appaltatori stessi, e contentaronsi di veder correre quasi in folla i naturalisti d'Europa, alcuni per soddisfare la propria curiosità, altri spediti dalle primarie Accademie, i quali

(6) Al S. O. di Molfetta lontano dall'abitato un miglio d'Italia trovasi un grande sprofondamento di terra in forma di quasi un segmento sferico di circa 340 passi geometrici di conferenza, e di 50 di profondità; questo dicesi *Pulo*. Le pareti interne che ne rivestono la concavità, sono macigni di pietra calcare a strati orizzontali inclinati però verso il Nord cioè verso l'Adriatico, e la maggior parte di essi giunge fino alla spessezza di cinque piedi. Le dette pareti che ne costituiscono i limiti, danno adito a grotte, a caverne più o meno spaziose, ed alcune lunghissime al segno, che scuoprir non ne puossi il termine. Il Canonico Giovene colla candela in bocca penetrandovi carpone vi fece molte osservazioni. Chi sa se non abbian dato origine a questo enorme sprofondomento di suolo torrenti d'acqua che radendo per secoli il loro alveo siano riuscite a formare questo abisso? I nostri antenati forse così opinarono, poichè nelle antiche scritture quella contrada trovasi denominata in *Gurgio S. Leonardi* per un' antica Cappella circa mezzo miglio distante dedicata a questo Santo. Nel margine del Pulo fu edificato pochi anni dopo l'istituzione dei PP. Cappuccini un Convento abitato da essi per circa due secoli, e nella loro Chiesa si venerò questo Santo.

tutti mostraronsi convinti, ed apertamente dichiararono nelle loro relazioni *esistere in Molfetta una Nitriera naturale.* Meritano onorata menzione fra questi li signori Hauvkins gentiluomo Inglese abile mineralogo (7), Melchiorre Delfico gentiluomo Abruzzese autore di molti scritti, Zimmermann Professore di matematica, fisica, e di storia naturale a Brunswich (8), il Conte della Decima rinomato Professore a Padova (9), Thouvenel celebre protomedico nella provincia d'Alsazia (10) ed altri moltissimi. Ciò poi che convinse tutti i dotti fu la fioritura, e rifioritura spontanea a nitro delle pietre trasportate in varj luoghi d' Europa. In tal modo, mentre crebbe la celebrità della nitriera naturale, si estese maggiormente la fama del sapere del personaggio che commendo, ed il suo nome si rese celebre nelle Accademie di Londra, di Parigi, e di Germania, tacendo di quelle d' Italia, nelle quali erasi precedentemente diffusa la fama della sua dottrina. Ed ecco che il Canonico Giovene in età di circa 30 anni, mentre che nelle Provincie, e nel regno di Napoli veniva riputato per uno dei primi Giureconsulti, presso i dotti d'Europa era tenuto peritissimo nella Chimica nella Botanica, ed in varj rami di storia naturale. Cominciò egli a darne le riprove, allorchè portatosi col Barone suo fratello ad osservare il suolo di Puglia, trovò che in varj

(7) Questo abile naturalista non conoscendo che il suolo Appulo, come e fertile in biade e in frutti, così è fecondo in sommi ingegni, all' udir sovente il Canonico Giovene nominar Linneo, esclamò come per meraviglia *Comment! Dans ce pays on nomme Linneus?*

(8) Si ha di questo Professore la descrizione del suo *viaggio alla Nitriera naturale di Molfetta* scritta in Francese. In essa trovasi l' elenco delle piante che allignano nel suolo del Pulo descritte nel linguaggio botanico coll'aggiunta, *je le dois a la complaisance de M. le Chanoine Giovene qui cultive differentes parties de l'Histoire naturelle avec le plus grand succes.*

(9) Questo valente Professore forma il carattere del Canonico Giovene, che fa onore ad entrambi.

(10) Dell' alta stima che in varie sue opere questo chiarissimo Autore ha manifestato al pubblico per il nostro Canonico giovera dir qualche cosa in appresso.

luoghi di essa abbondava il nitro naturale. Scorgesi ciò dalla lettera inviata al lodato Ab. Fortis nel 1784 (11), nella quale descrivendo il suo breve viaggio, dà conto del risultamento delle sue osservazioni tendenti a distruggere l'opinione di coloro che credevano il nitro del Pulo generato dagli animali, che una volta avevan potuto abitare colà. Assicura egli di avere osservato grotte non mai abitate da animali, e che abbondavano di nitro nativo.

Più perito dei salnitrai stessi, mentre questi ricusavano di valersi di quelle terre chiamate da essi *forti* perchè eccedenti in *acido azotico*, insegna loro il rimedio per correggere un tale eccesso, di aggiungere cioè alla lisciva anche le ceneri dei vegetabili, poichè così aumentandosi la base potassa, la cristalizzazione del nitro riesca più pronta, e più copiosa.

Osservatore qual era diligentissimo, portava ferma opinione, seguendo le massime del Galilei, che alla scoperta del vero nelle scienze naturali non si giunge colle teorie, ma colle osservazioni e colle sperienze. Gradiva perciò il leggere bensì le osservazioni altrui, ma piacevagli di esaminare coi proprj occhi l' intiero procedimento di esse, non perchè diffidar volesse delle medesime, nè perchè

" *Segnius irritant animos demissa per aures*
" *Quam quae sunt oculis subjecta fidelibus....*

ma specialmente perchè il più delle volte scuopronsi altre cose che sfuggirono all' occhio sagace degli osservatori antecedenti, o come sovente è avvenuto, col disegno di trovare una cosa, altre se ne trovano ed interessanti (12). Con siffatto metodo, gli riuscì facile lo scoprire non essere la così detta *rogna* degli ulivi, come pretendevan taluni, opera d' insetti,

---

(11) Fu inserita negli opuscoli scelti di Milano, e poi riprodotta in Francese nel *Voyage a la nitriere naturelle qui se trouve a Molfetta* par M. Zimmermann.

(12) Se la diligente attenzione sulla coincidenza di fenomeni simili il fondamento costituisce delle esatte osservazioni, non è vana lusinga il persuadersi di potere colle teoriche ideali sorprendere la natura nelle sue svariate operazioni?

sol perchè nell'interno dei tubercoli trovansi insetti ospitanti. Distinse perciò con accorgimento i tubercoli cagionati dal gelo se pur colla *rogna* voglion confondersi, ed osservar fece esser questa tanto da quelli diversa, quanto lo è un *foruncolo* da un tumoretto cagionato da strumento tagliente e lacerante. Distinto è pure da entrambi il tubercolo prodotto dai colpi della grandine o da altro strumento contundente, colpi con i quali usando verghe percuotono i contadini i rami allorchè raccolgono le ulive; e basta osservare l'interno di detti tubercoli per rimanerne convinti, ed i rustici stessi i quali ripongono la causa della *rogna* degli ulivi nella gragnuola, confessano che tali tubercoli investono in maggior copia gli alberi *Femminini*, quelli cioè che più rigogliosamente vegetano. In tanti dispareri e come risolvere il problema, se non ricorrendo alle osservazioni, ed all' analisi dei tubercoli stessi? Fece il Giovene perciò bollire nell'acqua i rami attaccati dalla rogna, per così, squadernando tutto il libro, vedere l' origine, e il progresso di tale malattia. Si assicurò, così operando, che tranne le escrescenze prodotte dal gelo, e dalla grandine, tutti gli altri tubercoli sono figli di *occhi ciechi* ossia di germi soffocati nel loro nascere; si rende ciò manifesto ancora con lo strappare semplicemente dai rami i tubercoli, ed osservarne il centro. Questo fu l' argomento della sua interessente *Memoria sulla rogna degli ulivi* (13) la quale strappatagli, dir puossi di mano nel 1789 dal rinomato Abate Minervini, stampata venne in Napoli, e posteriormente a Roma, a Milano, ed altrove.

---

(13) Vi fu chi poco conoscendo l' ulivo, confuse la *Rogna* con l'*Olla* così chiamata da Plinio, che corrisponde a quelle grandi escrescense che nascono sul tronco degli alberi, dai nostri Villani chiamate *Menne*. Ingannossi però chi sostener volle una tale opinione, ed io allor giovinetto fui testimone e della analisi della *rogna* e della scoperta della causa che la produce, cosa da me posteriormente verificata poi con replicate e copiose osservazioni. Il silenzio serbato da chi combatter poteva questa opinione, l' avidità con cui fu richiesta dovunque la memoria citata, e le ripetute edizioni di essa rendettero il dovuto onore al Giovene.

Ed a vieppiù giovare all' agricoltura non restrinse le sue vedute alle malattie cui vanno soggette queste così preziose piante, ma conoscer volle ancora gli insetti che corrompono, e devastano i loro frutti. Contristato dalla strage che soffrirono le ulive l' anno 1791 nelle due limitrofe provincie di Bari, e Lecce, diè in luce un *Avviso ai proprietarj d'uliveti, e contadini per la distruzione di alcuni vermi che rodono la polpa delle ulive* (14). E per non lasciare secondo il suo ordinario modo di pensare, nulla incompleto, parlò del verme, chiamato dal Bernard *Bruco Minatore*, il quale benchè non nuoccia alla polpa delle ulive, assai grave danno produce a quei frutti, poichè si pasce delle mandorle del nocciuolo, divorate le quali circa il termine di Agosto n' esce fuori, tagliando così i legamenti de' picciuoli. Perlocchè se questi sono intieramente rosi, tosto cadono le ulive, che a nulla servono; mentre quelli che rimangono illesi, proseguono a ricevere, ma scarso l'alimento, e quando al terminar del Settembre avviene la loro caduta, miserabile prodotto d'olio ricavasi da esse. E perchè riesce inutile lo scoprire le cagioni delle malattie se non si sanno poi apprestare i rimedj, fra li tanti proposti da buoni scrittori per la distruzione della razza malefica delle mosche a dardo (15), uno ne immaginò l' autor nostro effica-

---

(14) Il valoroso sig. Pietro Napoli Signorelli nelle sue *vicende della coltura nelle due Sicilie* parlando delle due suaccennate memorie di cui ne riporta gli estratti, così discorre. « Pochi, ch' io sappia, pareggiano, e niuno sorpassa il dottissimo Giu- « seppe Maria Giovene nel trattare le materie agrarie con maggior corredo di fisica « de' vegetabili, di chimica, di storia naturale, e di perenni osservazioni meteorolo- « gico-campestri. Noi abbiamo due esimie memorie che bisogna conoscere. »

(15) Non i soli vermi della *Musca Oleae* fanno strage della polpa delle ulive negli anni al loro sviluppo propizj, ma ho trovato altri vermi che sviluppatisi poi in perfetti insetti hanno dato una specie di cinipi, di falene, di farfalle. Vedi *memoria su alcuni insetti che fanno disseccare i rami degli ulivi, e divorano la polpa dei loro frutti, e sul modo di distruggerli* inserita negli Atti del Reale Instituto di incoraggiamento delle scienze naturali di Napoli Tomo III.

cissimo per se stesso, ma inefficace per la costumanza di tenersi le ulive lunga pezza sepolte ne' pozzi de' *Fattoi*, perlocchè i rami che sarebbero posti sotto la macina han tutto l'agio di convertirsi in mosche. Non è però a negarsi, che essendosi moltiplicati adesso i Fattoi alla Genovese, i quali in trenta giorni circa macinano tutte le ulive che a mano a mano raccolgonsi, il rimedio dal Giovene proposto per distruggere i vermi della mosca a dardo, diventa assai utile.

Come pertanto un fiume che camminando cresce, e nel cammino nuovo vigore acquista, così crebbe in lui che commendo, la lena, e la volontà di moltiplicare le osservazioni meteorologiche e geoponiche per solo desìo di giovare la scienza ed i suoi simili. Che vale essere di sapienza ricco, e dottrina, quando non ridondano queste a pubblico vantaggio? *Nisi utile est quod facimus, stulta est gloria*, è massima antica, e fondata, talchè non può il vero sapiente dispensarsi dal praticarla. Fu perciò che divenuto il Giovene peritissimo nella meteorologia, e nell' arte agraria, si impegnò a fare come un innesto di queste, onde trovar regole più conducenti, di quelle che conoscevansi, alla prosperità dell' agricoltura, ed alla fruttificazione delle piante. Eccolo perciò occupato nel 1788 al 1797 a ricavare da' suoi giornali di osservazioni, e dal complesso delle sue meditazioni in ciascun anno una Memoria contenente la storia delle meteore, e delle vicende dell' agricoltura. Principal sua mira si fu di conoscere la meteorologia della Puglia e del Regno, e perciò ottenere non desisteva dall' eccitare gli amici (16) ad occuparsi di questo ramo di scienze, e confrontando con le sue osservazioni quelle che venivangli da medesimi comunicate, compose i suoi discorsi che meritarono gli encomj del

---

(16) Merita fra questi onorata menzione il dotto ed erudito Arcidiacono Luca Cagnazzi conosciuto pei molti suoi scritti, e Socio di più cospicue Accademie.

più illustre meteorologista, anzi del fondatore della meteorologia Italiana l'Abate Toaldo (17).

Lungo sarei se esporre quì io volessi quante utili osservazioni, e quanti precetti contengono li citati discorsi meteorologico-campestri, e quanto acquistasse la meteorologia, e l'agricoltura, talchè dir puossi che se si riconosce per fondatore della scienza astro-meteorologica il sullodato Toaldo, il Giovene ha ugual diritto a venir riconosciuto per fondatore della meteorologia campestre. Convien leggere questi discorsi per ammirarne la precisione, i progetti, e le regole che contengono, le quali appalesano quanto profonde, ed estese cognizioni possedesse l' autor loro. Se la meteorologia è la storia dei fenomeni atmosferici, e se l' applicazione della meteorologia all' agricoltura consiste nel trovare i mezzi per trarre il maggior profitto possibile dalla semina, dai piantamenti, e dalla fruttificazione, incontransi questi mezzi a dovizia esposti nei mentovati discorsi. Parlasi in alcuni di essi dell' andamento patologico dalla stagione dipendente, e delle epizootie occorse per alcuni anni nel paese, descrivonsi in altri *le lavanduje, fate morgane o Mutate* che dirsi vogliano, nomi con cui appellansi quei giganteschi e proteiformi pezzi di architettura lavorati dalla rifrazione dei raggi solari su vapori facilmente elettrizzati, e galleggianti or nell' alto, or nel basso dell' atmosfera, i quali mutar fanno di aspetto le città, gli edifizj, i boschi, le colline ec., ora in alto sollevando le basi di questi oggetti, or oscurando le vette dei colli, fenomeni non infrequenti nel clima di Puglia, specialmente dopo l' equinozio di Autunno; nè ommette il Giovene di ragionare sui Bolidi, e di esporre modestamente l' opinion sua sull'argomento raffrontandola con quella de' più valenti fisici d'Europa, ed introducendo opportunamente per spiegar il fenomeno le teoriche elettriche ad un' epoca in cui lo studio dell'elettricismo era ancor nell'in-

(17) Otto di tali discorsi sono inseriti negli Opuscoli scelti di Milano, e li due ultimi nel Giornale letterario di Napoli.

fanzia. Una prova ben luminosa dell' eccellenza di questi lavori del Giovene si fu l'applauso universale con cui ricevuti furono dai fisici tali discorsi, dei quali non pochi lunghi squarci vennero inseriti in opere classiche di rinomati scrittori (18).

Di fecondo ingegno dotato, ed attivo nella facoltà di comprendere, non limitava il Giovene le sue ricerche ad un solo oggetto, ma compiacevasi di sempre più estenderle, perlocchè stupir non devesi se nel decorso del riferito decennio altri suoi lavori di simil natura vedessero la luce. Luogo distinto merita tra questi l'operetta che ha per titolo *La mia villeggiatura*, nella quale lo stile imitando, non già i pensieri del *Voyage sentimental d'Harvey* sotto il velo di immagini popolari, con semplicità di maniere, usando il vero linguaggio filosofico insegna la cristiana morale, e promulga massime veramente sentimentali. La moltiplicità delle edizioni in diversi luoghi fatte di quest' operetta comprova il pregio della stessa, e il favorevole accoglimento che ne fece il Pubblico (19). Nè men

---

(18) Mi si permetta fra li diversi Autori, che parlarono con somma lode degli scritti dell'Arciprete Giovene, di quì riportare, il giudizio che dei medesimi ne diede il ch. Ab. Toaldo in una delle sue opere. Parlando egli delle stagioni si immagina un compenso alternativo di caldo, e di freddo, di umido, e di secco ec. che in una serie di anni deve poi potersi comprovare. Valendosi egli della dottrina spiegata dal Meteorologo di Puglia così ragiona. « Sù questo argomento il dotto sig. Canonico « Giovene in Molfetta tanto avveduto osservatore, che sagace ragionatore ha dato « un bel Discorso negli opuscoli scelti di quest'anno, descrivendo l'annata del 1789. « Giova quì di recare uno squarcio del medesimo. » Veggasi *Completa raccolta di opuscoli, osservazioni, e notizie diverse dall'anno* 1773 *al* 1798, stampata in Venezia nel 1802, Tomo III, pag. 36 ove lo squarcio occupa quasi quattro pagine del volume.

(19) Questa *Mia vileggiatura* venne stampata a Napoli, poi a Milano, indi a Roma, e nel 1804 a Parma. L'Autore la compose in campagna nel 1788 mentre io allora giovine perchè in età minore di quattro lustri ed ancor laico, da suo discepolo che era stato nella scienza del diritto negli anni antecedenti, mi onorò scegliendomi a compagno della sua Villeggiatura: vidi io allora come occupava egli i giorni nelle osservazioni astronomiche, meteorologiche, elettroscopiche, al quale oggetto io formai a bella posta un cervo volante; allora pure istituì le sue osservazioni sulla rogna degli ulivi, sulla mosca a dardo, sulla cocciniglia, e sù di altri oggetti utili all'agricoltura.

pregevole è a riputarsi la lettera che nel 1790 per impulso del rinomato naturalista Fortis vide la luce, e la quale aveva il Giovene indiritta nell'Ottobre dell'anno precedente al ch. Consigliere Mattei. Poeta questi di spirito, proposto aveva un quesito al dotto Professore Don Giuseppe Vairo sulla specie di sale di che parlar volle Cristo N. S. allorchè disse agli Apostoli *vos estis sal terrae*. Versato come era il Canonico Giovene nella materia relativa ai sali, dappoichè erasene molto occupato per cagione della sopramentovata nitriera naturale di Molfetta, spiegò la sua opinione in una lettera in ameno ed elegante stile dettata, nella quale con erudizione ecclesiastica, e col corredo della fisica e della chimica ribattè le opinioni di coloro che parlarono di nitro ossia soda, di sal marino (idro-clorato di soda), di marna, ed altro, e dimostra con belli, e sensati argomenti avere il Redentore paragonato gli Apostoli al nitro (ossia nitrato di potassa). Chi nel leggerla negargli vorrà ingegno, dottrina, immensa erudizione?

Come chi per prendere tesori dal fondo del mare tanto prende più d'animo, quanto più in esso si immerge, così al Giovene nella piena delle sue osservazioni non bastava il fermarsi negli oggetti che agli occhi presentati venivangli ed alla immaginazione; ma penetrava più oltre, e paragonando le osservazioni attuali con altre analoghe veder voleva il retto risultamento di tali confronti. E così operando dalla copia delle sue ed altrui osservazioni elettriche, ed atmosferiche riuscì a compilare nel 1798 una memoria intitolata *Osservazioni elettrico-atmosferiche e barometriche* insieme paragonate (20), la quale lo elevò alla classe de' più stimabili fisici d'Europa. D'ingegno acuto e penetrante non abbandonava mai la contemplazione di un soggetto scientifico, se non quando avealo pienamente esaurito, e come che mentre ogni giorno scrivea, ogni giorno nuove cose amava di leggere, così appena ebbe

---

(20) È inserita nel Tomo VIII delle Memorie della Società Italiana delle Scienze.

sott' occhio la dissertazione del sig. *Van-Swinden sopra i movimenti regolari dell' ago magnetico*, che un' *appendice* egli stese alla mentovata Memoria, in cui istituendo un paragone fra le osservazioni eseguite nei mesi perielii, e quelle fatte negli afelii, conchiudeva dal successivo confronto delle osservazioni del sig. Van-Swinden con le proprie, che poteva ben confermare le congetture di corrispondenza tra la pressione del mercurio nel Barometro, le aurore boreali, le agitazioni magnetiche, e l' elettricità atmosferica (21). Quanti encomii tributar a lui perciò si potessero, sarebbero sempre minori di quanto ei merita, e l'aver egli dopo un lungo corso di osservazioni fissato, e minutamente circostanziato il flusso, e riflusso elettrico-atmosferico, forma il più grande elogio dello scopritore. Aggiungasi poi l' approvazione de' più valenti fisici, e meteorologisti, i quali si recano a gloria di confermar le loro teorie sulle osservazioni, e scoverte dell'Arciprete Giovene. Scorransi fra le altre le opere del celebre Dottor Touvenel (22), ed ivi troverannosi non solo citate le teorie del Giovene, ma vedransi inseriti lunghi tratti delle Memorie di lui per viemaggiormente assodare le proprie dottrine. Il sempre commendevol Poli, egli pure ne' suoi elementi di fisica, parlando delle osservazioni elettro-atmosferiche dai celebri Saussure e Volta eseguite, dalle quali scorgesi esservi nella elettricità atmosferica una alterazione periodica nel tratto di 24

---

(21) Le ultime scoperte sulle intime relazioni che regnano fra la materia elettrica, il magnetismo, il calorico ec. sono un testimonio ben luminoso della profondità delle viste, e della penetrazione del Giovene che quarant' anni addietro travedeva la connessione che lega fra loro questi diversi fenomeni della natura (1838, a. L.)

(22) *Traité sur le climat de l' Italie* Verone 1797, 1798, *Melanges d'histoire naturelle* stampate a Parigi nel 1806. Trovasi in quest'opera una lettera dell'Arciprete Giovene diretta al chiar. Autore, il quale dichiara ai Dotti d' Europa che « parmi « les savants d' Italie, que j' ai invité a me seconder dans l' execution de ce plan « je ne puis citer anjordhui, que M. Giovene de Molfetta en Pouille, un des plus « celebres en meteorologie phisique, et de plus exacts observateurs en agronomie.

ore, soggiunge: " sono queste verità anche stabilite e circo-
,, stanzialmente descritte dal mio dilettissimo amico sig. Arci-
,, prete Giuseppe Maria Giovene che ha arrichito la Fisica
,, di accurate, e preziose osservazioni meteorologiche. ,,

Chi non iscorge fin quì nell'Arciprete Giovene l'agronomo, il meteorologo per eccellenza, l'entomologo, il botanico, il chimico, l'accurato naturalista? Chi non ravvisa ne' suoi scritti il filosofo modesto, che niuna pompa o fasto spiega nell'esporre le sue scoperte? Ben lo seppe definire l'illustre e dotto conte dalla Decima allorchè lo caratterizzò *per l'Uomo dotto senza jattanza e rispettabile non meno per le sue cognizioni che per la sua moralissima indole* (23), e l'Arciprete Giovene allorchè fu personalmente conosciuto dal mentovato Professore non aveva, che poco più di trent'anni, ciocchè accresce di gran lunga il suo elogio.

Ma le mire del nostro Arciprete non si limitarono a giovare alla società con la sola penna. Acceso di zelo per la prosperità del suo Seminario, e per la buona coltura degli alunni dei quali prendeva special cura, vide l'importanza di sostituire al rancidume della vecchia Fisica (24) le cognizioni della già scoperta teoria pneumatica. All'importante scopo di migliorare questa istituzione rivolse le sue meditazioni, ed ottenne come per una specie di preliminar convenzione dal suo intimo amico il cavalier Poli una non scarsa collezione di macchine fisiche, le quali unì ad altre procuratesi da Venezia, e volle egli stesso nell'anno 1794 insegnare per un corso la fisica sperimentale prevalendosi delle istituzioni del citato illustre Autore, delle quali allora conoscevasi la quarta edizione soltanto. Frutto di queste lezioni in cui sviluppò specialmente la teoria di Lavoisier invece della teoria flogistica, fu un

---

(23) Memoria degli accumulamenti aerei e gazosi del corpo umano, letta nell' Accademia di Scienze, Lettere, ed Arti di Padova. Gennajo 1816.

(24) Si insegnava allora nel Seminario diretto dai Religiosi Domenicani la fisica dell'Altieri, e non conoscevasi colà nemmeno il nome di Stahl.

saggio, che i suoi allievi offrirono nell'ampio cortile del Palazzo Vescovile e Seminario, di sperimenti sulla meccanica, sulla elettricità, e sull'aria, ed i gas, nei quali mostrarono il maneggio specialmente delle macchine pneumatica ed elettrica, che poco o nulla in allora colà conoscevansi. E qual non fu lo stupore che eccitossi in tutti i ceti di persone che ivi intervennero in gran numero, mentre pochi esperimenti o niuno di tal fatta eransi fin allora praticati nella Università degli studj? La fama del Seminario oltre ogni credere si estese, ed il Professore che succedè alla Cattedra non mancò di esporre le nuove scoperte, e quelle del Galvanismo.

Mentre però l'Arciprete Giovene erasi fatto un sistema regolatore de' suoi studj, dividendo le sue occupazioni fra le scienze naturali, e le scienze legali ed ecclesiastiche, eccolo inopinatamente strappato direm così, da' suoi compagni e dai diletti suoi studj per recar servigio alla patria. Risolvè Molfetta nell'anno 1797 di volersi affrancare non dai pèsi feudali da cui non fu mai gravata, ma dal titolo, e dalla Giurisdizione che vantavasi dall'erede dell'illustre Casa Spinosa. Di avveduto e dotto conoscitor delle leggi faceva perciò mestieri, ed il Decurionato delle corporazioni ecclesiastiche, e del Pubblico a pieni voti prescelse a tant'uopo il Giovene. Rincrebbe a lui, ed a Monsignor Vescovo che amava averlo a suoi fianchi, questa elezione: lor malgrado però e l'uno, e l'altro cedettero alle istanze del pubblico. Con tutto lo zelo faticò in Napoli per ottenere il desiato fine, e con prudenza temporeggiò a concludere la stipulazione del contratto, e non ostante gli sforzi delli Avvocati della parte contraria, e le continue pressure de' suoi concittadini che affrettar volevano la tanto bramata convenzione, con la mirabile sua destrezza riuscì a schermirsi da questi assalti e recare alla patria il risparmio del debito che erasi contratto, ma non realizzato, di Ducati duecento dodici mila. La memoria di questo fatto, e non sarà per la più tarda posterità Molfettana più perenne di qualunque monumento in bronzo, o in marmo?

Nè credasi già aver egli in menoma parte obliato i prediletti suoi studj, le consuete sue osservazioni, e meditazioni, mentre trovavasi distratto in occupazioni cotanto diverse dall' ordinario suo tenore di vita. Sapeva ben egli trovare il tempo opportuno per occuparsi in oggetti all' avanzamento delle scienze diretti, e in Napoli mandò alla luce l'ultimo discorso meteorologico per l'anno 1797, prevalendosi specialmente delle osservazioni che da Molfetta, e da altri luoghi gli vennero somministrate. Piacevagli assai il conversare coi due amici Minervini e Poli di cui si fece già onorata menzione, e con altri Dotti, e in mezzo alle tristi politiche vicende tenendosi, quant' era possibile nascosto, profittò della dimora nella Capitale, per estendere le sue cognizioni sulle materie geologiche, e per ampliare la piccola raccolta che possedeva, di Zoofiti, Litofiti ed altri fossili dei quali arrichì il suo museo di storia naturale, che ei non giudicava per anche completo.

Annojato però di trovarsi fuori della sua sfera procurò di liberarsi d' ogni impaccio, e verso la metà dell' anno 1800 fè ritorno in Patria, ove malgrado delle aumentate cure ecclesiastiche prese il Giovene la sua metodica vita laboriosa, letteraria, ed anzi maggior lena acquistò per arrichir di nuovi lumi le scienze. Diresse infatti nell'Aprile dell'anno 1803 una lettera all'Ab. Fortis Prefetto della Biblioteca e Segretario dell' Istituto nazionale in Bologna, nella quale distinto ragguaglio comunicò al suo diletto amico della pioggia rossigna caduta il dì 7 Marzo precedente nella Puglia, ed altrove. Lungi egli dal credere il polverio colorante la pioggia cagionato da esplosione del Vesuvio, o dell' Etna, ovvero dal ritenerlo un trasporto di materie per mezzo di vapori sollevate dal fondo del mare, come taluni altra volta sostennero, giudicò con molta avvedutezza, e mettendo a calcolo i venti preceduti all' osservato fenomeno, essere questa polve pervenuta dall'Arabia, e dal vento Sud-Est spinta in Italia: esempj di fatti simili posteriormente avvenuti confermarono questa opinione. Non così

fertil terreno sviluppa, e porta a maturità nella stagione stessa i semi in esso impiantati, come nella mente feconda dell'Arciprete Giovene e si concepivano, e si ordinavano, e compievansi quasi ad un tempo li suoi svariati lavori. Molte sono le produzioni con le quali egli arricchì i Volumi della illustre e rinomata Società Italiana delle Scienze cui gloriavasi egli con giusto titolo di appartenere, e di cui era divenuto già da parecchi anni Socio pensionario anziano. Il giudizio, saviezza, e la somma perizia con cui trattate sono le materie contenute nelle produzioni stesse comprovate furono specialmente dall' avidità con cui esse ricercate vennero, e dalla onorata menzione che i Dotti contemporanei ne fecero nelle opere loro. E quì rammenterò così di passaggio la franchezza con la quale il valente e dotto Autore scorreva ne' quattro regni della natura (25).

Nuovi interrompimenti poi sopravvenero agli studj in cui occupavasi delle naturali scienze il nostro Autore; poichè quantunque egli procurasse di viver umile e nascosto, tuttavia lo splendore de' suoi meriti e delle sue virtù il fece conoscere all' immortale S. Pontefice Pio VII di Santa Memoria, che lo scelse a Pastore della Diocesi di Lecce, la quale specialmente allora abbisognava di un dotto e zelante personaggio, che conciliasse i dispareri, e ristabilisse l'ordine e la concordia. Si ricusò egli con bel garbo, espose benchè con la dovuta sommessione qual conviensi ad un ecclesiastico veramente savio,

---

(25) Sembrerà forse cosa strana ad alcuni la giunta di un quarto regno ai tre già conosciuti della natura? Dovrebbe anzi far meraviglia che i fisici non vi abbiano ancor pensato, dopo che è cosa evidente aver la natura stabilito nell' atmosfera il principal suo seggio, dal quale governa e regge gli altri tre regni modificandoli, e trasformandoli in varie guise. Chì non iscorge la somma influenza dell' atmosfera sopra i viventi? Ne regola essa il fisico e l'economico. E chì negar può la stretta relazione che passa fra l' atmosfera ed i vegetabili? regola essa la loro buona vegetazione, e fruttificazione. E tra l' atmosfera ed i minerali chi è che non ravvisi una dipendenza, e corrispondenza di effetti....?

le sue ragioni per venir dispensato da così geloso uffizio, ma indarno, e l'Arciprete Giovene dovè suo malgrado, cedere, ed accettare il Vicariato Apostolico di Lecce. La sua religione però, la sua prudenza, i suoi talenti lo guidarono, in modo da sormontare tutte le difficoltà. Dedicatosi intensamente al governo della Diocesi, non lasciò scorrer momento, nè sfuggir occasione per incombere con ogni sollecitudine, come fece, e a calmare gli spiriti, a restituir l'ordine, e mettere sul buon sentiero il deviato, a talchè in poco tempo dir potevasi di questa Diocesi *Unus ovilis*, *unus Pastor*. Mancò frattanto ai viventi il pio, e dotto Monsignor Morelli Arcivescovo d'Otranto, il quale tanta stima nudriva per l'Arciprete Giovene, che quantunque fosse da se capace di regolare quella vasta Diocesi, tuttavia amava dipendere da' consigli del Giovene, e quel Capitolo che ne conosceva il valore, lo elesse a Vicario Capitolare nella vacanza della sede Episcopale. E dovette il nostro Arciprete gravarsi di nuove cure per la pericolosa malattia sopraggiunta al Vescovo d'Oria, il quale con le più insistenti premure desiderò di affidare a lui il governo del suo ovile; ed allorquando venne vacante la Cattedra Vescovile di Ugento, obbligato venne a vigilarla, onde porre riparo ad alcuni disordini ivi accaduti. Divenne perciò il Giovene Prelato di quasi l'intiera Provincia che governò con sapienza e dottrina, allontanandone ognora per quanto le umane forze e i mezzi umani il comportano, tutti gli abusi, e se alcuno talvolta la invase, comunicando egli in quei difficili tempi col Sommo Gerarca della Chiesa che era prigioniero a Savona, ne procurava i salutari rimedj, e fra le altre cose tema non ebbe di istruire il suo popolo che *il matrimonio semplicemente civile era un vero concubinato*. Quanto non è ammirabile la sua fermezza e la sua prudenza! Correvano allora tempi oltremodo infelici specialmente per la Chiesa, e nei quali era duopo mantenere per taluni forte il freno, e così fece il Vicario nostro Apostolico, ma pur seppe ottenere l'affetto e la stima di quella buona popolazione, presso la quale il suo nome è anche

al presente in benedizione, e ad un tempo stesso si conciliò il rispetto e l'amicizia di tutte le Autorità civili, e militari. Nè restringevansi le sue instancabili cure fra i limiti delle cose spirituali: non avevano confini le sue occupazioni, anzi tanto più contento quanto da maggiori fatiche oppresso, si incaricò inoltre della vigilanza sulla pubblica istruzione di quella Provincia, di cui ne fu l'Ordinario Presidente, come per alcun tempo lo fu di quella di Basilicata; e sotto l'amministrazione sua, e il Seminario, e quel Reale Collegio ebbero nuova vita, sia in ciò che risguarda la letteratura, sia per la parte economica, ed ivi prosperarono la disciplina, e la civile educazione. La statistica, gli Ospizj e la Società economica di Lecce cambiarono di aspetto sotto la sua Presidenza, e come s'interessava per le opere di beneficenza, così non mancava di sparger lumi, precetti, e buone pratiche agrarie. Per la qual cosa convinto il Governo della utilissima, e straordinaria operosità del Giovene, un attestato gli diede del proprio gradimento e lo creò Cavaliere decorandolo della Croce delle due Sicilie. Nè credasi già che immerso come egli era in un pelago di cotanto svariate cure, dimenticasse le Scienze a lui predilette. Due memorie da lui inserite in quest' epoca negli atti della Società Italiana comprovano la somma sua attività, fanno palese ognora che mai non raffreddossi in lui il desiderio di giovare ai progressi delle scienze naturali. *Notizie geologiche e meteorologiche della Japigia*, ecco l' argomento della prima, la seconda poi ci porge notizie curiose sulle Cavallette Pugliesi. Meritogli la prima gli elogi del celebre Professor Brocchi, che non esitò a collocar l'Autor nostro fra gli illustri Geologi, e venne la seconda ammirata come produzione di espertissimo Geologo.

Cessato allo spirar del decennio di *occupazione* l'Uffizio dei Vicarj apostolici, fu l'Arciprete Giovene sollevato da così straordinario peso; ma il capitolo di Lecce cui molto rincresceva il perderlo, senza prevenirlo lo elesse per suo Vicario Capitolare, e quantunque egli interponesse le più fervide

istanze per non accettar questa carica, a motivo specialmente di sua malconcia salute, tuttavia dovette compiacere il Capitolo, e per alcuni mesi però soltanto assunse questo nuovo impegno. Un trionfo per lui furono nel partir dalla Provincia di Lecce i luminosi attestati di affettuosa gratitudine di quelle popolazioni, poichè non udivansi per dove passava, che singhiozzi, e sospiri, e non vedevansi che lagrime, e segni di vero lutto; il che risvegliò nel nostro Religioso una sensibile tenerezza e nuovo affetto a quei popoli, e di un tale contegno serbò egli a lungo vivissima memoria. Ritiratosi verso il terminar dell' anno 1816 alla patria, di salute logoro, più per le fatiche sofferte, anzichè per l'età, non cambiò sistema di vita, ed anzi crebbe in lui l' energia e l' ardore. Divenuto era per lui questo metodo un bisogno: tanto è vero il detto del Poeta

" *Naturam expellas furca, tamen usque recurret.*

Riprese egli pertanto l' ecclesiastico suo ministero e con la scorta di S. Giovanni Grisostomo predicava con molto successo, e nei Catechismi esponeva la parafrasi dei salmi Davidici sù quali aveva a lungo meditato, e dimostrava contenersi in essi tutte le verità della Cattolica Religione; ed al tempo stesso non defraudava le scienze naturali di nuove produzioni che inseriva nei volumi della Società sullodata. Nel 1819 vide la luce una sua celebrata memoria sulla formazione del nitro, e degli altri sali che lo accompagnano, e in essa alla sagacità delle proprie osservazioni e riflessioni unendo quelle da altri naturalisti praticate, stabilisce come un canone di fisica-chimica, non esservi suolo che dia origine, o contenga un sale, e che non produca e contenga varie altre specie di sali: sia dunque artificiale o naturale il nitrato di potassa, che si ricavi da qualsivoglia terra, saranno sempre di lui compagni l' idro-clorato di soda, o di calce, gli ossi-solfatti di calce e di magnesia, come anche gli ossi-carbonati. Quanto non sono ingegnose le sue congetture sulla genesi de' sali! Non può, dice egli, forse il fluido elettro-magnetico comporre, e decomporre gli acidi, svariarli nella loro specie, renderli atti ad unirsi

per ragione di affinità ad una base, piuttostochè ad un'altra, a formare così sempre nuove specie di sali? E perchè tante vi sono pile voltaiche nelle viscere e verso la superficie del globo quanti sonovi strati di materie diverse, che concorrono a formarli, non è a maravigliare se nelle medesime terre trovinsi unite insieme varie specie di sali; e potrebbesi forse con licenza dei seguaci di Ippocrate, considerar le macchine animali come altrettante pile voltaiche le quali ben ordinate hanno salute, ma rendute innormali si ammalano, ed anche muojono?

Altra interessante produzione per le scienze naturali diede egli alla luce nel 1824, dir voglio le notizie delle due Puglie Peucezia e Daunia e del principato ulteriore, che formano la continuazione di quelle sulla Japigia. Se il chiar. sig. Brocchi annoverò già il Giovene tra i Geologi d'Italia allorchè vide le sue osservazioni sulla Japigia, per questo secondo scritto si meritò di venir acclamato per uno dei più accurati naturalisti viventi.

Quantunque indebolite fossero le forze del suo corpo nell' ultimo decennio di sua vita, non soffrirono però alterazione nesuna quelle dello spirito, e sebbene conducesse i suoi giorni ritirato in casa, non intralasciò tuttavia le occupazioni ecclesiastiche, e la lettura dei libri nuovi e dei Giornali, fino che rendutosi impotente a leggere per cagion del cristallino rendutosi opaco nell' occhio sinistro, ricorrer dovette all'opera altrui per conoscere lo stato attuale delle scienze, e delle amene lettere. Pronto e vivace di spirito, ed appassionato della meteorologia prendea ogni giorno conto dall'amico più fidato e il più antico (26), delle variazioni barometriche e termometriche e interrogava i rustici sullo stato dell'agricolrura (27).

---

(26) Lo scrittore di questo Elogio.

(27) Sovienmi sul proposito doversi trovare negli atti della rinomata Società di Breslavia menzione dello straordinario abbassamento del Barometro avvenuto il dì 25 Dicembre 1821, in molti paesi d'Europa, fra i quali anche in Molfetta. Di tale

Dilettavasi assai quando opportuno gli si presentava l' incontro, nell' esaminare i pesci più rari dell'Adriatico che i pescatori portavangli a casa ben sicuri di essere largamente rimunerati, e sebbene ridotto in uno stato di maggior indebolimento anche per la semiparalisi sopraggiuntagli alla vescica, provava alleviamento alla noja da suoi incomodi inseparabile, istituendo le più minute osservazioni su questi pesci, esaminandone attentamente le membra, e le varie conformazioni, e ben sovente dal confronto ne scuopriva i caratteri dagli Izziologi li più provetti non ben descritti, o ad essi sconosciuti affatto.

È ben differente l' osservare i pesci di fresco estratti dal mare, e gli scheletri trasportati ne' Musei da' mari lontani, ed è perciò meritevole di scusa il signor Lacepede, se fosse alcuna volta incorso in qualche sbaglio; ciò non ostante il Giovene nel partecipare al pubblico le sue scoperte non ne menava trionfo; vero filosofo modesto senza jattanza, anche per confessione dei dotti viaggiatori i quali o per desiderio di conoscerlo o per istruirsi sulla storia naturale del Regno, o per osservare la raccolta della medesima che egli possedeva, si recavano a pregio di visitarlo. Spiacevagli però assai, nè contener poteva l' elettrizzamento che se gli eccitava allorchè leggeva certe spiegazioni date ai fenomeni naturali, e le conseguenze che spesso se ne deducevano, e che la supposizione esigevano di Cataclismi più antichi di quello descritto da Mosè, di continenti passati a letti di mare, di formazioni e riforme di monti, di petrificati al di là di seimila anni ec. : tutto egli spiegava col libro della Genesi, e trovavasi ben soddisfatto.

---

straordinaria discesa diede comunicazione il chiar. Prof Brandes defunto alla Società Italiana, che nel 1823 stampò in Modena l' Opuscolo del Brandes su questo fenomeno straordinario. Venuta una tale Memoria a cognizione del Giovene, volle che io lo informassi di tuttociò che conosceva su questo argomento, e con due lettere, una latina, l' altra francese, partecipò al Prof. di Breslavia il tutto, e ne ebbe graziosa risposta e le dovute lodi.

Il tomo XX delle Memorie della Società Italiana nel Fascicolo I di Fisica contiene i risultamenti delle osservazioni izziologiche dall'Autor nostro istituite *sopra alcuni pesci non frequenti a pescarsi nel mare della Puglia*, a cui aggiungesi un supplemento nel fascicolo secondo sù di altri pesci descritti e paragonati con simili animali dal conte Lacepede descritti. Molta accuratezza ed espertezza dimostra il Giovene in queste descrizioni dalle quali apparisce quanto accorgimento richieggasi nel trattare oggetti di storia naturale, e specialmente nel ramo izziologico (28). L' Autor nostro, come abbiam più d' una volta osservato facendo scopo de' suoi studj le scienze naturali, occupavasi al tempo stesso nelle ecclesiastiche discipline, ed avendo noi ricordate tutte le varie produzioni di meteorologia, e di storia naturale che furono il frutto delle fatiche del Giovene, sembrar potrebbe a taluno che quì aver dovesse il suo termine l' elogio di lui negli atti di una Società che coltiva soltanto le scienze naturali; ma per caratterizzare come merita un così illustre soggetto, ed affinchè i miei lettori possano veramente conoscerlo, ho giudicato necessario di far parola ancora delle sue produzioni di sacro argomento.

La prima ha per titolo *Kalendaria vetera mss. aliaque monumenta Ecclesiarum Apuliae et Japigiae* (29). Sembrar può a taluno a primo aspetto poco utile questo lavoro; ma così non giudicheranno coloro, che le filologiche, ed erudite ricerche hanno in pregio. La fina critica, la copia della erudizione, e la scelta latinità con cui è stesa quest'opera, basta per dimostrare quanto valesse l' Autor suo in letteratura e nella scienza liturgica, e con quanto ingegno abbia egli saputo cor-

---

(28) Il Colera che afflisse l'Italia impedì per qualche tempo la pubblicazione nelle Memorie della Società Italiana di un altro scritto del Giovene sui piccoli vortici che anche a debol vento scherzar sogliono nel basso dell'Atmosfera, e sulla superficie terrestre, e sono frequenti nella primavera, e nell' autunno, e che col linguaggio del popolo chiamar si sogliono *Scazza-Morelli*. Questo scritto è stato poi stampato nel presente Volume.

(29) Stampata a Napoli presso la Vedova Reale 1828.

reggere alcuni piccoli errori di Classici Autori. Così giudicarono questa fatica dell'Autore Uomini dottissimi aggiungendo che " quando null' altro scritto avesse l'Arciprete Giovene, è „ sola questa sufficiente a caratterizzarlo per l' uomo d'inge- „ gno sommo, dotto, e letterato. „

Quanto mai ne rincresce che la sua perdita ci abbia privati della seconda parte di un' opera, che giudicandone dalla prima ricca esser doveva di recondite notizie sacre del medio evo, e somministrato avrebbe nuovo pascolo alla erudita curiosità degli amatori della scienza liturgica!

Vita B. Conradi Bavari Civitatis Melphicti Patroni (30); ecco il titolo di altr' opera dell'Arciprete Giovene. Le notizie pellegrine da più fonti ricavate, il fino criterio, la scelta erudizione, e la purità della lingua del Lazio, pregi tutti che adornano questa vita, formano il più bell'elogio dell'Autor nostro, il quale poi la corredò anche di giudiziose note. Il Cardinal Caracciolo Arcivescovo di Napoli, quegli fu che diè il più forte impulso al Giovene per imprendere simil fatica; ma per mettere in chiaro la storia, e l' origine di questo Santo, dovette egli dileguare alcuni dubbj che da taluni moveansi, per il che fare ben conoscendo egli che la storica verità fondasi sù documenti autentici, ricorse a dissotterrarli negli archivi di più luoghi dell' alta Italia e della Germania, dove da otto e più secoli giacevano polverosi e ignoti. Quanta fatica non durò onde verificare alcuni punti di storia non abbastanza fondati (31).

Benchè tollerante ei fosse agli insulti, e moderato di carattere, tuttavia non reggeva ai motteggi ed ai sarcasmi che

---

(30) Stampata a Napoli presso A. Garucci 1836.

(31) L'Autor nostro corredò questa operetta di copiose ed erudite annotazioni, tra le quali ricorderemo la quarta diretta a dimostrare esser stato il Protettore di Molfetta quel Corrado da S. Bernardo chiamato *nobilem puerum*. L'Autore si afflisse assai per alcuni errori occorsi nella stampa specialmente per la confusione di alcune postille collocate fuori di luogo.

o leggeva o udiva lanciarsi contro li dogmi e la pratica della cattolica Religione. Per la qual cosa, come disprezzava le massime di ateismo, riputate generalmente adesso per una vera follìa, nè prendevasi briga delle eresie da coloro sostenute soltanto, che animati sono da spirito di parte, e contro le quali tanto già si scrisse, così frenar non sapevasi allorchè dai libertini occulti sotto la mentita veste di Cattolici o in iscritto, o a voce a distrugger tendevasi con dolci parole che solleticavan le umane passioni, le massime cattoliche, ed a depravare la morale cristiana. Per opporre un argine a così velenose dottrine pubblicò egli tre dissertazioni, sul digiuno ecclesiastico la prima, sul sacramento della penitenza, e sull'usura la seconda, e la terza. L'utilità del digiuno, tanto nell'ordine spirituale, quanto nel temporale, i vantaggi che il Sacramento della penitenza arreca a quelli che ne usano, ed alla società in generale, sono gli argomenti principali che impiega il Giovene per difendere queste pratiche della Chiesa. Ogni azione turpe desta anche nell'animo il più incallito nei vizj tormentosi rimordimenti. Qual altro rimedio più efficace per liberarsene quanto quello del Sacramento della Penitenza? Perlocchè dice egli con molta saviezza. " I morditori ed i dileggia-
,, tori della confessione nel mentre aguzzano i loro denti, e
,, beffeggiano questa augusta, santa, e consolante istituzione,
,, mostrano senza avvedersene, essere essi nemici di loro stessi,
,, nemici dell'uomo, nemici ancora della società (32).,,

La giusta interpretazione del passo dei Santi Evangelj in cui si condanna il servo pigro e neghittoso forma l'argomento principale con cui il nostro Autore nella terza dissertazione dimostra come la negoziazione, e l'industria nel traffico della moneta sia ben diverso dal prestare ad usura (33).

---

(32) Napoli dai tipi della Biblioteca Cattolica 1827.

(33) Vide anche questa dissertazione la pubblica luce.

Un uomo perito nella storia sacra, e profana, nell'archeologia provetto, versato nell' antiquaria a segno che riputavasi l' oracolo della Provincia per conoscere la qualità, ed il pregio delle medaglie, corniole, vasi Etruschi e lapide; un uomo che i professori consultavano nei casi difficili all'uopo come acuto critico, che conosceva a fondo la Giurisprudenza civile e canonica, non che la dogmatica e morale Teologia, quest' uomo insigne consecrò al tempo stesso le assidue sue cure allo studio delle scienze naturali, ed abbiam già enumerando le sue produzioni in questo ramo di cognizioni scientifiche, potuto conoscere quanto ei valeva, perlocchè senza timore di errare dir puossi il Giovene dotto Enciclopedico.

Che se degno di laude è colui che si distinse per sapere e dottrina nella repubblica scientifica e letteraria, giustizia vuole che non si defraudi dei dovuti encomj il Cristiano filosofo, ed il virtuoso filantropo. L' esposizione di pochi fatti basterà a parer mio, per caratterizzare l' Arciprete Giovene come straordinario nell' esercizio delle cristiane virtù, e della vera filantropia. Difensore de' pupilli, degli orfani, e delle vedove fin dalla prima sua giovinezza, fu caritativo coi poveri, e fece provare specialmente gli effetti della sua carità alle famiglie non avvezze a mendicare. Impegnato a fare il bene, niuno da lui partiva malcontento, e nelle occorrenze altrui impegnava anche gli amici. Protettore della studiosa gioventù i mezzi tutti cercava per la migliore di lei riuscita. Affabile, e di buone maniere con tutti, riguardava egli tutti in un modo, se non che cercava con piacevoli motti e con ameni racconti di correggere i difetti altrui. Dichiarato nemico della maldicenza, di fosco rubore tingevasi il suo volto, se alcuna persona distinta parlava male del prossimo; con dolcezza correggeva l' amico, e perfin con asprezza quei che da vincolo più stretto erangli uniti, se arrischiavansi a detrarre in sua presenza alla fama di alcuno. Cristiano Cattolico sdegnavasi di qualunque atto irreligioso, piucchè dell'ateismo che riputava vera demenza, ed allora vedevasi come trasportato fuori dei

limiti della natural sua moderazione; come degenerava dal suo carattere di giovialità alloraquando udiva avvilirsi il decoro Italiano di cui fu sempre sommamente geloso.

" *Quo semel est imbuta recens, servabit odorem,*
" *Testa diu* . . . . . .

Non meglio però si resero palesi le sue virtù che allor quando per la morte del Barone Graziano suo fratello, avvenuta nel 1823, divenne erede di pingue patrimonio. Videsi allora libero nell'esercizio di divider cogli indigenti le sue rendite, e lo eseguì (34); e benchè in allora la sua salute l'obbligasse a dover usare della carrozza, volle egli privarsene, non ostante che dagli amici per consiglio del lodato allora ottimo Prelato ne fosse stato dissuaso. Promotore delle scienze, e della letteratura, che ambiva di veder coltivate specialmente nella sua patria, fece dono al vasto Seminario di Molfetta, di cui anelava la prosperità, della sua ricca biblioteca, del Museo di Storia naturale, di numismatica, e di vasi Italo-Greci, ed ordinò che come vivente lui erano a tutti aperti, così dopo la sua morte divenissero di pubblica utilità; lasciando anche al Bibliotecario un fondo rustico, il fruttato del quale servir doveva per suo onorario in perpetuo. A promuovere vieppiù il decoro di quella religione che egli venerò ed amò sempre, arricchì di rendite lo stallo Arcipretile, assoggettandolo soltanto alla celebrazione di messe allo spuntar dell'aurora per comodo de' buoni contadini e degli artieri cristiani, ed al peso della manutenzione di una lampana a tre lumi da dover ardere cotidianamente al dopo pranzo innanzi alla Santissima Eucaristia, ed altri legati lasciò pure a prò degl'indigenti.

Con tanti meriti, e tante virtù, custode dell'onore benchè sprezzator degli onori, con rassegnazione e giovialità insieme sopportò i mali della vita, a cui andò negli ultimi anni

---

(34) Esiger volle col massimo comodo de' debitori le sue rendite, per tema di assoggettarli alle usure de' negoziatori.

soggetto, e tranquillamente sostenne quelli dell'ultima malattia; al decimo giorno della quale, munito già de' conforti della Religione, domandò licenza agli amici che lo circondavano, acciò lasciato l' avessero in pace con Dio. In tal guisa passò la notte intera, nel mentre il mattino del due Gennajo 1837, sullo spuntar dell' aurora in età di anni 83, mesi 11, e giorni 10, seduto com' era per antica abitudine sul letto, abbandonando per pochi minuti il capo sul petto, terminò tranquillamente la laboriosa carriera, e fè la morte de' giusti. Perderono così i poveri, ed i pupilli il loro amorevole padre, la patria un benemerito e virtuoso Cittadino, le lettere e le scienze il loro Mecenate; l' Italia il socio di molte Accademie; l' Europa un distinto meteorologo e naturalista. Irreparabile perdita! Perdita che difficilmente avrà rimpiazzo! (35)

---

(35) Nel giorno stesso della morte fu aperto un foglio nel quale prescriveva agli eredi sotto la comminazione di una multa di Ducati cinquanta di Regno da distribuirsi ai poveri, che si astenessero da ogni vana dimostrazione, e da qualunque altra funebre pompa; volendo che nel trasportarsi le sue spoglie mortali nell' antica Cattedrale dai suoi fratelli del Capitolo per depositarsi nel picciolo sepolcro fatto anni prima scavare nell' antico Coro, percorse si fossero le strade men popolose, e si fosse soltanto sulla lapida sepolcrale incisa la seguente elegante e modesta epigrafe, che sola basterebbe a dire tutto quanto dir si potrebbe.

ARCHIPRESBITER . IOSEPHVS
MARIA . GIOVENE
QVI . IN . FIDE . FILII . DEI . VIXIT
IPSVM . SALVATOREM
QVI . REFORMABIT . CORPVS . HVMILITATIS
NOSTRAE
HIC . EXPECTAT
DEPOSITVS . . . . . .

Senza temer di violare l' intenzione del defunto il Capitolo gli celebrò nella Cattedrala funerali solenni giusta il rito: l'Arcidiacono cantò con musica puramente ecclesiastica la Messa di requie, terminata la quale, e deposti i sacerdotali arredi, montò egli sulla Cattedra, ove recitò il funebre Elogio, che nella notte precedente per impulso di amici tessuto aveva. Questo, per liberarsi dalle premurose istanze degli amici, delle Provincie, della Capitale, e dell' estero, che domandavano in folla noti-

Qual gloria non fu per lui, e qual tenero spettacolo non presentò a' suoi concittadini allorchè esposto venne nella gran sala del Palazzo il suo cadavere! Immensa folla di popolo accorse a spargere appiè dell' estinta salma le più affettuose lagrime, e ritenendo quell'anima pia già in seno della Divinità, la impegnavano quei buoni fedeli a interceder per loro grazie e favori dall'Altissimo.

---

zie della vita del trapassato, fu con tutta sollocitudine fatto stampare in Napoli dal Pronipote sig. Luigi Marinelli Giovene.

Spinto questi da sentimento di gratitudine verso del Prozio benefattore piucchè dalle ardenti brame de' concittadini dispose, che pel susseguente mese di Agosto il mezzo busto in marmo del Prozio situato fosse nel gran cappellone di S. Corrado nella Cattedrale con iscrizione analoga alle fatiche durate nel rinvenire i documenti, per virtù de' quali dalla S. Sede è stato ordinato pubblico il culto al Santo Protettore, che da circa otto secoli i Molfettani gli prestano.

ELOGIO STORICO

DEL CONTE GIOVANNI PARADISI

SCRITTO DAL SOCIO E SEGRETARIO

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

ANTONIO LOMBARDI (*)

La Poesia e le Scienze naturali sono facoltà fra loro così disparate che esigono diversità straordinaria di talenti in coloro che si dedicano a coltivarle. Mentre il poeta con fervida immaginazione rappresentar deve e dipingere le scene sempre varie della natura ora amene ed or terribili, dotato esser deve di sensibilità grande per svegliar nei lettori gli affetti or teneri ed or forti, e di una sublimità e nobiltà di idee onde sollevarne lo spirito a concepimenti straordinarj: il cultore delle Scienze naturali all' opposto assuefar devesi per tempo alla meditazione delle più recondite verità; armarsi gli è duopo di una straordinaria pazienza a fin di penetrare a fondo la natura degli esseri animali e materiali, di cui conoscer vuole le proprietà e l' indole; deve rendersi famigliare l'astrazione delle idee per separare le complicazioni di esse che alla sua mente si offrono, sia qualora contempla i corpi, e determinar ne vuole le proprietà d' ogni genere; sia se combinar voglia astrusi raziocinj che lo guidino negli intralciati labirinti delle

(*) Debbo prevenire i miei lettori che siccome il Conte Paradisi lasciò non poche produzioni in prosa e in verso, e non molte furon quelle relative alle scienze naturali da lui pubblicate; così non si facciano essi le meraviglie se ricorderò in questo elogio storico varie produzioni di amena letteratura dal nostro Autore date in luce; quantunque ciò non formi lo scopo degli studj della Società nostra; ma conveniva pur di presentare il soggetto encomiato nei diversi aspetti sotto i quali egli figurò.

matematiche e della fisica. Tra quelli che io potrei quì ricordare che furon dotati di così rare prerogative, osserverò soltanto come spiccasse questa varietà di talenti nell' illustre Eustachio Manfredi Bolognese, che riuscì un Idraulico ed Astronomo rinomato, e ad un tempo dedicossi all' amena letteratura, per tal modo che figurò come uno fra gli esimj poeti Italiani nella schiera di que' tanti sapienti di cui Bologna nel passato secolo menò vanto. Un nuovo esempio di questa unione di talenti per la poesia, e per le scienze esatte ci si offre adesso nella persona del Conte Giovanni Paradisi di Reggio in Lombardia, ahi troppo presto mancato alla Scienza, alla Patria, agli Amici.

Due chiari soggetti avevano già illustrata la famiglia Paradisi (1) che venne a stabilirsi negli Stati Estensi sotto il Duca Rinaldo I; il Giureconsulto Agostino Paradisi (2) cioè, ed il pronipote suo Conte Agostino, uno dei più celebri nostri scienziati e padre del Conte Giovanni di cui mi accingo a scrivere questo qualunque siasi elogio.

Primogenito egli della famiglia nacque alli 19 novembre 1760 dalla signora Contessa Massimilla dei Conti Prini, ricevette la prima educazione nel Collegio Seminario di Reggio di Lombardia, e contrasse fin d' allora un amor direi quasi passionato per le poesie di Orazio, inspiratogli probabilmente dal suo precettore Don Antonio Gherardi che esercitava continuamente li suoi discepoli nelle versioni di questo classico antico, e tale fu la predilezione del giovine Paradisi per il Venosino, che il celebre Vincenzo Monti ebbe a dire di lui

---

(1) Io ho ricavato tutte le notizie relative alla vita del Conte Giovanni dall' esteso articolo scrittone dal chiar. sig. Professore Luigi Cagnoli inserito nel Tomo V delle notizie biografiche degli scrittori dello Stato Estense (pag. 223).

(2) Molte sono le opere del Giureconsulto Agostino, e fra queste la più ricercata si è quella intitolata *l'Ateneo dell' Uomo nobile* divisa in molti volumi stampati parte in Italia, e parte oltre monti.

già poi cresciuto in fama (3), che rallegravasi del suffragio di un filologo peritissimo, siccome quello che dal *Moecenas Atavis* fino al

,, *Non missura cutem nisi plena cruoris hirudo*

sapeva Orazio tutto a memoria (4).

I chiarissimi Professori della Modenese Università Giovanni Battista Venturi fisico, e Luigi Cerretti Professor d'eloquenza guidarono il giovane Paradisi nello studio di questa facoltà, allorchè venne egli a Modena, dove il padre Conte Agostino copriva la Cattedra di civile economia. Saggio del profitto in filosofia diede questo alunno con pubblico esperimento da lui sostenuto nel 1779; in cui rispose a varie proposizioni fisico-matematiche divise in tanti problemi e teoremi, che sciolse felicemente e con vera cognizione della materia, cosicchè gli intelligenti conobbero quanto bene augurar potevasi del Paradisi, che apriva con tale buon successo la scientifica sua carriera.

Siccome diffuse e ben composte notizie ci lasciò il chiar. biografo signor Luigi Cagnoli del valor poetico del Conte Giovanni; e siccome gli Elogi che la Società nostra Italiana tributa ai Socj suoi attuali defunti, debbono a precipuo loro scopo prefiggersi i meriti scientifici anzichè letterarj dei medesimi, così io sarò parco nel ricordar le produzioni poetiche e in prosa del Paradisi, ma non dimenticherò le più stimate.

Quindi ricorderò io quì una sua Ode nel 1792 pubblicata a celebrar il cantor famoso Giovanni Ansani, ed un sermone veramente Oraziano per le nozze Taccoli Munarini, composizioni, che riscossero e ben meritamente i pubblici applausi e il fecero conoscere per valoroso poeta (5).

---

(3) Cagnoli art. cit. pag. 224.

(4) Monti del Cavallo alato d'Arsinoe lettera quarta sul principio.

(5) Fuvvi alcuno cui sembrò il sermone alquanto oscuro, anzichè nò; ma in sostanza chi conosce Orazio, convenir dovrà, che il nostro Poeta ha saputo calcar bene le orme di così illustre maestro.

Restituitosi col padre a Reggio nel 1780 e dedicato sempre agli studj si procacciò la stima del Governo, fu ascritto nel 1782 all'Accademia Reggiana degli Ipocondriaci, venne chiamato all'amministrazione della Comune, ed allorquando perdette nel 1783 l'amato suo genitore, gli fu conferita la Presidenza degli studj nella Provincia di Reggio, quantunque non contasse allora che anni 23 di età.

L'economia civile formò gradito oggetto di applicazione per questo giovine, che invitato dal Governo Estense a proporre le sue idee sui mezzi di togliere la mendicità, offrì nel 1789 allo stesso un suo scritto intitolato *Saggio politico intorno alle cagioni principali della mendicità*, che fu applaudito dal Consiglio del Sovrano Ercole III, come ne fa fede la lettera del Cavalier Lodovico Ricci che aveva poco avanti data in luce la sua Riforma degli Istituti pii (6). Amante poi siccome egli era delle scienze naturali, contrasse relazioni con i coltivatori delle medesime e specialmente con il celebre Professore Michele Araldi Segretario poscia dell'I. Istituto Italiano, e col Prof. Paolo Ruffini Presidente in appresso della nostra Società; e quando comparvero le famose sperienze del chiar. Bolognese Professor Galvani *sulla Elettricità animale*, il Conte Paradisi le ritentò, e comunicò i risultamenti da lui ottenuti ed i suoi dubbj all'Araldi, il quale cortesemente gli rispose, esponendogli la propria opinione sul fenomeno nuovo in allora, e che studiato da sommi uomini aprì loro la via a tante scoperte. Prima però di innoltrarmi a far conoscere i pregi scientifici più importanti del nostro filosofo, non ommetterò di quì ricordare che egli insegnò la geometria pratica nelle scuole di istruzione sublime apertesi in Reggio l'anno 1790 per concessione Sovrana, e le operazioni geodetiche di alcuni fra suoi allievi comprovarono il valor del maestro che

(6) Le massime però dal Conte Paradisi spiegate in questo suo scritto non furono approvate ed ei stesso non curò poi in alcun modo questa sua produzione.

i lor passi guidato avea nella profession d'Ingegneri (7). Tracciò già il Biografo di Paradisi le vicende a cui questi soggiacque allorchè discesero in Italia correndo l'anno 1796 le armi Francesi; ed io per non ripetere inutilmente quanto si sà, rimanderò quei lettori che conoscere volessero la parte politica della vita di Paradisi al citato sensatissimo articolo; dirò bensì, che egli occupò luminose cariche, sia nella breve durata della Repubblica Italiana, sia sotto il Regno d' Italia; e che fece spiccare ognora li rari suoi talenti, e le sue morali virtù, nè intralasciò mai di coltivare ora le muse, ed or le scienze naturali, ma specialmente la matematica applicata. In lui ammirossi una chiarezza tutta sua propria ed un ordine mirabile nell' esporre le sue idee; e quando interveniva alle adunanze del Corpo Legislativo a cui più volte presiedette, dopo lunghe discussioni, in cui più Deputati avevan successivamente ragionato, ammiravasi la somma sua facilità a riepilogar quanto esposto avevano i colleghi, con quel *lucidus ordo* tanto dal Venosino encomiato, e poscia ad esporre si faceva il proprio parere.

Conosceva egli a fondo le scienze esatte, la storia, e l'amena letteratura; e i classici autori di essa formavano la delizia de' suoi studj, perlocchè riusciva oltre modo gradita la sua conversazione, ragionando e bene sopra argomenti disparati ad un tempo stesso, ed il filologo, ed il fisico, e l' economista, ed il matematico attinger potevano dalla viva sua voce cognizioni e lumi nelle rispettive facoltà; ma è ormai tempo che io conoscer faccia le produzioni scientifiche uscite dalla penna del Paradisi. Argomento di sublime analisi e ad un tempo quanto mai ameno trattò egli nella Memoria che intitolò *Ricerche sulla vibrazione delle lamine elastiche* (8).

---

(7) Fra le produzioni del Conte Paradisi restate inedite avvi un *Elogio di Tolomeo filosofo per argomento accademico sulla Sfera Armillare* lodato dal suo biografo, ed un *Discorso preliminare sulla evidenza* dal Paradisi recitato quando salì la Cattedra a lui affidata.

(8) Stampata nella parte II delle Memorie dell' Istituto nazionale Italiano, 4.° Bologna 1806, pag. 393.

Aveva già l' illustre Eulero (9) attaccato questo difficile problema esaminando in due scritti le vibrazioni della membrana dei timpani, e quelle delle campane; ma limitatosi esso alle teoriche supposizioni, e non avendo cercato di applicar la teoria alla pratica, ammirar dovettesi in questi scritti come in tant' altri dalla feconda sua penna usciti l' eccellenza dei talenti suoi, e la profondità del suo sapere, ma niuna utile conseguenza trar ne potè la musica (10).

Per cercar di conoscere la natura delle vibrazioni nelle lamine elastiche e per scuoprirne le leggi volle il Paradisi consultar l' esperienza: sapevasi già, così ei dice, che se si tenga saldamente in situazione orizzontale una lamina di vetro sparsa di fina polvere, e si suoni nel lembo con un arco da violino " concepisce la lamina un moto tremulo divenendo ,, sonora, e dopo di avere la polve quà e la balzato in quel- ,, la oscillazione, finalmente si dispone per formare certe fi- ,, gure, dal contorno delle quali più non esce poi comunque ,, continui la lamina a tremolare. ,,

Appoggiato a questo principio istituì egli una serie numerosa di sperienze sopra lamine di vetro facendole suonare, e descrivendo in due tavole le varie regolari configurazioni che prende la polvere dipendentemente dalla figura della lamina, e dal diverso suono acuto, medio, o grave che si eccita coll' arco. Oggetto principale delle sottili indagini dell' esperimentatore in questa Memoria quello si fu, di spiegare in che consista il movimento delle lamine che produce quelle tali disposizioni della polve. Dopo di aver egli variato assai le sperienze, e replicandole più volte, trarne potè alcune conclusioni che spargono qualche luce in una materia cinta di tanta oscurità: tale fu a cagion d'esempio quella, che otte-

---

(9) Commentarj nuovi dell'Accademia di Pietroburgo T. X. an. 1764.

(10) Il chiar. sig. Biot ha trattato lo stesso argomento (Institut national T. IV) ed ha trovata la stessa equazione differenziale che ci diede l' Eulero.

nuta una certa disposizione di polvere, e collocando poi l'appoggio delle lamine in qualunque punto delle curve generate con la polve, e suonando nello stesso tuono, e nello stesso luogo, si ottengono le stesse disposizioni di polvere, come se l'appoggio non avesse cambiato di luogo, e perciò la lamina si vibra egualmente suonata in quei due punti omologhi: importante riesce pur l'altro fenomeno di vibrazione riferito dall'Autor nostro: cioè, se prendansi due lamine sonore, e si faccian comunicare insieme per mezzo di una corda elastica ben tesa " le vibrazioni della prima lamina si comunicano per " mezzo di quella corda alla seconda lamina, e sopra di que- " sta vedesi la polvere sparsa formare le curve pulvifere come " si formavano nella prima lamina.,,

Nè mancò di determinare sulla fine della Memoria con matematica analisi l'equazione generale delle curve pulvifere, equazione differenziale che doveva poi formar l'argomento di altro lavoro del Paradisi per integrarla almeno in casi particolari; ma altre cure, altri studj lo distolsero dall'occuparsene, con danno grave della scienza musicale che avrebbe potuto, la sua mercè, far pogressi straordinarj (11).

Proprietà singolare del Conte Paradisi era, come già accennai, una somma chiarezza ed ordine nelle idee, ed una facilità nel presentarle per cui provavasi non poco piacere a sentirlo ragionare. Un saggio ben luminoso di questa sua bella prerogativa abbiamo in una sua estesa Memoria col titolo: ,, Del giro di un numero qualunque di cose assoggettate a ,, continue permutazioni dipendenti da leggi uniformi.,, Memoria che fu la sola da lui inserita negli atti della nostra Società. Il Problema che l'Autor si propose, dichiarar puossi nei termini seguenti. Data una legge di permutazione fra un

---

(11) Lasciò il Paradisi molte osservazioni inedite sù questo argomento di cui si occupava anche nel 1817; ed era persuaso che non ostante le disquisizioni della Saurin e di Poisson il problema delle vibrazioni rimanga ancora a risolversi (V. Notizie cit. pag. 237).

numero qualunque di cose, determinare la posizione loro dopo una serie di cambiamenti di posto delle cose stesse operati però sempre con quella data legge. In sette articoli dividesi questo lavoro, e cominciando dal considerare il modo più semplice di rappresentare le condizioni di tali problemi, determina l'Autore in seguito *le proprietà generali di alterazione* fra le quali merita che si ricordi quella, che se in un dato problema qualunque si formi un dato numero di colonne rappresentanti varie permutazioni, siccome il loro numero sarà sempre finito, così proseguendo l' operazione indefinitamente, ricomparir dovranno dopo un certo giro le colonne medesime già formate.

Io non seguirò il Conte Paradisi nelle sottili indagini che istituisce in appresso, e per determinare il giro delle cose in analoghi problemi, e per abbreviar la strada nella loro risoluzione, e fissare le leggi semplici e composte, ed applicarle a formar le tabelle che rappresentano le permutazioni delle cose; poichè difficil sarebbe il poter compendiare li suoi raziocinj; dirò soltanto che ei termina questa sua memoria presentando l' applicazione dei metodi da lui ideati alla risoluzione di quesiti dipendenti da più leggi di alterazione, che agiscano alternativamente sul giro delle cose. Quanto sarebbe stato utile, che l'Autore mantenuto avesse la fatta promessa di comunicare al pubblico alcune applicazioni curiose dei principj da lui in questo scritto sviluppati, ma da varie cure distratto e da una inerzia direm quasi connaturale impedito trascurò di riprender per le mani questo argomento, che maneggiato, direm così, praticamente dall' illustre Prof. Paolo Ruffini sulle traccie dell' immortale Lagrange, gli aprì la via a dimostrare la impossibilità della soluzione generale delle equazioni generali di grado superiore al quarto. Se queste due produzioni del Conte Paradisi, le sole di scientifico argomento da lui stampate, non sono voluminose, bastano però a far concepire una giusta idea della penetrazione della sua mente, e della sua profonda metafisica, talchè asserir puossi di lui, che

se avesse coltivato meno la poesia, e dedicato si fosse con più ardore alle scienze naturali, queste possederebbero produzioni di lui più interessanti delle summentovate e al progredimento de' buoni studj giovevoli assai.

Amante siccome fu il Paradisi della bella letteratura ne corse, direm così, tutte le parti, e ci lasciò saggi pregevoli del suo valor poetico, come già fin da principio accennai; e nella prosa pur si distinse, e con due Discorsi recitati in qualità di Presidente all'Istituto Italiano (12), e con altre prose di genere polemico. Diedero motivo a questi ultimi scritti alcune questioni letterarie, come quella del Cavallo alato d'Arsinoe, e l'altra sul poemetto intitolato *Le nozze di Latona* (13), che svegliò aspra guerra fra i letterati Milanesi ed i Toscani; e contro di questi ultimi pubblicò l'Autore nostro uno scritto a difesa del Professor Urbano Lampredi che spiegato aveva sinistro giudizio sul merito delle opere premiate dall'Accademia Fiorentina della Crusca (14).

Mentre la critica e la discussione contribuiscono efficacemente a promuovere l' avanzamento nelle scienze, ed a rettificare i ragionamenti di coloro che alle medesime si dedicano; queste due armi ben maneggiate in letteratura mantengon vivo il buon gusto, conoscer fanno gli abbagli che taluni, e specialmente i giovani prender possono nei loro studj, e prestan mezzi ad evitar quei difetti che producono il decadimento delle buone arti. Piaceva al Conte Paradisi d' occuparsi nell' esame dei componimenti altrui, ed aveva una inclinazione al

---

(12) Il primo di questi discorsi è stampato; l'altro poi recitato nel 1814 alli 14 Aprile rimase per quanto è a mia cognizione inedito.

(13) Lavoro del celebre sig. Prof. Giovanni Rosini. Veggansi nelle citate notizie biogr. T. IV, pag. 24 e 42, all' articolo Lamberti alcuni cenni sù questa contesa.

(14) Il Paradisi sempre amante dello scherzo ironico intitolò questa sua critica. « Confutazione aritmetica di due Opuscoli scritti contro gli Autori di un giudizio « sopra alcune Opere Italiane. »

frizzo ed alla critica (15); e siccome reputavasi di molto peso il suo parere nelle scienze non solo, ma ben anche in letteratura; così " il domandavano di suo consiglio gli Autori, ed „ erane loro candidamente cortese, non mai invido, ne lusin- „ gatore „ così esprimesi il suo Biografo (16).

Applausi non pochi riscosse uno scritto, di tal genere che Paradisi intitolo *Ragionamento sulla Commedia la Lusinghiera del Nota* distinto scrittore di opere teatrali. Spiegò in questo suo lavoro il Paradisi giuste dottrine sulla comica poesia, e critiche giudiziose, alcuna volta severe un pò troppo, cosicchè vidersi nella Biblioteca Italiana alcune postille dei Compilatori a difesa del chiar. poeta, il quale però in una lettera indiritta da Bobbio al Paradisi segnata 18 Gennajo 1822 così si espresse: „ Tutto quello che Ella dice o scrive, alletta, istruisce, ed appaga. „

Non fu però contento il Paradisi di aver dettati precetti sulla composizione della Commedia, ma avventurarsi volle alla pratica applicazione, e nell' anno 1822 pubblicò il *Vitalizio*, Commedia con una epistola diretta al Conte A. Aldini. Confidolla il suo autore al sullodato signor Alberto Nota che attentamente la esaminò, e vi fece in margine le opportune annotazioni, dopo il che vide questa la pubblica luce a Milano. Quantunque abbia il Paradisi scrupolosamente seguito in questo lavoro i precetti dell' arte, e quantunque siasi egli prefisso di seguir le tracce di Moliere e Goldoni, tuttavia quando comparve sulle scene il *Vitalizio*, si divisero assai le opinioni, e pronunziaronsi sù di esso svariate sentenze, e il tempo, cred' io, lo ha giudicato: poichè mentre chiunque legga il discorso che precede la Commedia, stimar dovrà l'Autore

---

(15) Un saggio ei ci lasciò di questa sua passione nel Melodramma intitolato Stratonica, opera da varj letterati raccozzata, ma in gran parte dal ch. Prof. Luigi Lamberti, e dal Paradisi, i quali derider vollero le assurdità che tutto dì ci presentano i Drammi musicali.

(16) T. IV, delle citate notizie biogr. pag. 239.

come profondo conoscitore dell' arte, quando poi leggerà la Commedia del Vitalizio, dovrà convenire col chiarissimo sig. Professor Luigi Cagnoli " che manca al Paradisi quella fiamma ,, vivificatrice delle arti, dalla quale sorge il diletto, e le cui ,, scintille non si apprendono sempre di leggeri a chi ponsi ,, nella via teatrale di sessant' anni (17). ,,

Se conoscer poi si volessero più estesamente alcune altre contese civili e letterarie da lui sostenute, consultar puossi le più volte citate notizie (18). Io qui ricorderò soltanto l'*Hypercalypseos* del Foscolo, in cui *sono presi di mira i Parassiti del Conte Paradisi e quei del caduto Governo*. Scritto che si ritenne una vendetta contro i critici, ed i nemici dell'*Ajace* Tragedia del sunnominato Foscolo sprezzata dal Pecchio scrittor della vita di esso tragico, e quel che val, più dal celebre Monti.

Le rettificazioni poi che il Conte Paradisi fece ad alcuni tratti della storia d' Italia del Botta (19), nei quali descrive questi infedelmente alcuni fatti che risguardano direttamente il Paradisi, mentre dimostrano l' inesattezza dello storico, ci somministrano un piacevole trattenimento, perchè sortiti dalla penna felice di uno che scrive senza affettazione, in istile chiaro, animato, e ad un tempo conciso ma non oltre misura.

Ricompostisi gli affari d' Europa, e riconsegnata l' Italia agli antichi Dominatori, il Paradisi si restituì alla patria, e libero dalle occupazioni di Governo, si consacrò più intensamente allo studio, e la poesia, e le scienze naturali formarono ognora l' oggetto de' suoi più graditi trattenimenti, non tralasciando però di passare alcune ore del giorno a conversare con scelti amici, che dilettava co' festevoli suoi motti, e ad

---

(17) Notizie cit. T. V, pag. 241.

(18) V. sopra pag. 244, e seg.

(19) Osservazioni e giudizj sulla storia d' Italia di Carlo Botta 8.° Modena ap. Vincenzi e Comp. 1825, pag. 445.

un tempo istruiva con li scientifici, ed eruditi suoi discorsi di amenità sempre conditi, e di mirabile chiarezza. Uguale a se stesso nella prospera e nell' avversa fortuna che in varie epoche lo bersagliò, visse il Paradisi ognora una vita onorata e tranquilla, e con cristiana filosofia, e religiosa rassegnazione avvicinar vide l' ultimo istante che separa il tempo dalla eternità nel giorno 25 Agosto dell' anno 1826.

Reggio sua patria perdette in lui uno de' suoi più rispettabili concittadini, e le scienze naturali ed astratte un esimio cultore, dal quale però avrebber potuto sperare frutti più ubertosi, se le pubbliche cure, l' amore alle amene lettere, ed una troppo acuta vista intellettuale, per cui analizzar voleva in ogni verso gli oggetti scientifici che imprendeva a trattare, nè mai era pago del proprio giudizio, non lo avessero di troppo frenato a pubblicare i risultati delle sue meditazioni sù gli astrusi argomenti di matematica pura ed applicata.

ISCRIZIONE SEPOLCRALE

Posta all' ingresso a mano destra della Chiesa di S. Domenico in Reggio.

☧

HIC . JACET

JOANNES . AVGVSTINI . F. PARADISIVS . COM.

PHILOSOPHVS . MATHEMATICVS . POETA

PRAESES . INSTITVTI . ITALICI

PATERNAE . LAVDIS . AEMVLATOR

QVI . FLORENTI . AETATE . MVNERIB . PVB.

HERCVLE . III . ATESTINO . DOMINANTE

IN . MVNICIPIO . SVO . EGREGIE . FVNCTVS

EXIN . DIFFICILIMIS . ITALIAE . TEMPORIBVS

AD . MAXIMOS . HONORES . DIGNITATESQ . VLTRO . DELATAS

EVECTVS

POST . RERVM . CONVERSIONEM . REDVX . IN PATRIAM

DOCTRINA . LITTERIS . SVAVITATE . MORVM . ELVXIT

DIRO . HYDROPE . IMPLICITVS

INTER . SVOS . ET . AMICOS . PLACIDO . PIOQ . EXITV . DECESSIT

VII . KAL . SEPTEMB . A . MDCCCXXVI

QVVM . VIXISSET . A . LXV . M. VIIII . D . VII

MARIA . PARISI . COM.

ET . AVGVSTINVS . FR. F.

LEVIRO . ET . PATRVO MERENTISSIMO . P. C.

OPERE

DEL CONTE GIOVANNI PARADISI (*)

PROSE.

1. Delle principali cagioni della mendicità — Saggio Politico — per dirigere a di lei sollievo la riforma degl' Instituti Pii — con lettera di accompagnamento al supremo Consiglio di Economia del 14 Marzo 1789. Inedito.
2. Discorso preliminare alla Geometria pratica recitato per l' aprimento della scuola nel 1790. Inedito.
3. Elementi di Algebra e Geometria ad uso del Liceo, 1790. Inediti.
4. Elogio di Tolomeo, il Filosofo. Inedito.
5. Ricerche sopra la vibrazione delle lamine elastiche. — Memoria per l' Istituto Nazionale, classe di Fisica e Matematica. — Tom. I, Parte II, pag. 293. Bologna 1806.
6. Festa del Senato Consulente per la pace di Vienna con versi, iscrizioni ec. Milano 1810. Dalla Stamperia Reale in foglio con traduzione in francese.
7. Confutazione Aritmetica di due opuscoli scritti contro gli Autori di un giudizio sopra alcune opere italiane. Milano Tipografia Silvestri, 1811.
8. Discorso recitato al R. Istituto di Scienze Lettere ed Arti in Milano il 30 Dicembre 1812. Fu stampato anche dal Nardini nel 1813.
9. Altro Discorso nella pubblica Adunanza dello stesso R. Istituto dei 14 Aprile 1814.
10. Del giro di un numero qualunque di cose assoggettate a continue permutazioni dipendenti da leggi uniformi. — Memoria dei 28 Ottobre 1816. — Memorie della Società

(*) Questo catalogo è ricopiato dal cit. art. biografico T. V, pag. 249, e seg.

Italiana delle Scienze. Modena, Società Tipografica Tomo XVIII, pag. 143. — 1820.

11. Ragionamento sulla Commedia. — La Lusinghiera — dell' Avvocato Alberto Nota, inserito nella Bib. Ital. Tomo XIV, Aprile 1819. Si trova pure in alcune edizioni delle Commedie del Nota stesso.
12. Risposta del Conte Giovanni Paradisi alla lettera dell'Anonimo stampata in Firenze nel 1822. Inedita.
13. Lettera del Conte Giovanni Paradisi al signor Carlo Botta. — Poligrafia Fiesolana 1825, si trova ancora nelle — Osservazioni, e Giudizj sulla Storia d' Italia di Carlo Botta. — Modena 1825 per G. Vincenzi e Comp.

POESIE

1. Il Vitalizio. — Commedia del Conte Giovanni Paradisi. — Milano 1822, per Paolo Emilio Giusti con un' Epistola di 253 versi al Conte A. Aldini.
2. Poesie scelte edite ed inedite di Giovanni Paradisi. Firenze 1827, all'insegna di Dante con cenni biografici sull'Autore.

N. B. In questa Raccolta molti componimenti altra volta stampati hanno variata la lezione, e taluno anche è interamente rifuso. L' edizione uscì dopo la morte dell'Autore, ma fu da lui stesso ordinata per la stampa.

3. Poesie scelte edite ed inedite di Giovanni Paradisi. — Milano per Giovanni Silvestri 1828. — Ristampa dell' edizione precedente, ma mancante di sei componimenti non approvati dalla Censura.

ALTRE POESIE

Stampate ed escluse dalla raccolta.

SONETTI.

Per nozze
„ Quando vi strinse in sì bel nodo Amore „
Reggio 1778.

Per Monacazione
„ Vive e non senza pianto in queste mura „
In Raccolta 1784.

Per Sacro Oratore
„ Chi i cori a penetrar, chi ti die' lumi „
Carpi 1785.

Per Maria Vergine
„ Se in questa valle di miserie piena „
Reggio 1786.

Per la Processione del Corpus Domini
„ Non anco apparve in Ciel più lieto giorno „
Reggio 1822.

Per Sacro Oratore
„ Non da fregi dorati, e da scoltura „
Reggio 1825.

ODI.

Pel medico Tissot che da Pavia parte per la Germania
„ Andrai dove ti chiama
L' amor natio con prepotente voce „
In Raccolta 1783.

Per novello Sacerdote
„ Me sprezzi il cieco volgo,
E l' aspro stile che mi detta il vero „
Reggio 1785.

Per Monaca

„ Pace chiede al Ciel clemente
Il nocchier ch' or balza all' Etere „

1791.

Al celebre Pantomimo Francesco Clerico

„ Qual serto io doni, o Clerico,
A te di molti degno „

Parma co' Tipi Bodoniani in 8.°
r. f. col ritratto del Clerico. 1794.

MELODRAMMI.

Stratonica. — Melodramma giocoso in due atti. — Reggio pel Fiaccadori 1827.

N. B. Nella Biografia del Lamberti si parlò di questo componimento alle pag. 23, 32, 162, Fasc. I, Tomo IV.

POESIE INEDITE

ODI.

Il dono

„ Bella Ninfa, io vado altero
Del tuo dono, e lieto tanto „

1791.

Ad un Amico

„ Mentre è bonaccia ancor dall' onda infida
L' incauto di ritrar legno t' affretta „

1793.

A Zenone

„ Dell' atroce Canicola
Già l' ora avvampa il Cielo „

1793.

A Nice

„ Primo amor ne' miei verd' anni
La mia man di plettro armò „

1794.

SERMONI.

All'Abate Gaetano Fantuzzi
„ Fantuzzi, se colui sol viver tieni
Che nel mar delle cose ognor governa „
1794.

A Jacopo Lamberti
„ Solleciti di Te con matern' alma
Pel tuo ritorno e mane e vespro ai Numi. „

MEMORIE
DI
FISICA

DI ALCUNI FENOMENI METEOROLOGICI
DELLA PUGLIA PEUCEZIA
MEMORIA POSTUMA

DELL' ARCIPRETE

D. GIUSEPPE MARIA GIOVENE

Ricevuta adì 22 Maggio 1837.

Non sarà forse inutile, che anzi forse potrà essere cosa piacevole agli studiosi delle scienze meteorologiche, che io prenda a descrivere e nelle varie sue forme un fenomeno metereologico non infrequente in questa nostra Puglia Peucezia, e del quale non rammento averne in altre opere di fisica trovata descrizione. E tanto più, che questo tale fenomeno sembra essere *si licet parva componere magnis,* come figura, o miniatura degli Uragani, dei Tifoni, delle Trombe, ed altri simili terribili, e spaventevoli fenomeni. Nè io ricaverò quello che anderò dicendo da relazioni altrui soventi volte esagerate, o anche corrotte, ma dalle mie proprie oculari osservazioni, fatte queste in mezzo ad una estesissima pianura, e con orizzonte a perdita di occhio, senza monti o colli ma da un' alta casa di campagna la quale io ho chiamata mio eremo campestre.

Erano corsi i primi giorni di Febbrajo piovosi e tempestosi, che già è noto il proverbio antico che corre per tutta Italia sul canto della *Cericcola,* quando sopraggiunto un gagliardo e forte borea, chiamato a ragione da S. Girolamo lo

scopatore del Cielo, erasi rasserenata perfettamente l'atmosfera, ed intanto io, come da quando a quando era uso fare, mi era ritirato nella mia solitudine campestre, per ristorarmi dalle mie moltiplici cure e fatiche per ragione del mio ministero ecclesiastico. Era pertanto il Cielo serenissimo, e vi regnava perfetta calma, ed essendo io solitario, applicato a scrivere in un piccolo gabinetto non so che, quando fui tocco nell' orecchio da un sordo cupo e lontano sussurro. Tosto lasciai il mio tavolino, e nella stanza vicina mi affacciai ad una amplissima finestra che guardava il N. N. E. e mi dava l'aspetto del mare vicino per poco meno di due miglia, mare che correva dal N. N. O. all' E. S. E. Mi avvidi pertanto che un gran nuvolo polveroso dalla parte dell' O. si andava avvicinando; mi ci fermai, e circa le ore 11 della mattina si andò avvicinando passando sotto gli occhi miei alla distanza di un circa duecento tese. Il nembo ventoso portava la larghezza di un 40 piedi, come potei estimare, ed altrettanti di altezza. Sotto all' impeto violento del vento stridevano, e cigolavano gli alberi, i quali abbassavano le loro chiome, massimamente i flessibili ulivi, che erano appunto nel passaggio. Intanto sollevandosi la polvere dal sottoposto terreno andava ravvolta in moltiplici turbinetti a regolari spire, quasichè passeggiando e saltellando sparsi insieme: si sarebbe detto che un improviso torrente scorresse per il proprio alveo, e l'acqua ravvolgendosi in piccioli vortici qua e là trascinasse seco quanto vi fosse nel proprio alveo, e pietre e sabbie, e sterpi; senza però uscire dall'alveo, che in fatti nissun vento affatto lateralmente si sentiva, ed io non ne sentj affatto quantunque vicinissimo. Al primo mirarla parvemi che quei tali turbinetti fossero infiammati, o si vero infuocati, ma considerata la cosa ben mi avvidi che quella polvere turbinosa investita dai raggi del sole il quale era presso al meriggio riceveva un aspetto come se fosse di fuoco. Il nembo passò innanzi seguendo per linea retta, e senza tortuosità, ed io lo accompagnai anche col mio cannocchiale, in fino a che giunto al mare si dissipò

interamente, senzachè io lontano come era, avessi potuto accertarmi se avesse lasciato nel mare qualche vestigio. Non mancai però di visitare il luogo ed i luoghi per i quali era passato il nembo, e niun' ombra trovai di fuoco o fiamma, ma solamente alcuni piccioli rametti di ulivo spezzati, e le picciole erbe estirpate e sradicate, e miste alle fronde di alcuni alberi strettamente ammonticchiate al basso dei muri a secco che nelle nostre campagne dividono le particolari proprietà.

Ora vengo a dire di altro simile fenomeno da me in altro anno, ed in altra stagione osservato, che sebbene meno vistoso, o forse men gradevole a guardarsi del primo, pur merita di essere descritto; perchè mi offerse varj particolari, i quali pur non bisognerebbe trascurare. Erano già gli ultimi giorni di Maggio, quando la migna era in gran parte sbucciata a fiorellini, che io al solito trovandomi nella mia solitudine campestre venne il cennato fenomeno offerto alla mia vista. Un forte e veemente sibilar come di vento percosse i miei orecchi, e fattomi subito alla finestra già di sopra descritta, vidi che un torrente di vento impetuoso, che così mi piace chiamarlo, venendo dal S. S. O. dirigendosi per l' E. S. E. passava rasente il muro del giardino di frutti ed agrumi, il quale circonda la detta mia casa di campagna, e però il detto torrente a me vicinissimo che era distante per un circa cinquanta piedi. Come nel primo, fischiavano gli alberi, e piegavano le loro chiome all' impeto del vento, alzandosi ancora la polvere, ma con pochi di quei turbinetti spirali, dei quali sopra ho detto. Il torrente, per quanto potei estimare, poteva avere un circa trenta piedi di larghezza. Scorse pertanto il detto torrente in linea retta al E. S. E. che giunto al mare disparve intieramente, e debbo aggiungere, che similmente l' atmosfera era in perfetta calma senza che apparisse veruna nuvola nel Cielo. Io visitai i luoghi per i quali la meteora era passata, e trovai simili fenomeni, che le picciole piante erano state sradicate ed ammonticchiate insieme colle frondi di alcuni alberi al pedale di un muro a secco;

siccome ancora osservai che le viti, che erano sul passaggio, erano state maltrattate nei pampini, e nelle punte di alcuni tralci. Per quanto potei osservare quel torrente di certo si sprigionò pochissimo lontano dal luogo in cui io era. Alla mattina susseguente si trovò, che lungo il corso della meteora quasi tutti i grappoletti della migna, degli ulivi erano caduti a terra; e perciò fu, che io credetti mio dovere rilasciare al fittajolo di un fondo piantato ad ulivi di mia proprietà vicino al mare una qualche parte della mercede comecchè danneggiato per caso fortuito ed insolito.

Altra volta mi toccò in sorte di farsi a me presente uno di quei turbinetti a spira come isolatamente. Era il Luglio, ed io secondo il mio solito addossato ad un' asinella per l'ampissima strada, che da Molfetta va a Terlizzi me ne andava secondo il mio solito all' eremo campestre. Erano le ore quattro circa del mattino, il cielo sereno perfettamente, il sole splendidissimo, e vi regnava perfetta calma senza soffiar di vento per modo che niuna fronda di albero, si moveva. Intanto alla distanza di quattro in cinque piedi da me improvisamente vidi sorgere un turbine di polvere, che dal suolo attortigliata in spira regolarissima sorse su alzandosi in aria fino all' altezza di presso a venti piedi, che scomparve quietamente senza che io avessi ricevuta impressione qualunque. A rappresentare questa meteora non trovo miglior mezzo fuori questo di una grossa serpe col corpo di un diametro di tre pollici parigini, la quale colla testa in giù si ravvolgesse in spira alzandosi su per l' aria. Il primo anello messo a terra era di circa il diametro di un piede.

È ben vero che in questa Regione calda e secca spirando violento e tempestoso il vento dai S. e più particolarmente dal S. S. O. il quale *pubes pulveris vehit* secondo l' espressione di Livio, la polvere si vede qua e là ravvolgersi in giri vorticosi, quasi rasente la terra, ma non mai mi è avvenuto di vedere quei turbinetti a spira così regolare, e così ben tornita ed alzarsi tanto altamente in aria come già di sopra ho descritto.

Questi tali fenomeni frequenti e conosciutissimi a' nostri foresi nel lor linguaggio si chiamano *Scazzamorelli*, vocabolo che indica *Folletti*, o sia *spiriti Folletti*. I più rozzi e semplici imaginano che tali folletti in tempo tranquillo, e soleggiato massimamente prendonsi diletto di far una passeggiata, trastullandosi, e danzando allo zufolar del vento, ed al fischiar degli alberi. Altri poi, che credono saperne di più (e chi sa forse se si appongano al vero) attribuiscono questi piccioli uragani a sbocchi di vento che si alzano su di quei tali luoghi, che essi chiamano *Capiventi*. Sono come pozzi, o voragini più o meno profonde scavate nel suolo, che è di strati calcarei Appennini, i quali in qualche altro luogo di queste regioni si chiamano *Fogge*. Il fu celebre mio amico Sig. Ab. Fortis mi diceva esser simili alle così dette *Foibe* comuni nell'Istria. Certamente però nei dintorni del già detto mio eremo non vi erano, nè vi sono nè voragini, nè *capiventi*, come diconsi, ed il torrente ventoso già descritto in secondo luogo ebbe incominciamento nelle vicinanze del ridetto mio eremo. Comunque sia, sembra che non possano facilmente i già descritti fenomeni essere spiegati senza ricorrere ad emanazione, o emissioni sotterranee. A me basta però aver messo tali fenomeni alla conoscenza dei Fisici, da' quali mi spetterà attendere il loro giudizio.

Molte cose avrei voluto e potuto aggiungere ad illustrazione dei mentovati fenomeni, ma ho creduto meglio lasciarli nella semplicità delle loro descrizioni. Non posso però dissimulare farmi grandissima sorpresa quell'andare della meteora direttamente, e senza torcere a sinistra o a destra, come mi sorprende la regolarità perfetta della spira dei turbinetti.

I meteorologisti sapranno meglio, che io non posso, darne la spiegazione.

Ricevuto li 15 *Ottobre* 1836.

Soggiungo quì alcuni particolari a me suggeriti dall'egregio Professore di Storia Naturale nel Real Liceo di Bari Sig. Michele Turi. Egli si trovò in mesi estivi, ed a ciel sereno ed in perfetta calma, e col sole splendidissimo due volte involto improvisamente nei già descritti torrenti di vento, e di polvere. Egli si trovò coperto di polvere, ed in mezzo a turbinetti in spira. Egli non ebbe altro male fuori quello d' essergli stato tolto di capo il cappello, che saltò in aria e quindi ricadde giù a pochi piedi lontano. Niuna commozione soffrì eccetto quella del timore, e della paura. Una seconda volta si trovava in simili circostanze a sovrastare ad alcune donne, le quali erano occupate a trebbiare le piante già secche di anice, e separarne i semi, quando tutta la compagnia si trovò ravvolta nel torrente del vento e della polvere, che mandò per aria, e disperse le foglie secche, ed in parte ancora le semenze. Niun male però ne venne se non che una donna ebbe una delle guance, come abbrustita, ed arrossita, la qual cosa egli attribuì a qualche filo elettrico, che si fosse strisciato su quella guancia.

Vogliano i dotti Fisici alcun poco più attentamente esplorare la reciproca influenza tra l'interiore della terra e l' atmosfera, e collegare insieme i fenomeni dell'una e dell'altra. È già da gran tempo conosciuta tale corrispondenza ed influenza, ma che pare meriterebbe essere più e meglio osservata, che finora non si è fatto. Alcune osservazioni potrebbero indurci a sospettare che il *Cholera* che ha passeggiato e passeggia funestamente per tutta quasi l'Europa possa essere un effetto di effluvj sotterranei, come già si crederono essere stato del famoso Catarro russo, e della più che famosa nebbia secca, che dietro ai funesti tremuoti di Calabria si sparse, e si mantenne per lungo tempo adombrando l' Europa.

SAGGIO D'APPLICAZIONE
DEL PRINCIPIO DELL' INDUZIONE ELETTRO-DINAMICA
A' FENOMENI ELETTRO-FISIOLOGICI
E IN PARTICOLARE
A QUELLI DELLE TORPEDINI

DI GIO. BATTISTA PIANCIANI

DELLA COMPAGNIA DI GESÙ

PROFESSORE NEL COLLEGIO ROMANO

Ricevuto adì 7 Maggio 1838.

Tostochè una nuova legge si scopre in alcun ramo delle fisiche discipline, diviene necessaria una rivista delle spiegazioni anteriormente date a que' fenomeni che possono con quella avere alcuna relazione; e spesso appare qualche raggio di luce ad illustrarne alcuni che prima mancavano di probabile interpretazione Questo è il caso della legge delle correnti d' induzione scoperte dal Sig. Faraday, le quali debbono influire negli effetti delle altre correnti elettriche e magnet-elettriche, e perciò non voglionsi perder di vista nella spiegazione di tai fenomeni. Di fatto prestamente e felicemente applicavasi tale scoperta al magnetismo di rotazione scoperto dal Sig. Arago, e si dava pure non assurda spiegazione al paradosso osservato dal Sig. Labaillis, che col suo sì geloso sideroscopio vide l' antimonio e il bismut respingere l' uno e l' altro polo dell' ago calamitato. Ma saranno quì terminate le applicazioni della nuova legge a' fenomeni prima d' essa conosciuti? Non lo penso. Io indicava due anni addietro, che quello, il qual dicesi contra-colpo elettrico, ed è talora prodotto dalla scarica delle nuvole, potesse essere effetto d' in-

duzione elettro-dinamica (1). Non ritornerò a questo argomento, tanto più che ora trovo, che il Prof. Henry si è stabilito di provare questa proposizione nella riunione dell'associazione Britannica tenuta nello scorso Settembre (2).

Sembrano le correnti d' induzione atte in singolar modo a produrre gli effetti elettro-fisiologici. Se con un filo metallico ordinario communichino le due piastre d' un elettromotore semplice, non si ha da esso la scossa, ma però, usando filo assai lungo e avvolto in elica, può sentirsi la commozione alla lingua e ancora alle mani, nell'atto in che s'apre il circuito e ciò assai più agevolmente, se nell'elica sia un cilindro di ferro dolce. Questo fatto è stato diligentemente osservato dal Faraday, il quale mostra che questa commozione e la scintilla che l' accompagna, sono prodotte da una *estracorrente* generata nell' aprirsi del circuito, la quale non è altro, che la corrente indotta destata per influenza nel conduttore che trasmetteva la corrente principale, o in altro con esso comunicante (3). Su questa estracorrente ha fatto recentemente delle belle esperienze il Sig. Masson. Questi con pila voltiana di pochi elementi, di cui apriva e chiudeva rapidissimamente il circuito col mezzo d' una ruota dentata e d'un lungo filo metallico avvolto in elica, aveva una continuazione di forti scosse, che diveniva una contrazione dolorosa continua, il cui effetto era, che più non potevansi lasciare i conduttori metallici abbracciati, anzi si stringevano più forte: così accadde, dice egli, a chi in Parigi volle tenere stretto colle mani il ginnoto, pesce elettrico, le cui scosse sono, com' è noto, assai più veementi di quelle delle nostre torpedini (4).

---

(1) Ist. Fis. Chim. T. III. P. II. p. 538.

(2) Bibl. Univ. Oct. 1837. p. 370.

(3) Phil. Trans. P. I. 1835. — Bibl. Univ. 1835. T. II. p. 128.

(4) Echo du monde savant 1837 n.° 66. Comptes rendus des seances de l'Ac. 1837. som. I. p. 456.

E non potranno eziandio senza conduttore assai lungo stabilirsi delle correnti d'induzione ne' corpi animali? Non potrà destarsi la corrente indotta in una parte di questi diversa da quella, ove corre la corrente principale, e per l'imperfezione de' conduttori avvolgersi per avventura in lunghi e talor tortuosi circuiti? Nel corpo umano vedo, che assai agevolmente si forma l'estracorrente, allorchè si fa operare la macchina magnetelettrica. E allorchè opera l'elettromotore voltiano, semplice o composto, alla maniera ordinaria, non potrà qualche fenomeno fisiologico, che s'osserva soltanto all'aprire o al chiudere del circolo, prodursi dalle correnti indotte? La corrente indotta si suscita anche ne' conduttori di seconda classe, anzi ancora ne' coibenti. I fenomeni di magnetismo in moto sono cagionati, non penso che alcun fisico ora ne dubiti, dalle correnti d'induzione. Ora in quest' esperienze veggonsi influire sulla calamita i liquori, e.g. l'acqua, anzi ancora il cristallo, come osservò col suo *micrometro magneto-elettrico* l' illustre Prof. Zamboni (1). I fenomeni della pila, altri sono permanenti come la corrente principale: tai sono gli effetti chimici, calorifici e luminosi, le sensazioni di sapore, certa sensazione alle mani che toccano i poli, assai spiacevole, se troppo prolunghisi: altri, come le correnti d'induzione, sono passeggieri e manifestansi senza più al chiudersi o all'aprirsi del circuito voltiano: tali sono le commozioni e il lampicello, di cui si ha la sensazione, allorchè la corrente passa per la testa. Diremo che appartengono alla corrente principale tutti gli effetti della prima classe e alle correnti indotte i secondi? Io non oserò certamente affermare una così nuova proposizione, che agevolmente si vede sottoposta a troppo gravi difficoltà e che dovrebbe sostenersi con prove del tutto concludenti. Ma però non sarà, se bene avviso, egualmente riprovabile il pensare che qualche parte possano avere in questi fenomeni le correnti indotte.

---

(1) Ann. delle Scienze del R. Lomb. Ven. 1832 p. 229.

Pongo due pezzetti, uno d'argento ed uno di zinco, ambedue in bocca, uno fra il labbro e la gengiva superiore, l'altro fra il labbro e la gengiva inferiore; provo una leggiera sensazione di luce, allorchè i metalli s'adducono a toccamento e non di rado ancora quando i metalli un dall'altro si distaccano. L'elettrico, che si suscita in questo caso, non può essere assai copioso: non so dunque se possa dirsi con verisimiglianza che esso non passa tutto per la via più breve e più diretta, ma non trovando in essa sfogo bastante, si diffonde per tutto il capo e investe il nervo ottico. Ripeto l'accennata esperienza, traendo fuori la lingua e tocco con essa il metallo superiore e l'inferiore: sento il sapore finchè dura il toccamento, e la sensazione passeggiera di lume non manca: e pure ora, oltre la strada che chiamavamo poc'anzi più breve e più diretta, ve ne ha una brevissima, cioè la spessezza della lingua, per cui senza dubbio scorre l'elettrico. Forse si spiega più agevolmente quella sensazione di lume, supponendola prodotta da un'estracorrente ossia da una corrente indotta. Aggiungo un'osservazione, senza per altro pretendere di darle gran peso. Il Volta osservò con sorpresa che, con 30 coppie ed anche più, il lampo *non pareva nè più lungo ed esteso, nè molto più vivace che con una sola coppia;* e il Faraday osservava che gli effetti dell'estracorrente erano gli stessi, operando con pila di 50 coppie, o con un solo elemento.

Al certo io non dirò che tutte le commozioni prodotte dalla pila voltiana sieno effetti d'induzione; per altro parmi che sarebbe da osservare se talora l'induzione abbia alcuna parte in tai fenomeni. Indubitatamente all'induzione si devono le scosse prodotte dagli apparati magnetelettrici: anzi quelle alquanto energiche, se mal non m'appongo, nè pur sono generate dalla corrente indotta della calamita, ma piuttosto da un'estracorrente, da una corrente di seconda induzione, come mi sembra d'aver reso probabile nel mio *Saggio sui fenomeni d'induzione magnetelettrica* (1): se la corrente

(1) Gior. Arcad. Dicembre 1836. T. LIX. p. 286.

principale trovi aperte due strade, va per la massima parte, per la migliore, e l' estracorrente prende la via men buona e più lunga.

Ma lasciamo questo, e consideriamo per un momento le commozioni galvaniche. Dopo le prime contrazioni mostrate al Galvani da que' suoi ranocchi così benemeriti delle scienze naturali, di quante sagaci indagini non sono stati oggetto questi fenomeni! E gl' Italiani che furono i primi, sono stati e sono tuttora i più assidui nell' occuparsi intorno ad essi. Al certo tante ricerche sono state fruttifere per la scienza. Niente dimeno, dopo tante vittime sanguinose offerte dall' umana curiosità alla natura, per indurla a svelarne pienamente i suoi segreti si sono avute a tutti i quesiti assai chiare risposte? o alcune non rassomigliano piuttosto alle ambagi degli antichi oracoli di Apollo? Dopo tanto trucidare in ispecie di rane (dacchè le ordinarie vittime son tuttora *le garrule presaghe della pioggia*) s' accordano i nostri fisici sulle leggi e sulle spiegazioni di tai fenomeni? Certo che no.

Sicuramente io non sono da tanto che possa torre di mezzo ogni oscurità: ma se punto veggo, fisici più valenti potranno almen diradarla un poco più, se nello spiegare i fenomeni vorranno ancora mettere in conto gli effetti dell' induzione elettrodinamica.

Il ch. Sig. Prof. Marianini, per diligenza e per costanza a niuno secondo tra i fisici che hanno dato studiosa opera a queste ricerche, moltissime volte ha osservato che se deviasi la corrente elettrica dal corpo della rana col mezzo d'un arco metallico, questa si scuote (1). La scuote una corrente d'induzione, o un' estracorrente? Nol so. Posso per altro rammentare come allor quando deviasi con un arco metallico la debol corrente che destata dalle macchine magnetelettriche passa pel nostro corpo, proviamo la scossa dovuta, a quanto pare, all' estracorrente.

---

(1) Sopra le contrazioni muscolari . . . §. VIII.

La corrente che passa per la rana se è *diretta*, cioè se secondo l'andamento de' nervi del midollo spinale all'estremità, è atta a produrre contrazioni forti e frequenti al chiudersi del circuito, ma non così all'aprirsi di questo. Contraria efficacia osservasi nella corrente *inversa*. Le sperienze de' Signori Marianini, Zantedeschi e Mayer, Nobili e Rosellini, benchè non in tutto d'accordo, concorrono a stabilire questa dottrina. Or bene: il lodato Prof. Marianini ha osservato come, allorchè una rana preparata solo scuotesi al chiudere del circolo per la corrente diretta, e solo all'aprirlo per l'inversa, si può rovesciare il fenomeno, cioè ottenere la scossa al chiudere e non all'aprire colla corrente inversa e per converso. Ciò conseguiva, facendo comunicare il tronco colle cosce per un conduttore sì buono, che l'elettrico o la massima sua parte avesse a passare per esso (1). Pare che questo fenomeno possa interpretarsi così. La corrente principale tutta o pressochè tutta passa pel conduttore migliore; ond'è che la rana non si scuoterà, se non per la corrente indotta. Se la corrente principale è diretta, quella indotta sarà inversa, e perciò inefficace o debolissima al chiudersi del circuito: e sarà diretta, e però efficace, all'aprirsi: l'opposto avverrà, se la corrente principale sia inversa.

Spesse volte si è veduto contrarsi un muscolo nel chiudere del circuito ed un altro contrarsi intantochè questo aprivasi. Se fra una piastra di zinco ed una di argento, che toccansi per un orlo, chiudasi nulla più che una particella del nervo, da cui pendono le estremità della rana, queste si scuotono e divincolano, benchè non sembri che debba passar per esse l'elettrico. Allorchè due persone impugnano una la piastra d'argento, l'altra quella di zinco, e tengono coll'altra mano una il tronco, l'altra una gamba d'una rana, se s'adducono a toccamento il zinco e l'argento, l'altra gamba libera che sta penzolone dal tronco, per la quale non pare che passi

(1) Ann. delle Scienze del R. Lomb. Ven. 1834. p. 39.

la corrente elettrica, si scuote vivamente. Non nego che a questi e a simili fatti possa darsi qualche spiegazione, senza ricorrere alle correnti indotte; ma pare che da queste eziandio possano ripetersi, e che sia ora conveniente di por mente ancora a queste, da chi si occupa nell' interpretazione di tai fenomeni elettrofisiologici. Così almeno a me sembra.

Ma passiamo a quello tra gli effetti dell'elettricità, ch'è fisiologico doppiamente, voglio dire e nella cagione e nell'effetto, cioè alle commozioni, che per mezzo di un apparato a ciò opportuno danno i pesci detti elettrici. Prima di venire alla cagione, rammentiamo i fenomeni. Ho nominato le commozioni, perocchè questo è il più comune tra gli effetti di questo apparato, il solo noto agli antichi ed al volgo, il solo utile a questi mirabili animali, e quello che ha dato il nome alle torpedini, o come scrisse il Tasso,

" . . . *al picciol pesce, onde sovente*
" *La man del pescatore a fune avvolta*
" *Per secreta virtù stupisce e torpe* (1).

Le commozioni sembrano senza più bastanti a stabilire l'elettricità di detti organi, perciocchè propongansi per mezzo de' corpi deferenti l' elettrico, ma non già per mezzo degl' isolanti, ed è somma l' analogia fra queste scosse e quelle prodotte dalle correnti voltiane. Del resto tutti i fisici sanno che non sono le commozioni il solo fenomeno elettrico che presentano questi pesci.

Parlando solo delle torpedini, che sono fra essi, non già i più valenti, ma i più conosciuti, pescandosi presso le nostre spiagge, si è negata per molto tempo la scintilla elettrica da esse prodotta, o almeno se ne è dubitato. Ora la cosa è fuor di dubbio, e assai sono noti gli esperimenti istituiti lo scorso anno (1836) dal P. Linari e dal Sig. Matteucci (2). Mi sono

---

(1) *Le sette giornate*. Gior. 5.

(2) Indicatore Sanese n.° 50. Complemento o Giorn. Arcadico T. LXX. p. 50. Comptes rendus de l'Acad. des sciences 1836. sem II. p. 46, 430, 584.

recato il dì 8 Giugno del corrente (1837) alla foce del Tevere detta Fiumicino, in compagnia d'alcuni miei confratelli abbastanza esercitati nell'esperienze fisiche, con l'intenzione di tentare queste ed altre sperienze sulle torpedini. Il vento, che si levò contrario ai pescatori, non permise loro di far quasi altra preda che quella di due *occhiatelle*, come essi le chiamano (torpedo narke), non assai vigorose. Non dimeno da una di queste ci riuscì trarre due scintilluzze con metodo al tutto analogo a quello usato dal Linari, cioè introducendo i due fili metallici, che comunicavano colle parti superiore e inferiore del pesce, in una caraffina di mercurio, in modo che un filo pescasse in queste e l'altro fosse vicinissimo alla sua superficie, talchè agitando un poco la caraffina, dovesse alternamente chiudersi ed aprirsi il circuito, come avviene nella macchina magnetelettrica di Pixii.

I prelodati Matteucci e Linari attestano che la corrente della torpedine eccita calore. Poichè siamo in questo particolare aggiungo che punto non mi sorprenderebbe se altri facendo passare le scariche di una vigorosa torpedine per un filo sottilissimo di platino tirato secondo il metodo di Wollaston, riuscisse a renderlo rovente. E in vero la scintilla, che osservava il P. Linari, talvolta *visibile nella chiara luce del giorno e brillantissima*, ma non mai senza l'ajuto del mercurio, non è ella dovuta a particolette o vapori di questo metallo rese candenti dall'elettricità? E perchè questa non potrà del pari arroventare un filo brevissimo di platino d'estrema sottigliezza?

La deviazione dell'ago calamitato è per avventura uno de' fenomeni più facili ad ottenersi da questi animali col mezzo di un buon moltiplicatore. Dopo altri fisici lo hanno osservato i Signori Becquerel e Breschet prendendo, ad evitare gli effetti elettrici di qualche chimica azione, la precauzione di far passare la corrente per l'acqua stillata, per la quale (secondo il Sig. Becquerel) non passano le correnti elettro-

chimiche (1). Noi non prendemmo la precauzione indicata; ma siccome non vedevamo moversi l' ago del moltiplicatore, se non allora che le torpedini davano segno di scaricare, movendo le natatoje pettorali, così non v' era ragione di attribuire il fenomeno ad altro che alla scarica elettrica. È certo ancora per gli esperimenti istituiti a Malta dal Dottor Gio. Davy (2) e per quelli de' due fisici or menzionati, e del P. Linari, che la corrente della torpedine è atta a calamitare l' acciajo. Il primo ha osservato per altro che tal volta una torpedine fa deviare l' ago calamitato, ma non ne magnettizza un altro. Ciò va d' accordo colle mie osservazioni.

I rammentati Gio. Davy, Linari, e Matteucci hanno pure osservato le analisi chimiche prodotte dalla corrente elettrica della torpedine.

Nelle mie circostanze non tentai di ottenere gli effetti chimici, nè le ordinarie o elettrostatiche attrazioni e repulsioni, ma volli tentare le elettrodinamiche. Facendo scorrere la corrente in un apparatino, di cui una parte è mobile ed assai leggiera (quello che ho descritto e figurato nella Memoria sopracitata sull' induzione magnetelettrica) abbiamo osservato nell' atto della scarica del pesce qualche attrazione e repulsione fra la corrente fissa e la mobile; e non dubito d' asserire che chiunque esplorerà una torpedine sufficientemente vigorosa, munito d' un apparatino assai mobile, potrà agevolmente vederlo, allorchè per esso passa la corrente, attratta o respinta da un' alta porzione di essa corrente o, ciò ch' è più facile, dalla calamita. In una parola tutti gli effetti delle altre correnti elettriche si ottengono dall' apparato di cui la Provvidenza ha armato questo debole e nudo abitatore dell' acque.

Può esso far sentire la scossa ancora a chi lo tocca soltanto nella parte superiore, e solo nell' inferiore. Ciò non era

---

(1) Becquerel. De l' elettricité et du magnetisme T. IV. p. 267.
(2) An. account of some experiments . . . . Phil. Trans. P. II. §. 1.

ignoto agli antichi scrittori ed è notissimo a pescatori. Ho veduto che anche l' ago del moltiplicatore devia allorchè amendue i capi del filo metallico toccano la superficie superiore dell' organo elettrico. Secondo le osservazioni del Sig. Colladon, se tocchinsi co' fili del moltiplicatore due punti simmetrici della regione del dorso, l'ago non devia, ma bensì se tocchinsi due punti non simmetrici del dorso ovvero del ventre, che trovansi quasi sempre diversamente elettrici ed uno positivo relativamente all' altro (1). Ma però allora che l' elettrico scorre fra il dorso e il ventre, da quello, ossia dalla parte superiore dell'animale, la corrente si parte all'inferiore, vale a dire la superficie superiore degli organi elettrici fa ufficio di polo positivo e l' inferiore di negativo. Ciò è stato determinato col mezzo del moltiplicatore dal Nobili, secondochè attesta il Sig. Cav. Antinori (2), dal Colladon, dal Matteucci, ed io ho osservato lo stesso. Becquerel è venuto nella stessa sentenza, osservando e il deviare dell' ago del moltiplicatore, e i poli degli aghi calamitati colla corrente della torpedine. Il più volte citato Linari ha trovato lo stesso coll' elettrometro-condensatore e lo ha confermato col moltiplicatore e colle analisi chimiche operate dalle correnti di questo pesce.

Veramente al Sig. Gio. Davy (a cui molte notizie dobbiamo intorno alle torpedini) sembrò poter dedurre il contrario da' fenomeni dell' ago calamitato e dalle analisi. Il Sig. Becquerel pensa che nell' esperienze del Davy dovessero influire le correnti elettrochimiche. Sia, com' esser si voglia di questo sospetto: mi pare, a dir vero, che i fenomeni chimici osservati dal Davy, dove bene si esaminino, anzichè abbatterla, piuttosto confermino la conclusione degli altri fisici. Faceva egli passare la scarica della torpedine per una soluzione di sal marino col mezzo di reofori d' argento: vide

---

(1) Comptes rendus . . . 1836 sem. II. p. 490.

(2) Elogio del C. Pr. L. Nobili letto dal Cav. V. Antinori p. 45.

bollicine di gas, ma solo sul filo comunicante colla superficie inferiore. Sostituì due fili d' oro e comparve il gas sull' uno e sull' altro. Adoperò in vece aghi d' acciajo e allora scorgeva una bella corrente di gas presso alla punta connessa coll' inferior superficie del pesce, e nulla appariva sull'altra. S' io non sono abbagliato, da ciò si deduce che in questi esperimenti, come in quei del Linari l' idrogene andava al reoforo comunicante coll' inferior superficie, come va al reoforo negativo della pila del Volta. Così cimentandosi dal Davy, come dal Linari il nitrato d' argento e dal primo anche il sopracetato di piombo, il metallo o l'ossido metallico, andava al reoforo dell' inferior superficie, come va al negativo della pila.

Trattando della deviazion dell'ago scrive Gio. Davy. " Furono tentati cimenti comparativi sulla deviazione dell'ago " sottoposto all'elettricità del pesce ed a quella d' una picciolissima coppia rame-zinco immersa in un acido debole: " sempre il filo comunicante colla superficie inferiore dell' " animale corrispose ne' suoi effetti al disco di zinco e quello " della superiore al disco di rame. „ È da por mente che in una sola coppia e facendo il filo del moltiplicatore parte dell' elettromotore, l' elettrico va per esso filo dal rame al zinco, ond' è che il filo comunicante coll' inferior superficie del pesce rispondeva negli effetti al disco di zinco appunto perchè riceveva la corrente dal filo superiore, come il zinco la riceveva dal rame pel filo del moltiplicatore, mentre al contrario per mezzo dell' acqua acidula il rame la riceve dal zinco.

Secondo il Sig. Colladon la corrente d' una torpedine, attraversando il corpo d' altra torpedine, non sembra fare in esso impressione alcuna. Il Sig. Becquerel ha scritto esser degno di considerazione che il piccolo spazio collocato fra i due organi elettrici, il quale è fornito di tante glandole e nervi, abbia una debolissima sensibilità elettrica. Anche al più volte rammentato Davy si mostrarono insensibili gli organi elettrici della torpedine e i loro nervi alla corrente d' una

piccola pila e ad altri stimolanti. Siccome mi ricordava che si rileva dal suo racconto, ch' egli faceva, almeno alcune volte, questi tentativi, dopo aver sottratta la pelle, la quale copre l' organo, e che dice espressamente che essa pelle pare molto sensitiva, credetti non inutile qualche nuovo cimento. Aveva meco una pila del Volta. La corrente di questa eccitava qualche contrazione se passava per la base delle pinne, ma non mai l' animale ci dava un minimo contrassegno di molesta sensazione e niuna contrazione appariva, se la corrente voltiana passava per gli organi elettrici, benchè coperti dalla lor pelle. La parte tra i menzionati organi frapposta pareva pure non eccitabile con la nostra pila: ma tolta via almeno in parte quella mucosità, che impiastra la superficie della pelle, ad ogni contatto de' reofori della pila essa parte si contraeva sensibilmente, comechè la torpedine non desse certo segno di sofferirne. Non si creda tuttavia che quella materia mucosa e bagnata d' acqua di mare possa esser isolante: anzi Gio. Davy la giudicò, in seguito d' una sua esperienza, più deferente dell' acqua del mare. Piuttosto può credersi che a motivo della sua molta virtù deferente, conduca gran parte dell' elettrico per la superficie, quasi come farebbe una piastra metallica: ove essa scarseggi e non formi uno strato continuo, la corrente penetra ne' muscoli ed eccita la contrazione, il che non avviene negli organi elettrici, che non sono muscolosi. Osservo quì alla sfuggita che costantemente è coperta di simil materia mucosa la pelle degli altri pesci elettrici abbastanza conosciuti, cioè del ginnoto e del siluro elettrico.

Che la corrente della torpedine possa, come quella dell' elettromotore, eccitare una corrente d' induzione o un' estracorrente atta a scintillare, non è cosa dubbia dopo l' esperienze fatte a Telamone nel marzo dell' anno scorso dal P. Linari e quelle istituite dal sig. Matteucci a Cesenatico.

Ma tempo è oramai di rintracciar la cagione di questi fenomeni. Quanto è agevole conoscere che essi sono dovuti all' elettricità, tanto è malagevole rinvenire la sorgente di

questa e la sua cagione eccitante. Facilmente si riconosce che la torpedine va debitrice di sua virtù a quegli straordinarj organi o corpi falcati, che rendono facile il distinguere questi pesci dalle Razze, colle quali il Linneo le riuniva in un genere, e dagli altri pesci del nostro mare. E se il Redi che primo fra i moderni s'occupò con qualche diligenza nell'anotomia della torpedine, non osò ciò affermare, senza manifestar qualche timore d'essere ingannato, il Lorenzini (1) poco dopo se ne certificò con iterate e più volte iterate esperienze ed al presente da niuno se ne dubita. Ma sapere appuntino qualsia l'uffizio di essi organi, e in qual modo essi l'adempiano, non è sembrata punto facile impresa: e veramente eziandio oggidì, dopo tante accurate e sagaci ricerche, non so se dell'origine prima di questa elettricità e del modo d'operare di tali organi si possa far di meglio che discorrere per congettura.

Si è paragonato l'organo della torpedine ad una gran batteria elettrica caricata a debol grado di tensione. Si è paragonato a un sistema di moltissimi piccoli condensatori. Ma queste ingegnose comparazioni, se ajutavano in qualche modo a concepire i fatti, non potevano darne soddisfacente spiegazione.

Appena il Volta ebbe ritrovato il suo ammirabile elettromotore a colonna, che alcune volte formava di più colonnette comunicanti fra loro, si confidò aver trovato il vero punto di comparazione. Gli risovvenne della descrizione, che dell'organo elettrico della torpedine davano alcuni fisici, appoggiati alle descrizioni di Reaumur (2) e di Hunter (3). Secondo questi i tubetti prismatici assai numerosi, che chiusi da pareti fibrose formano detto organo, sono traversati orizzontalmente da una quantità di lamine aponevrottiche, poste le une sulle altre a piccola distanza, ond'è che il tubetto può considerarsi

---

(1) Osservazioni intorno alle torpedini. Firenze 1678 p. 105.

(2) Mem. de l'Acad. R. des sciences an. 1714. p. 353.

(3) Phil. Trans. an. 1773.

come un sistema di cellette soprapposte. Le cellette sono piene di materia semiliquida mucillaginosa. Basta supporre qualche eterogeneità nella superficie superiore e inferiore d'esse lamine, e già abbiamo delle pilette composte da tre conduttori di seconda classe. L' inventor della pila considerò tal organo come un sistema di simili piccole pile, che insieme comunicando ne formino una sola, almeno allorchè l'animale per mezzo d' un movimento spontaneo si scarica e dà ad altri la scossa. Questa spiegazione assai ingegnosa e sola verisimile fra quelle ch' erano state fino a quel tempo proposte, fu assai seguita ed applaudita. Ma è trista cosa discorrere e fondar sistemi su fatti, che non si sono potuti certificare co' proprj sensi. La struttura de' tubetti componenti l'organo elettrico, qual' è stata descritta da Reaumur, da Hunter, e dal sig. Geoffroy Saint Hilaire, dicesi essere stata osservata negli organi d' alcune grosse torpedini conservate nell'alcool. Qualche cosa di simile, ma in una particolar circostanza, sembrò di vedere al più volte ricordato Gio. Davy, allorchè occupavasi nell'anotomia delle torpedini quì in Roma, ove s'era recato ad assistere il celebre suo fratello Onofrio caduto infermo. Vide che detti tubi, rimanendo alcuni minuti nell'acqua bollente, acquistarono una struttura lamellare che richiamava alla memoria la pila del Prof. Zamboni. Restituitosi alla sua residenza di Malta, non potè più osservare questo fenomeno: i tubetti nell' acqua bollente in pochi minuti disfacevansi e prendevano aspetto e consistenza d'una mucillagine mollissima. Qualunque si fosse la cagione di tal differenza, egli osservando a Malta con lente acutissima un tubo degli organi della torpedine fresco e non alterato dall' acqua bollente, non potè vedere se non una massa omogenea con poche fibre, probabilmente nervose, in direzioni irregolari.

Il Sig. Breschet ha pure studiato l' anatomia della torpedine. Secondo lui, se denudisi una faccia d' un tubo prismatico, togliendo la parte che lo separa dal vicino, vedonsi su quella faccia assai filetti, o, come dicono, strie trasversali

congiunte per mezzo d' un tessuto cellulare tenuissimo e trasparente. Questi filetti non indicano delle laminette isolate, e le une sovrapposte alle altre come gli elementi della pila, ma tutto è insieme congiunto, tutto forma una massa quasi omogenea ed amorfa, nella quale non distinguonsi che de' filetti un poco più opachi del rimanente, i quali suppongonsi nervosi, attesochè i punti da cui partono corrispondono agli angoli di riunione delle pareti, ove veggonsi penetrare i filamenti nervei (1). Que' filetti trasversali possono aver generata o fomentata l' idea delle lamine orizzontali. In vero aprendo o premendo que' tubetti non appare che una materia omogenea senza alcuna lamina.

Gli organi di altri due pesci elettrici, il ginnoto (*gymnotes electricus*) ed il siluro (*silurus electricus*) esaminati da Hunter e dal sig. Geoffroy S.t Hilaire, sono ancor essi composti di cellette a pareti fibrose, con entro una sostanza gelatinosa o mucosa (2). Ma la loro struttura è alquanto diversa e non presentano, come la torpedine, l'apparenza di un sistema di piccole pile.

---

(1) Presso Becquerel l. c. p. 271.

(2) Si citano due altri pesci elettrici, il *tetrodon elettricus e il trichiurus indicus;* ma gli organi elettrici di questi, ch' io sappia, non sono stati ancora esaminati e descritti. Quelle specie di lamprede elettriche del fiume delle Amazzoni, di cui parla Condamine (Relat. abregè d' un voyage pag. 157) sono senza fallo i ginnoti. Talora si son chiamati *torpedini* i pesci elettrici di genere diverso. Così la torpedine, di cui parla il Godigno, vivente ne' laghi e ne' fiumi dell'Abissinia e copiosa nel Nilo, debb' essere il siluro, che si trova appunto nel Nilo e in altre acque dolci dell'Africa (De Abissinorum rebus.... P. Nic. Godigno S. J. auct. 1615 p. 67.) Dice questi, o più veramente il suo confratello A. Fernandez, da cui protesta il Godigno d' aver tradotto queste notizie. « Ferunt exploratum (rem ego per me non sum ex« pertus), si inter mortuos pisces vivens torpedo ponatur et inibi se moveat, eos, « quos tetigerit, interno quodam et arcano motu ita cieri, ut vivere videantur. »

Questo racconto nulla presenta d' inverisimile dopo le sperienze del Galvani, nè istruiti delle cognizioni moderne, avrebbero al presente il Lorenzini e Reaumur motivo di sospettarlo favoloso.

Non troviamo dunque nei nostri strumenti eccitatori dell' elettricità una fedele rappresentazione dell' organo di cui trattiamo. E in vero non deve punto sorprendere se l'opera dell' arte umana non si possa adeguare all'opere della natura ossia dell' arte divina, e se il magisterio di questa è assai più difficile a comprendersi.

Il ch. Gio. Davy, dopo molte indagini fisiche ed anatomiche, conclude. " La produzione dell' elettricità nella tor-
" pedine è tuttavia avvolta in un gran mistero. Non pare
" avervi punto che fare alcuno degli ordinarj modi d'eccita-
" mento, non istropicciamento, non azion chimica, non can-
" giamento di temperatura o di forma. ,,

Sarei soprammodo prosuntuoso se pretendessi di potere sciogliere questo enigma e stracciare il velo che involge questo mistero. Ma però sarà, io credo, permesso il tentare di sollevarne un cantuccio, ossia di congetturare alcuna cosa intorno a taluno de' problemi che dovrebbono sciogliersi da chi volesse svelar pienamente questo arcano. Imperocchè, secondo ch' io penso, varj sono i quesiti a' quali si brama risposta.

Per proceder con ordine, cominciamo dal ricercare se nell' organo elettrico di questi animali si desti primamente l' elettricità , come nella pila del Volta: dacchè può ancora pensarsi che o sia soltanto in esso condotta , come ne' conduttori della macchina elettrica, nella boccia di Leida e nel condensatore; ovvero sia soltanto indotta , come in un conduttore elettrizzato per influenza dal primo conduttor della macchina, o come in un lungo filo metallico che rapidamente s' avvicina ad una calamita o ad altro filo conduttore della corrente voltiana, o da essi si allontana; o veramente sia e condotta e indotta, come sembra essere in un lungo filo avvolto in elica e racchiudente un pezzo di ferro dolce, che serve a chiudere il circolo d' un elettromotore semplice, e all' aprirsi d' esso circuito scintilla e dà la scossa.

Nulla si scorge negli organi elettrici, che li dimostri attivi, anzi chè passivi, nulla che indichi potersi in essi destare

quella elettricità che per mezzo di essi scorre ne' corpi esterni. Non sono muscolari nè atti a contrarsi. In essi vediamo, dice Gio. Davy, " nervi di strana grossezza ramificati fra colonne " apparentemente insensibili, piene d' un fluido, conduttore " non buono; muscoli circondanti le colonne ed atti a com- " primerle; un sistema di glandole mucose e di condotti an- " nessi proprio a servire di comunicazione fra i due organi " e i loro lati opposti. „ Aggiunge lo stesso, che questi organi mal provveduti di sangue, sembrano avere pochissima attività vitale ordinaria ed essere passivi piuttostochè attivi. Trovò che hanno piccolissimo peso specifico in paragone delle parti muscolari, e perdono in peso, diseccandosi più d' ogni altra parte del corpo da lui osservata: in una torpedine portata in Roma gli organi elettrici pesavano grani 302; diseccati grani 22. Gli parvero contenere 92, 72 centesimi di acqua (1). Che v' ha qui di opportuno a destare una forte corrente elettrica?

Debbo ora rammentare alcune sperienze, le quali non ho pure pensato a ripetere; poichè come non ho ad esse (conviene che il confessi) alcuna attitudine, così ho per le medesime invincibile repugnanza.

Il Galvani avendo troncato ogni comunicazione fra la testa ed una parte del corpo d'una torpedine contenente uno degli organi elettrici, osservò che da questa parte del corpo o da quest'organo, non poteva aversi la scossa, ma bensì dall' altra.

Osservò pure che, tolto alla torpedine il cuore, gli organi davano ancora la scossa, ma non più se toglievasi ad essa il cervello. Togliendo questo colle maggiori cautele, onde la

---

(1) Secondo le recenti sperienze del sig. Matteucci 90, 34. Dunque il Lorenzini che dichiarò quelle colonne o tubetti *vesciche piene d'acqua,* le definì più giusto di que' moderni anatomici che trassero in errore il Volta ed altri fisici e ultimamente la signora Somerville.

(*On the connexion of the phys. sciences* 1836 *p.* 314.)

circolazione del sangue non venisse sconcertata, gli fu impossibile ottenere commozione, comechè i movimenti muscolari si eseguissero tutt' ora assai bene. Vide eziandio che la torpedine perdeva il potere di scuotere, allorchè era leso gravemente il cervello.

Lo Spallanzani e il citato Galvani sperimentarono ancora, che togliendo i nervi, che penetrano nell' organo elettrico, e si spandono ne' suoi tubetti, il pesce seguita a vivere, ma resta privo della virtù elettrica.

Somiglianti esperienze essendo state tentate da altri, e in particolare recentemente dal ch. Linari, analoghi sono stati i risultamenti. Queste prove dimostrano la grande influenza del cervello e de' fascetti nervei ne' fenomeni elettrici delle torpedini.

Nè meno concludenti sembrano i cimenti del Sig. Matteucci. Egli ci narra di avere non solo osservato che si ha la scarica dalla torpedine, anche tolta la pelle dell'organo e qualche fetta di esso organo (ma in questo caso i segni del moltiplicatore sono minori di allora che il pesce è intatto); che la forza della scarica diminuisce, diminuendosi il numero de' filetti nervei che vanno all' organo; e che, se la torpedine ha cessato di dare, benchè irritata, la scossa, ove denudisi il suo cervello e leggermente tocchisi là onde partono i nervi che vanno all' organo, si hanno alcune scariche più forti dell' ordinarie; ma assicura eziandio che mentre si ferisce il cervello, si hanno tal volta delle scariche fortissime, *senza determinata direzione;* da che dice d' averne osservate tre di seguito andanti *dal ventre al dorso*, al contrario della legge stabilita di sopra, della quale egli attesta essersi certificato, esplorando 35 torpedini con un moltiplicatore, i cui capi terminavano in aghi di platino. Da tali anomalie conclude, che l' elettricità non è prodotta dagli organi, ma riceve la direzione dal cervello, e negli organi elettrici è condensata, come nella boccia di Leida. Non è punto improbabile che l' elettricità sia destata dal cervello o almeno in generale dal sistema

nerveo, la cui parte principale è il cervello, e le cui altre parti, acciocchè sieno attive, conviene che comunichino col cervello. Da questo l' elettrico può passare agevolmente ai nervi, poichè in questi, sotto lo stesso nevrilema è la sostanza medesima che costituisce la materia cerebrale. Da ciò consegue, non essere verisimile che il cervello induca senza più l' elettricità negli organi o per induzione elettro-statica, come il conduttore della macchina in altro conduttore da lui diviso, o per induzione elettrodinamica, come la calamita in un filo metallico.

Gio. Davy osservò che i nervi elettrici della torpedine sono alla loro origine involti in una vagina fibrosa, e mano a mano che suddividonsi nell' organo il nevrilema si assottiglia e diviene semitrasparente. Esaminato un ramo sottile con lente acutissima, la sostanza interna midollare non se gli mostrò continua, ma interrotta e quasi punteggiata, come la vagina contenesse tante porzioncelle con piccolo spazio tra esse frapposto. Non so se questa apparenza sia una singolarità de' nervi che servono all'organo delle torpedini, e forse degli altri pesci elettrici. Ove ciò fosse, non potrebbe tal disposizione essere destinata a qualche util fine? Ma a quale? Forse a ciò, che l' elettrico scorrente pe' nervi acquisti in grazia di que' piccoli interrompimenti maggiore intensione?

Ma come può nel cervello, o in esso unito al rimanente del sistema nerveo, eccitarsi l' elettricità? Come allorchè le aggrada, la manda la torpedine all' organo e quindi a' corpi esterni? Che i pesci elettrici a lor piacere si servano dell' arma lor misteriosa (appunto come gli altri animali, solo allorchè ad essi aggrada, fanno uso delle proprie armi meglio conosciute), e che non sempre si scarichino ogni qual volta altri il vorrebbe, è un fatto noto a chiunque gli ha esaminati. Forse non si arriverà mai a sapere come questi animali possano a libito o destare l' elettricità, o aumentarla considerabilmente, onde sia abile a scuotere, ovvero (se ciò più piaccia) darle una nuova e certa direzione. Ma, dopo i fatti espo-

sti, anche più arduo a spiegare ciò sarebbe, qualora si volesse nell' organo elettrico non già condotta, ma primamente ed unicamente destata l' elettricità.

È indubitato che la volontà produce de' movimenti nel corpo e che gli animali muovono a piacere questi o quei muscoli col mezzo de' nervi comunicanti col cervello. Com' esser ciò possa, chi ha così ordinato, ei lo sa. Per noi non è, io credo, in tutta la creazione cosa più misteriosa della scambievole azione fra il principio immateriale e la materia. Ma le contrazioni muscolari prodotte dalla volontà anche meno s'intendono, se, escludendo l' elettrico, si fa operare la volontà unicamente sul sistema nerveo, o se all' elettrico così conosciuto ne' suoi effetti sostituiscasi un altro principio al tutto ipotetico. L' integrità de' nervi e la lor comunicazione col cervello è condizione necessaria, non meno che a' movimenti volontarj, alle funzioni digestive e alle varie secrezioni. Sembra perciò che dal cervello per mezzo de' nervi qualcosa discenda ad irrigare i varj organi animali: ma questa qual cosa che altro può credersi ragionevolmente, se non si crede probabile con parecchi moderni scienziati, che l' elettrico e non altro sia il così detto sugo o fluido nerveo (1), o ciò di che molti hanno a lungo parlato sotto il nome di spiriti animali. E quì parmi conveniente osservare che questa opinione la quale già piacque al Newton, non avea per avventura fino a' dì nostri da citare in sua difesa cosa di fatto. Ora chi vuol difenderla, può prendere per base il fatto delle torpedini. Il cervello, può dire, di questi animali, e com' è da credere, degli altri pesci elettrici, fa scorrere l'elettrico pe' loro nervi: ma il cervello di questi pesci non differisce essenzialmente o notabilmente da quello degli altri pesci; nè il cervello degli animali di questa classe da quello degli animali di classe diversa: non è dunque ragione di credere che anche il cervello degli altri animali non faccia anch' esso scorrer pe' nervi

(1) *Quel sugo che trapela e scorre per tutti i nervi e sugo nerveo si chiama.* Redi.

l' elettricità, comunque poi questa venga eccitata: poichè qui non si tratta di generare o di elaborare l' elettrico, ma soltanto di destarlo o di rompere il suo equilibrio, come si fa tutto giorno in tanti modi nelle nostre sperienze. E qui ben mi cade in acconcio il ricordare, come Gio. Davy ha osservato, che nelle torpedini i nervi gastrici prendono origine *da nervi elettrici;* e vedendo che nelle torpedini conservate e spesso eccitate, come pareva sospendersi o diminuire la secrezione della materia mucosa, così sospendevasi la digestione, pensò che allorquando l' elettricità non serve a difesa dell'animale, possa servire a promoverne la digestione. Il prof. Linari cita a proposito di questa opinione altra sua simile osservazione, cioè che, dopo essersi fatti pel corso di due giorni degli esperimenti sopra alcune torpedini, ed essendo poi morte ed aperte, si trovava nel loro stomaco scarseggiante il sugo gastrico, e de' pesci ingojati appena cambiati dallo stato lor naturale, il che per altro non osservavasi nelle più vigorose.

Il punto che resta a discutere, è per avventura il più importante pel Fisico che si occupa in queste indagini e tutto proprio di esso, cioè qual sia l' ufficio dell' organo elettrico di questi pesci. Che tale ufficio sia il suscitare l' elettricità al modo della pila del Volta o della macchina elettrica, dopo le cose esposte non può ragionevolmente sostenersi.

Ma sarà egli più ragionevole compararlo senza più a un ordinario conduttore? " Noi pensiamo, dice il sig. Becquerel, " che l' elettricità venga trasportata dal cervello nell' organo " principale, ove serve a caricare le piccole pile, la cui costi- " tuzione, che ci è sconosciuta, punto non somiglia quella " degli apparati voltiani; perocchè gli effetti della torpedine " sono analoghi a que' che risultano dal contatto d'una parte " del corpo con un conduttore fortemente elettrizzato, atteso- " chè basta toccar solo una delle superficie dell'organo elet- " trico per ricevere la commozione: non così avverrebbe se " le piccole pile che compongono l' organo elettrico fossero " simili alla pila voltiana: in questo caso saria d' uopo toccar

" le due superficie per provare la scossa. ,, Ma un conduttore di seconda classe e così piccolo, sia quanto si vuole elettrizzato, non produrrà giammai la scossa e gli altri effetti che produce l'organo di questi pesci. E a qual pro un tale organo? Non conducono l'elettrico assai bene la pelle spalmata di muco e bagnata d'acqua marina, i nervi, i muscoli, il sangue? Certo che sì. In prova di ciò si rammenti come, perchè l'organo si scarichi, si ha e la commozione e gli altri effetti, anche toccando un'altra parte del corpo della torpedine, finchè questa è abbastanza vigorosa, eccettuata, dicono alcuni, la coda, per la quale soglion prenderla i pescatori. E pure è certo che quell'organo, come a niun'altro oggetto sembra utile, così è necessario esso e la sua comunicazione col cervello, alle scosse e agli altri fenomeni elettrici. Ma è vano spendere assai parole a provare che l'organo elettrico è qualcosa più che un ordinario conduttore. Difatto il fisico testè citato aggiunge. " La differenza, che, secondo noi esiste
" fra i pesci elettrici e gli altri animali, è che ne' primi la
" natura ha posto degli organi proprj a condensare l'elettri-
" cità, che emana dal cervello, per aumentare la sua tensione
" a segno di farne un arma offensiva, mentre negli altri l'elet-
" tricità ha solo la tensione atta alle contrazioni naturali e
" alle altre funzioni affidatele. ,,

E veramente, se è troppo far di tali organi de' veri produttori di elettricità, se è poco farne senza più de' conduttori ordinarj, pare che altro non resti che giudicarli abili a condensare o forse ad aumentare l'elettricità ricevuta. A niuno, io penso, cadrà in mente di compararli ad un sistema di piccole pile secondarie o Ritteriane, caricate dal cervello, come le pile di Ritter si caricano con le pile voltiane. La struttura d'essi organi ora ben conosciuta, esclude del pari l'analogia colle pile primarie e colle secondarie.

Ma diremo ch'essi organi condensino l'elettrico alla maniera della boccia di Leida o del condensatore del Volta? La teorica di questi strumenti, e di ogni altro fondato sugli stessi

principj, si riduce alla dottrina dell' elettricità latente o dissimulata per la prossimità dell'opposta elettricità: dacchè una elettricità diminuisce la tensione ed aumenta la capacità di quella di nome contrario. Affinchè ciò possa accadere fra corpi conduttori, soli atti a dar commozioni e simili effetti, conviene, se essi corpi si toccano, e molto più se non fanno insieme che un sol corpo, conviene, dico, che il corpo intermedio, o la parte intermedia sia coibente, o almeno che delle due parti destinate ad opposta carica, una assai bene conduca e l' altra assai imperfettamente. Ora la parte superiore, l'intermedia e l' inferiore dell' organo della torpedine sono al tutto simili ed omogenee, nè è possibile indicare il termine ove l' elettricità condotta debba arrestarsi e indurre per influenza nella parte vicina l' elettricità contraria. Dunque è impossibile spiegare col mezzo della condensazione indicata i fenomeni di questi pesci, e. g. le commozioni che si provano toccando la torpedine sopra e sotto, e anche soltanto una delle superficie degli organi. Il Volta nella sua prima memoria sulla pila (1) avea già validamente confutato tali spiegazioni, ed anche più validamente l' avrebbe fatto, se avesse saputo che non v' è alcun diaframma solido ne' tubetti, che compongono l' organo elettrico.

Aggiungo che, se l' elettrico trasmesso all' organo ivi s' accumulasse e si condensasse, immediatamente prima della scarica dovrebbe potersi aver qualche segno all'elettrometro, almeno coll' ajuto del condensatore. Ora niun' ombra di segni elettrometrici hanno potuto ottenere dalla torpedine nè Walsch nè De Humboldt e Gay-Lussac, nè Onofrio Davy, nè più recentemente o Giovanni suo fratello o il Sig. Colladon. Così niuno ne ottenne De Humboldt dal ginnoto. È vero che il ch. Prof. Linari afferma di aver avuto più di 40 volte i segni d' elettrica tensione, facendo uso di torpedini sane e di sufficiente grandezza, e d' un ottimo conduttore: era positiva,

(1) Opere T. II. P. II. p. 129.

se questo comunicava col dorso dell' animale, negativa, se col ventre. Ma questi non erano segni elettrostatici dell' organo del pesce, come que' che si hanno dalla boccia di Leida, prima che si scarichi; ma era l' elettricità già scaricata da quello e trattenuta dallo strumento; il che otteneva, secondo ch' ei dice, *troncando all' istante della scossa la comunicazione che il condensatore elettroscopio avea e con la terra e con una delle superficie del pesce* (1). Così non si hanno sicuramente segni di tensione elettrica dalla calamita: ma non è impossibile ottenerli, intercettando con qualche artificio la corrente elettrica da quella indotta. Di fatto ne dicono gli illustri fisici Hachette ed Ampere, che Ippolito Pixii ottenne *un grande allontanamento delle fogliette d' oro adattate al condensatore del Volta,* coll' elettricità destata in un filo metallico di 1000 metri da una calamita che reggeva più di 100 chilogrammi (2).

Poichè l' organo della torpedine non può dirsi un condensatore elettrostatico, potrà almeno dirsi un condensatore elettrodinamico? Il Nobili diè questo nome al lungo filo metallico avvolto a spirale che congiunge le piastre metalliche d' un elettromotore semplice, in virtù del qual lungo filo si ha sempre la scintilla all'apparir del circuito, la quale manca se il filo è corto (3). Egli opinava che all' aprirsi del circuito, l' elettrico ch' era in giro (più copioso nel filo più lungo) si condensasse al luogo dell' interruzzione e sboccasse fuori scintillando; nè della forma spirale dà altra ragione che il maggior commodo. Faraday ha poi dimostrato nella memoria citata al principio di questo scritto, che quì è l' effetto d' una cor-

---

(1) Toccavano e premevano le due superficie della torpedine due lamine di platino comunicanti per due fili metallici, uno colla terra, l' altro col piatto inferiore del condensatore. Il pesce era collocato sopra una tavola isolata. Questi particolari sono estratti da uno schiarimento inviato dal P. Linari al Sig. Prof. Barlocci e da questo gentilmente comunicatomi.

(2) Ann. de Chim. et de Phys. T. LI. p. 77.

(3) Nobili Mem. ed Osservaz. T. I. p. 232, 233.

rente indotta o *estracorrente*, e che influisce non meno della lunghezza la forma di elica. Ciò per altro non esclude al tutto la spiegazione del Nobili, e può ben credersi, che nell'effetto abbia parte la corrente induttrice e la sua condensazione (1). Ma torniamo al nostro proposito.

Che verisilmente qual cosa di analogo accada nell'organo de' pesci elettrici, mi muove a crederlo l'argomento d'esclusione, il quale, comechè indiretto, è pure utile e spesso conduce in fisica a conseguenze probabili e talvolta certe. L'organo elettrico non è motore, nè semplicemente un ordinario conduttore dell'elettricità, nè così è separato dal cervello e dal rimanente del sistema nerveo, che possa patirne l'influenza elettrica senza punto riceverne: lo abbiamo testè veduto. Dunque, se non può, il che pure sembra assai dimostrato, considerarsi come un condensatore statico operante secondo le leggi dell'induzione elettrostatica, converrà considerarlo come una specie di condensatore elettrodinamico operante secondo le leggi dell'induzione elettrodinamica. Può imaginarsi l'elettrico condotto da' fascetti nervei, dividersi pe' filetti nervei in ciascun tubo o celletta dell'organo. Per mezzo de' filetti trasversali osservati dal Sig. Breschet, probabilissimamente nervei, può esso elettrico circolare e avvolgersi in elica in ciaschedun tubetto; e ciò avverrà più facilmente, se è vero che poco sia deferente il fluido de' tubetti, (come udivamo pocanzi dal Davy) perchè in tal caso non si disperderà per esso. Se mentre il pesce fa la sua scarica, l'elettrico incominci a circolare nella parte inferiore de' tubi e termini nella superiore e sbocchi da questa, la parte superiore dell'organo sarà quella che dà l'elettricità positiva, come il polo positivo della pila del Volta. Possiamo pure supporre che, al terminare

(1) Sul merito che hanno avuto in questa scoperta il Nobili, il Dott. Magrini e il Prof. Dal Negro, può vedersi una giudiziosa *Nota* nel Bullettino delle Scienze Mediche Chir. di Bologna (Maggio e Giugno 1837) segnata S. G. (cioè, non ne dubito, Silvestro Gherardini).

della scarica ossia al cessare della corrente primitiva, si ecciti ne' tubi medesimi una corrente d'induzione analoga alla prima e similmente diretta. Dalla prima corrente, a meno che non trovi un conduttore metallico ampio e breve, sembra che debba disperdersi la più gran parte per la pelle umida e spalmata di mucosità assai deferente, e quindi perdersi nell' acqua del mare o in altri corpi circostanti, ovvero rientrare in corpo al pesce. Ma l'estracorrente o corrente indotta, senza la quale sarebbe difficile a intendersi la scossa che si ha toccando soltanto il ventre del pesce, e l'elettricità negativa dalla stessa parte del condensatore del Linari, l'estracorrente, dico, pare che debba ritornare all' inferior superficie dell' organo per la via della pelle, ove altra abbastanza buona non ne trovi; ma se ne trovi un' altra assai deferente e non eccessivamente lunga, non è possibile che la maggior parte di essa torni per questa là ove tende, perocchè sappiamo che la corrente indotta volentieri si allontana dalla corrente inducente, a costo ancora di seguire strada più lunga. Pare che da noi si supponga che i nervi conducano l' elettrico meglio delle altre sostanze animali, ciò che non è assai provato, anzi da taluno si nega. Ma noi parliamo di nervi in istato di vita, non offesi, e le cui parti comunichino fra di loro con piena libertà. Ora questi possiedono forse, come dice ancora il Sig. Bequerel, un poter conduttore proprio, dipendente dalla lor particolare organizzazione. Può essere ancora che in essi, assai meglio che in altre sostanze animali, si stabiliscano le correnti d'induzione. Assai facilmente s' intende poi, come la corrente elettrica penetrata ch' è nel nervo più agevolmente scorra per esso, che non passi da esso ad altra sostanza.

La corrente d' induzione si desta al cessare della corrente induttrice: ma destasi pure ove quella soffra considerabile affievolimento. Perciò è indifferente nell' esposta spiegazione, il supporre che la torpedine mandi solo l'elettricità al suo organo, allorchè è per fare una scarica, ovvero che sempre l' organo riceva ed emetta elettricità, ma assai scarsa e non

indicata da' nostri istrumenti. Il Volta non era lontano da questa seconda opinione, a motivo delle belle sperienze del Galvani, il quale ponendo delle rane preparate alla sua maniera sulla schiena ed anche a' fianchi della torpedine posta sopra un panno bagnato, la vedeva dibattersi tratto tratto e talora quasi di continuo, senza che il pesce fosse irritato, o desse segno di dare la scarica.

Comunque siasi, passiamo a vedere come in tal supposizione spieghinsi i fenomeni della torpedine. Debbo qui ricordare che la corrente d' induzione si divide spesso in più rivi, senza perciò punto indebolirsi, come si vede nelle macchine magnetelettriche. Così fa appunto la corrente momentanea della torpedine, che passa ad un tempo per la via più breve della pelle dell' animale e per uno o più sentieri più lunghi. Quel deviarsi senza diminuirsi della corrente indotta, ho cercato di spiegarlo col mezzo di estracorrenti o, come le ho chiamate di correnti *di seconda induzione*, cioè indotte dalla prima corrente d'induzione. Non è per avventura bisogno di ricorrere a queste per ispiegar le correnti che passano per un conduttore ottimo, cioè tutto metallico, non sottilissimo, non molto lungo o continuo, o interrotto soltanto per minimo spazio. Ma allora che scorre per sottili fili assai lunghi, quali sono quei de' moltiplicatori del Nobili e del Colladon, e molto più se tai fili sieno interrotti da un conduttore di seconda classe, di cui vogliasi osservar l'analisi, o dall' acqua stillata, non so quanto sia probabile che l'elettrico preferisca una siffatta via a quella della pelle dell'animale, e verisimile ne sembra che la corrente andante per sì lunga strada non sia unicamente quella che circolava nell' organo della torpedine, o porzione di quella, ma bensì un' estracorrente da quella prodotta, com' è prodotta da un elettromotore semplice l' estracorrente, che scuote l' uomo e vivamente scintilla.

Ciò, se punto veggo, non dee sembrare strano, dopochè il Prof. Linari e il Sig. Matteucci hanno riconosciuto l'effetto della corrente indotta da quella della torpedine nelle scintille,

che l' uno e l' altro ottennero col mezzo di fili metallici assai lunghi e avvolgenti de' cilindri di ferro dolce, e che mancavano, se, il resto essendo eguale, sostituivasi un breve filo. Se la mia opinione si trovasse giusta, potrebbe dirsi che queste scintille erano dovute ad una corrente *di seconda induzione*.

Vengo alle scosse. Queste non sogliono aversi dalle macchine magnetelettriche, se la corrente d' induzione passi solo per l' uomo. Ma però si hanno assai agevolmente e non piccole, se essa corrente, oltre quella del corpo umano, trovi aperta altra via migliore ed assai breve; e non mancano, nè sono minori, qualora trovi aperta una terza strada, qual' è quella del moltiplicatore. Mancano per altro se la corrente all' uscire del filo metallico, ove s' è destata, trovi solo una via, la quale poi si divida in due, una delle quali sia assai più breve e buona dell' altra ch' è il corpo umano. Tutto ciò ho estesamente esposto nella memoria addietro citata. Così accade nelle torpedini, senonchè è impossibile far sì che la loro corrente passi solo per l' uomo. La scarica che esce dalla parte superiore de' loro organi trova nella superficie della pelle un cammino assai buono e breve per arrivare alla parte inferiore; e pure si ha la commozione della corrente che passa per la strada tanto più lunga ed imperfetta ch' è il corpo umano. Nè manca la scossa, nè mi è sembrata minore, aprendo alla corrente un terzo sentiero, cioè il moltiplicatore del Nobili. Si ha del pari, come ho sperimentato, se la parte superiore e inferiore dell' organo comunichino fra di loro per mezzo d' un ottimo, breve e capace conduttore, cioè d' una piastra d' ottone curvata in arco e bastantemente ampia, e si ha tanto se tocchinsi le due superficie dell' organo ov' è la piastra, quanto se tocchinsi quelle dell' altro organo, benchè da questo ancora pare che l'elettrico dovrebbe andare, piuttosto che all' uomo, al metallo per mezzo della pelle, breve e buon conduttore; e altronde le osservazioni anatomiche del Sig. Breschet ne insegnano che nella parte anteriore i due organi si

congiungono per mezzo d' un tessuto intermedio composto di cellette sempre più piccole con entro una materia al tutto simile a quella de' tubi. Ma però se due piastre metalliche applichinsi alle due superficie dell' organo, addotte queste a mutuo contatto, le dita sovrapposte ad esse piastre non provano alcuna commozione; benchè il pesce si scarichi. Come le correnti secondarie prodotte nelle macchine magnetelettriche sembrano di seconda induzione, cioè indotte da quella ch' è destata dalla calamita, così correnti di seconda induzione inclinerei a riputar quelle che provansi da chi tocca la torpedine.

Mi credo in debito di soddisfare ad una opposizione, la quale, com' è caduta in mente a me, così lo può facilmente ad ogn' altro. Nelle macchine magnetelettriche, acciocchè la corrente, che abbiamo chiamato di seconda induzione, sia atta a scuotere le mani e le braccia, fa d' uopo che il circuito della prima corrente si apra scintillando. Si può primieramente rispondere che nelle macchine nelle quali ciò si è osservato, destasi poco copioso l' elettrico, e però, affinchè produca coll' estracorrente validi effetti fisiologici, è duopo che acquisti per l' interruzione quella tensione, che lo fa scintillare. Per opposito ne' pesci elettrici, come nella pila del Volta, è copiosa l' elettricità, per quel che ne dicono gli effetti, benchè la corrente non sia assai intensa.

Aggiungo che nella macchina elettromagnetica di cui ho fatto uso (e lo stesso deve avvenir nelle altre) mancavano le scintille; primo, se giravasi il manubrio troppo lentamente; secondo, se la corrente, che avrebbe dovuto scintillare, passava per un filo metallico troppo lungo e sottile; terzo, allorquando essa era costretta a scorrere per un conduttore di seconda classe (in questi tre casi era troppo indebolita); quarto, allorchè la corrente affatto continua non potea scintillare, uscendo l' elettrico dal mercurio o in esso entrando, non per una punta o raggio, che staccandosi dal mercurio è occasion delle scintille, ma per una rotella piena, onde la

comunicazione mai non era interrotta: in quest'ultimo caso può dirsi nè pure interrotta la corrente (poichè sempre i fili si allontanano dalla calamita o ad essa avvicinansi) ma solo un poco or aumentata, or diminuita ed ora rovesciata: ed è probabile che in queste sperienze, come in altre analoghe di Masson che addietro abbiamo accennate, qualche piccola, ma non del tutto minima intermittenza sia necessaria agli effetti fisiologici. Ora nel caso della torpedine, se la sua scarica sia troppo debole, mancano pure le scosse alle mani, quantunque possa aversi qualche sensazione all'estremità delle dita che la toccano, o almeno si scuota una rana preparata. Se le sue scariche potessero esser continue, è da credere, in seguito delle sperienze testè rammentate, che l'effetto diminuirebbe, o anche cesserebbe; ma tali mai non sono, e non fa poco una torpedine, secondo gli esperimenti di Colladon, se dà tre scariche in un secondo, o se continuando a scaricare per mezzo minuto primo, dà in tal tempo 24 scosse, ovvero 50 in un minuto, come ha osservato Walsch.

Finalmente non dee credersi che la macchina magnetelettrica nieghi affatto gli effetti fisiologici, allora che non veggonsi le scintille. In tal caso o passi la corrente primaria pel filo assai lungo e sottile del moltiplicatore, o la rotella indicata rende impossibile l'aprirsi del circuito ed ogni benchè minima scintillazione, provansi delle scossette alla lingua, oltre alle sensazioni di sapore e di luce; e nel caso della rotella, benchè sia necessariamente sospeso lo scintillare della corrente primaria, può scintillare anche nell'acqua la corrente più lunga o secondaria. Dunque una macchina analoga, ma assai più forte, ossia eccitante più copiosa elettricità, avrebbe ancora, senza scintille, cagionato le scosse alle mani e alle braccia. Osservo una notabile analogia fra la torpedine e la macchina magnetelettrica armata di rotella invece di punte. Nè quella nè questa può scintillare immediatamente, ossia in virtù della corrente primaria o più breve: il circuito tutto chiuso nol consente: ma l'una e l'altra possono dare

scintille, coll' ajuto del mercurio, in un secondo conduttore più lungo.

Cade quì in acconcio osservare che nella nostra spiegazione la corrente secondaria della torpedine, se così piaccia chiamarla, ossia quella che scorrendo pel corpo dell' uomo o d' altro animale lo scuote, è più forte e può credersi più copiosa di quella che va perduta sulla pelle dell' animale, come nella macchina magnetelettrica la corrente secondaria è più forte della primaria e più atta a scuotere. Per contrario nella spiegazione del Volta la scarica si farebbe appunto per la pelle, e quello che provasi da chi la tocca, non saria che un urto laterale. Credo che gli altri fisici non abbiano pensato diversamente. Uno degli ultimi, il sig. Becquerel, così scrive: " Questo effetto è dunque il risultamento d' un " urto laterale, analogo a quello che s' ottiene nell' esperienze " segnate. Se una boccia di Leide caricata pongasi sur un " panno bagnato e si scarichi in modo ch' esso faccia parte " del circuito, delle rane preparate poste su d' esso annun- " ziano colle loro contrazioni che la corrente s'è distesa per " tutto il panno. Dopo ciò diremo che la quantità d' elettri- " cità, che sfugge alla scarica principale, non è che una debol " porzione di quella che circola nell' organo della torpedi- " ne (1). „ Confesso che trovo strano, che l' elettricità utile all' animale non sia che piccola parte di quella ch' esso mette in moto e caccia fuori; e più mi va a sangue una spiegazione che non fa la natura così poco economa. Mentre tutto ne invita ad ammirare e benedire la Provvidenza, che ha armato sì portentosamente questi animali, vorremo dire colla nota espressione di Plinio, non esser facile a definire, se natura sia stata ad essi *parens melior an tristior noverca?* E così sembra che potrebbe dirsi, se li costringesse con dannosa prodigalità a disperdere, ogni qual volta debbono adoperare la loro arme, una gran copia d'elettrico, benchè la troppa perdita

(1) Op. cit. T. IV. p. 265.

di questo li indebolisca, li renda inetti a difendersi e come pare, ne sconcerti le funzioni digestive e ancora ne cagioni o ne acceleri la morte.

Resta per ultimo a vedere se possano spiegarsi le scosse e le deviazioni dell' ago calamitato prodotte dalla torpedine toccata soltanto nella superiore o solo nell'inferior superficie dell' organo. I tubetti componenti il doppio organo non sono già eguali, ma vanno diminuendo in altezza andando dalle parti centrali all'esterne; ond' è ch' eziandio per questo rispetto non disconviene ad esso *organo* questo nome; nè tutti sono egualmente vicini a fascetti nervei che entrano nell' organo. Sebbene tutte l' estremità de' tubetti communichino colla pelle che cuopre il corpo del pesce, ad ogni modo non è indifferente toccare questa o quella parte di esso, toccarne più o meno parti. Sono maggiori le commozioni, se tocchisi la parte media del corpo e specialmente la pelle che cuopre gli organi, che toccandosi altra parte: sono più forti, se il contatto è più ampio, come sempre accade ne' conduttori di seconda classe. Se la torpedine, sentendo premersi da due fili del moltiplicatore o da due dita d' un uomo in due punti simmetrici della regione del dorso, si sforzasse a lanciare per ciascheduno di que' due punti una scarica positiva, i due conati essendo eguali e contrarj, cioè tendenti a produrre due correnti in verso contrario, nulla ne risulterebbe. Così se sieno irritati due punti simmetrici della regione inferiore. Ma qualora i due punti, o superiori o inferiori, non sieno simmetrici, uno sarà più atto a scaricare dell' altro e quello la vincerà. Non so se possa aggiungersi che forse la torpedine, la quale sente la sua forza (1), si astiene dal lanciare la scarica dalla parte, ove questa sarebbe più debole, e che tal parte restata inerte riceve l'elettricità ritornante, positiva o negativa, e la trasmette ove conviene. Fra due porzioni di pelle, che vengano toccate, se una

---

(1) *Novit torpedo vim suam, ipsa non torpens.* Plin. Nat. Hist. L. IX. - 67.

cuopre gli organi e l'altra no, la prima sarà più atta a dare la scarica; fra due porzioni che non li cuoprono, la più atta sarà la più vicina ad essi o la vicina ai tubetti più efficaci: fra due che li coprono quella che sovrasta a tai tubi.

Se tocchisi la torpedine sol con un dito, si sente qualche scossetta. Può dirsi per avventura che due porzioncelle del dito premente equivalgono a due corpi prementi, che la scarica può farsi contra una porzioncella soltanto e a motivo degli imperfetti ed eterogenei conduttori che incontra, non diffondersi immediatamente per tutta la pelle toccante del dito umano, ma seguire per un poco la via de' nervi e forse anche eccitare l'estracorrente (1).

Allorquando, e questo è il caso ordinario, l'uomo o l'animale che riceve la commozione, non è isolato, ne isolata è la torpedine, comunicando coll' acqua del mare o almeno per mezzo di buoni conduttori col suolo umido, può la cosa andare ancora così. Tocco esempigrazia colla mano il dorso del pesce:

---

(1) Sono stati pubblicati di recente i risultamenti dell'esperienze fatte dal Sig. Matteucci su 116 torpedini. Eccone alcuni. Secondo lui non si ha la scarica dalla torpedine, se non è ad un tempo toccata in due punti differenti: una rana isolata che la tocchi con un sol filetto nerveo, non è scossa. Tutti i punti del dorso sono positivi rispetto a tutti i punti del ventre: ma e sul dorso e sul ventre alcuni punti sono positivi rispetto ad altri.

La corrente della torpedine ha forza proporzionalmente all' estensione delle piastre metalliche toccanti le due facce dell' organo.

Possono togliersi la pelle, i muscoli, i legamenti e parte considerabile dell' organo, senza che la scarica cessi: cessa, se la sostanza dell' organo è coagulata dagli acidi o dal calore. La legatura de' nervi distrugge la scarica. Tolto il quarto lobo del cervello, sparisce ogni fenomeno elettrico. Se si tocca o ferisce questo lobo, si hanno scariche anche dalla torpedine morta, o almeno morta quanto all'azione elettrica. Allorchè il lobo è divenuto affatto inerte, la corrente d' una piccola pila, che vada dal cervello all' organo, o ancora da' nervi all' organo separato dall' animale, può fare che esso organo dia qualche scossa, purchè l' animale sia morto da pochissimo tempo, e i nervi non sieno legati. — V. *Comptes rendus de l'Acad. des sci. Seance du lundi 2 Octob.* 1837. V. pure 9 *Octob.* — S' io mal non avviso, questi risultamenti confermano varie delle cose dette di sopra.

la scarica positiva seguita probabilmente dalla corrente indotta, si fa sentire alla mano e forse al braccio, indi scorre tacita e si perde nel suolo: frattanto la superficie inferiore dell'organo può ricevere l'elettricità dal mare o dalla terra. Così s'intende come possa aversi la scossa, toccando la torpedine non immediatamente, ma per mezzo d'un buon conduttore, e. g. d'una verga metallica. In questa ch'è omogenea e ottimamente conduce, non possiamo supporre che avvenga ciò che testè dicevamo accadere per avventura nel dito umano o in altro membro d'un animale: ma se in una parte soltanto di essa verga entrasse l'elettrico, e non potesse questo, per l'isolamento dell'uomo che sostiene il metallo, tornare all'altra superficie del pesce, ritornerebbe immediatamente all'animale dal metallo. Difatto il Sig. Gay-Lussac osservò, che una persona isolata prova la scossa, toccando la torpedine immediatamente col dito, ma non più, se la tocchi col mezzo di un corpo metallico: esperienza, che a prima vista ha l'aspetto di stravagante paradosso.

Ciò che abbiamo detto delle torpedini, può applicarsi ai pesci elettrici di genere diverso, come il ginnoto e il siluro: senonchè in questo l'organo elettrico, a guisa d'un mantello copre la maggior parte del corpo, e però non sembra che mai chi da essi è scosso, tocchi le due superficie opposte dell'organo, ma sempre una stessa, probabilmente la positiva, ossia quella che dà l'elettricità positiva.

Per compimento di questo lavoro, qual egli sia, piacemi osservare come la straordinaria proprietà di questi pesci, della quale si è finora discorso, non solo al fisico somministra ampia messe di curiosi cimenti e di teoretiche speculazioni, ma ancora al filosofo un argomento di più della possente Sapienza della Provvidenza amorosa che regge il creato, anzi uno de' più sensibili e ponderosi argomenti fra gli innumerabili che ne offre la storia naturale. Soprammodo varie sono le industrie e le armi che gli animali, addottrinati dal Creatore, adoperano a difesa, e ancora ad assalto quei, che col mezzo della caccia debbono

provvedersi di cibo: ma, comecchè tutte ad essi convenienti, non tutte a noi sono del pari ammirabili. Cicerone difendendo la Provvidenza dice per bocca di Balbo. *Cornibus tauri, apri dentibus, morsu leones, aliae fuga se, aliae occultatione tutantur; atramenti effusione sepiae, torpore torpedines* (1). Quale fra questi mezzi ci sembra preparato con maggior finezza e magistero d'arte? Benchè l'uomo fosse impotente a somministrare a' bruti alcuno di questi mezzi, poteva per avventura immaginare tutti gli altri: ma chi avrebbe pensato ad armar certi pesci con un apparato tanto mirabile, che forse a cercare fra tutta l'innumerevol turba degli animali altro non se ne troverà sì inaspettato e stupendo; e che gli scienziati, dopo tante indagini, non sono tuttora giunti a pienamente comprendere? Però saviamente il Segneri, accennate varie maniere che diconsi adoperare i bruti ad assaltare e a difendersi, riserba per ultima, quasi più maravigliosa, quella di che giovasi la torpedine, animale altronde disarmato e lentissimo. " E la torpedine con un miracolo più insueto, sa fin rendere " stupido chi la tocca e privarlo di moto, non che d'audacia.,,

Più recentemente il Sig. Guglielmo Kirbi osservava assai giustamente come " fra le diverse facoltà, forze ed organi dif- " ferenti, di cui la suprema Sapienza fornì i membri del regno " animale a difendersi da' nemici, o a procacciarsi il conve- " niente cibo, non ve ne sono più notevoli di quelli, co' quali " essi possono dare una scossa elettrica, e fermare nel corso " gli altri animali o sieno assalitori o fuggiaschi. Che Dio abbia " armato certi pesci, a così dire, col fulmine delle nuvole, " e gli abbia resi abili a mettere in opera così potente e ir- " resistibile elemento (alla guisa che noi facciamo colla pol- " vere da schioppo) per isbigottire, colpire, stupefare ed " uccidere gli abitatori dell'acque, è una di quelle maravi- " glie del braccio onnipotente, di cui niun animale terrestre

(1) De Nat. Deor. L. II. C. L.

" può darci esempio (1). ,, Non sembra per altro assai giusta quella specie di limitazione che aggiunge all' ultima proposizione. ,, Benchè sia noto che alcuni quadrupedi, come il gatto,
" accumulino il fluido elettrico sulla pelle, talchè danno in
" certi tempi una scossetta alla mano che gli accarezza, non
" è abbastanza chiarito che lo possano adoperare per far
" preda. ,, Nulla ha di comune la proprietà di questi quadrupedi con quella de' pesci. Non solo il gatto si serve di tutt' altre armi per difendersi o per offendere, ma nè sente la sua qualunque siasi forza elettrica, nè dà segni elettrici, se prima non sia un poco stropicciato, nè ha un organo destinato a condensare l' elettricità, nè questa esce dalla sua pelle, se i tempi vanno o umidi o troppo caldi; e allorchè copiose e forti se ne traggono le scintille (come Patrin ha osservato in Siberia) sono più ad esso nojose e moleste che non a chi le riceve. Il gatto non è sempre armato per dare la scossa, ma solo la sua pelle pelosa, vivo o morto che sia l' animale, è atta, come un disco di vetro, o un altro solido isolante, ad elettrizzarsi per istropicciamento, allorchè l' aria è secca. I pesci elettrici per contrario vanno sempre armati come i cacciatori, e caricano e scaricano in un attimo e con un solo atto. È verissima e senza eccezione l' osservazione che alcun animale il quale viva circondato dall' aria e non dall' acqua, non è fornito dell' organo e della virtù elettrica di questi pesci. E' ciò sapientissimamente: invero non avrebbono quelli potuto che troppo difficilmente spinger l'elettrico contro de' loro avversarj a traverso l' aria coibente, nè troppo agevolmente scuotere, toccandoli, gli animali asciutti com'essi. E nè pur questo è tutto: le piume di che son coperti gli uccelli, e il pelo che suol vestire i quadrupedi, isolanti come sono, non renderebbero un tal organo pressochè inutile?

(1) Bridgewater. Treatises on the history, habits, and instincts of animals. V. gli estratti di quest' opera negli Annali delle Scienze Religiose N.° 7, p. 5 e seg N.° 11. p. 224 e seg.

Perocchè questo sembra talvolta dar fuora l'elettrico abbastanza copioso, ma sempre poco intenso e poco atto a vincere gli ostacoli, a guisa d' una pila animata e viva, che or niega la scarica, ora la dà più o men forte a seconda del bisogno. Si rammenti ancora che i pesci elettrici, per quanto sappiamo, son tutti privi di squamme, e però non solo bisognosi d'alcuna particolare difesa, ma eziandio più atti ad emettere assai copioso l'elettrico per ispaventare o stordire o altri esseri nudi com' essi, od anche coperti di squame: dacchè ancora contra questi esercitano la loro virtù, almeno ove sieno di piccolo o di mediocre volume. Si appose il Reaumur: la torpedine ch' è da troppo meno di qualche altro pesce elettrico, può uccidere un' anitra. Pose egli in un vaso pieno d' acqua di mare una torpedine e un' anitra, coprendo il vaso d' un pannolino, perchè questa non si fuggisse; dopo alcune ore l'anitra era morta, secondochè egli giudicò, pe' frequenti toccamenti del pesce. Comunque siasi, la mancanza di squamme dee rendere più facili le scariche.

Abbiamo testè udito dal Kirbi e più addietro dal Becquerel, che l' arme di questi animali è non meno offensiva che difensiva. Ad alcuni moderni, come ad Humboldt e a Gio: Davy, non è riuscito osservare ch' essi offendano anche in distanza altri animali, ciò che dicono i pescatori e gli antichi zoologi. Ma non è da dispregiare la testimonianza di questi e singolarmente d'Aristotile (1), il quale cita quella de' testimonj oculari, e la conforta con una buona ragione. Il muggine, esso dice, pesce assai veloce si trova spesso nel ventre della torpedine pesce lentissimo, che potrebbe ingojarlo, se prima non lo istupisse. Io non so, se i muggini o cefali sieno i velocissimi fra tutti i pesci, come dice Plinio, ove ripete quel detto di Aristotile (2), so che sono agili e snelli, e il timore gli slancia eziandio fuori dell' acqua. Nè mancano

(1) Hist. Anim. L. IX. C. 36.

(2) Hist. Nat. L: IX. 67.

testimonianze di moderni che attestino i pesci elettrici ora uccidere, ora istupidire ed incantare gli altri pesci. Walsch osservò ciò nella torpedine. William a Filadelfia e Faklberg a Stocolm videro i ginnoti uccidere da lungi i pesciolini che si ponevano nella vasca ov' essi erano.

Sembra che la materia mucosa di cui abbiamo fatta menzione, contribuisca a' fenomeni elettrici. Così pensa Gio. Davy, il quale ha osservato che il sistema mucoso nella torpedine consiste in molti aggregati e catene di glandule distribuite in ispecie intorno all' organo elettrico. Ora questa materia non sappiamo che manchi ad alcun pesce elettrico.

Mirabile è poi come, mentre i più grandi temuti animali nascono inermi e a poco a poco vanno acquistando i denti e le corna, i nostri nascano tutti armati e col sentimento della propria forza. Il Prof. Linari osservò le piccole torpedini tratte dal seno della madre fare le loro piccole scariche che cagionavano deviazioni non piccole nell' ago magnetico.

Notabile è in particolare che mentre il pesce sente la forza che gli dà il suo organo e l' impulso a farne uso, esso organo sia insensibile, benchè così ricco di nervi. Lascio ad altri il rintracciarne la cagion fisica. Più manifesta è la cagion finale: dacchè se l' animale soffrisse la commozione ogni qual volta la dà, mal sarebbe a' suoi bisogni provveduto, e solo ne' casi estremi esso ricorrerebbe ad arme sì incomoda.

Si osservi in fine che se l' organo di questi pesci scuotesse soltanto chi tocca ad un tempo le due superficie opposte, come la pila, e la boccia di Leida, poca utilità quelli ne trarrebbero: laddove molta ne traggono dal potere e far sentire le commozioni a chi solo in una parte li tocca, ed anche lanciarla per mezzo de' corpi conduttori.

Giudicherebbesi folle chi credesse fabbricarsi dal caso, senza opera dell' intelligenza, gli elettromotori e le macchine elettriche. Quanto più folle sarebbe chi ricusasse vedere l'intelligenza in un apparato più portentoso e, quel che è più, destinato evidentemente ad un utile fine! L' uomo dopo tanti

studj è arrivato, non dico a render giovevole alla propria diffesa o alla caccia, ma soltanto a costruire un apparato così piccolo e leggiero, che toccato solo in una parte dia per sì lungo tempo un numero indefinito di scariche, senza ajuto alcuno esteriore?

Or non basterebbe essa sola la proprietà straordinaria di questi pesci, con sì ammirabile avvedimento difesi ed armati, a farci conoscenti del sovrano potere, dell'intelletto sapientissimo, e della provvida bontà dell'Artefice supremo, che avendo cura di tutto l'universo, potè, seppe, e volle così approposito provvedere a questi negletti animali? Ognun d'essi non grida del pari delle più illustri e magnifiche opere della creazione.

Fecemi la divina Potestate,
La somma Sapienza e 'l primo Amore? (1)

(1) Dante. Inf. C. III.

APPENDICE

ALLA MEMORIA DEL PADRE PIANCIANI

Ricevuta adì 7 Giugno 1838.

Debbo alla verità il riconoscere che il Sig. Prof. A. Masson ha ancor egli pensato che l' organo de' pesci elettrici possa servire ad aumentare per mezzo dell' induzione una debole elettricità. Io aveva citato di questo fisico ciò che conosceva, per mezzo dell' *Echo du mond savant* e de' *Comptes rendus*, e non aveva ancora veduta la sua memoria *De l' induction d' un courant sur lui-meme* nel fascicolo di *Settembre* 1837 *degli Ann. de Ch. et de Phys*. Tardi è giunto in Roma, e solo in questo giorno ricevo il *Dicembre*, ove sono le figure relative a detta memoria, e dove si trova ancora riportata interamente l' importante memoria del Sig. Matteucci intorno alla torpedine, inserita ancora nella *Bibl. Univers.* (Dec. 1837). Chi s' occupa in questi studj, sa quanto sia malagevole esser ben informato di tutto, e però non resterà sorpreso che il sig. Masson ignorasse che la sua spiegazione dell' aumento di tensione all' aprirsi d' un lungo filo (§ XLV), fosse stata data dal Nobili in una breve Memoria inserita nell' Antologia l' anno 1832 (e ristampata tra le sue *Memorie* l' anno 1834 T. I. p. 232), o che abbia scritto (§ LXX) *niuno fin qui aver cercato la cagione delle commozioni* prodotte dagli apparati magnetelettrici e della loro relazione colla scintilla, mentre e il Nobili aveva ciò tentato (Mem. T. II p. 59) ed altri dopo lui (Giorn. Arcad. Dic. 1836).

Ecco quanto il Sig. Masson dice a proposito de' pesci elettrici.

„ LXVII. Avendo letto parecchie descrizioni degli effetti elettrici prodotti dalla torpedine o dal ginnoto, ho posto mente all' analogia, che si trova fra questi e le commozioni ottenute nelle precedenti esperienze (colla pila e lunghi fili conduttori). Di fatto si osserva che certe circostanze, le quali ac-

crescono quì l' energia della scossa, come la grandezza della superficie, hanno pure grande influenza sulla sensazione che provasi, toccando i pesci elettrici (non so quanto questa analogia sia importante, dacchè mi pare che l' ampiezza della superficie in contatto giovi ogni volta che la tensione non è assai forte). È possibile che l' apparato elettrico di questi animali operi per induzione, per aumentare la quantità debolissima d' elettricità prodotta in una certa parte del loro corpo, sotto l' influenza della volontà, e le sperienze che ho descritto, potrebbero dare qualche lume sulle proprietà elettriche di questi animali. „

" LXVIII. Io lascio a' fisici, che hanno osservato i ginnoti, la cura di comparare le loro osservazioni con ciò, ch' io ad essi sottometto. „

Io, senza conoscere quest' invito, ho osato accettarlo, benchè non abbia mai osservato i ginnoti e non assai le torpedini. Lascio a' fisici il giudicare se, almeno in parte, mi sia apposto.

Roma, 31 *Maggio* 1838.

SOPRA ALCUNI FENOMENI METEOROLOGICI

CHE HANNO RAPPORTO COLLO SVILUPPO DI ELETTRICITÀ,

E DEL CALORICO NATIVO DEI CORPI

MEMORIA

DEL DOTTOR AMBROGIO FUSINIERI

Ricevuta adì 12 Dicembre 1837.

Non occorre rammentare quanto siano ingombrate da oscurità le cause della massima parte dei fenomeni meteorologici. Due ne sono le ragioni; la mancanza di bastante progresso dei principj della Fisica, e il difetto di osservazioni. Ma è più la seconda che la prima. Se anche i principj della Fisica non sono ancora abbastanza avvanzati per complete spiegazioni di que' fenomeni, quando vi sono osservazioni esatte, si trovano sempre nei principj conosciuti almeno dei barlumi circa le cause. Il difetto delle osservazioni porta a delle applicazioni precipitate accompagnate dall' errore. Di ciò ne ho mostrato un saggio co' miei scritti sulla rugiada. Con osservazioni ch' erano state ommesse ho dimostrato erroneo un sistema seducente ch' era stato anche coronato.

Fra i barlumi fin' ora ottenuti colle osservazioni vi è quello che le forze elettriche hanno una influenza generale nella produzione delle meteore, anche parlando delle più comuni. Ma come si sviluppino tali forze elettriche, quali modificazioni subiscano da quelle che si conoscono nei gabinetti di Fisica, e come concorrano a generare questo o quel fenomeno, tuttocciò è ancora oscurissimo. Basti l' esempio della grandine. Ogn' uno comprende in confuso che vi concorrono principalmente le forze elettriche. Ma il come è ancora un problema da risolversi ad onta di un premio lusinghiero che un' Accademia ha proposto, il quale credo che resterà ancora

lungamente in sospeso, se non è per qualche favore che venga conferito.

Fra le cose meteorologiche di cui altra volta ho parlato (Annali delle Scienze 1831. p. 31. 192), ve ne sono alcune, allora toccate soltanto in succinto, che si connettono e coi progressi recenti delle teorie elettriche, e coi miei principj di meccanica molecolare. Tale connessione le rende vieppiù importanti; e vengo ora a darne maggiore sviluppo con dettaglio di osservazioni che dopo quell' epoca ho anche ripetute ed estese.

§. I.

Dei vapori gelati.

Nell' inverno del 1826 per meglio esperimentare la evaporazione della neve a molti gradi sotto il gelo, che mi era dimostrata continua di giorno e di notte da molti esperimenti fatti segnatamente con campane di vetro, ho esposte in aperta campagna, essendo il terreno coperto di neve, delle bilancette a tre o quattro pollici della superficie, le quali contenevano neve contrabilanciata da pesi. Dopo qualche ora preponderava il peso, ma alle volte preponderava invece la neve se l'aria non era nitida. Di notte poi la preponderazione della neve era costante. Tuttociò mi ha mostrato che la formazione di vapore gelato dimostrata costante di giorno e di notte da altri esperimenti, era accompagnata da precipitazione di altro vapore gelato precedentemente asceso; sicchè l'ascensione e la precipitazione erano contemporanee e continue; e le bilancette mostravano quale dei due effetti fosse il prevalente. Le propaggini lamellari, che per le notturne precipitazioni andava acquistando la neve alla superficie, attestavano pur esse quella contemporaneità di ascesa e discesa di vapori gelati; senza che ciò impedisse a lungo la diminuzione generale della neve per l' abbondante sua evaporazione diurna, per lo più superiore alla precipitazione.

Dico ch' erano vapori gelati, benchè qualche fisico non voglia riconoscerne l'esistenza perchè non vi si adattano bene le teorie formate nei gabinetti circa la costituzione dei vapori, la loro elasticità, ed il calorico latente. Erano certamente gelati perchè si trovavano in brevissimo tempo sollevati ed attaccati corpi, per esempio entro e fuori di una campana di vetro a temperature di più gradi sotto il gelo, come a —4°; —5°; —7°; —10°; e nel Gennajo dell' inverno 1830 ho esperimentato, che si erano sollevati dalla neve ed attaccati ai corpi in una notte in cui il massimo di temperatura alla distanza di alcuni pollici dalla neve era giunta a — 16°, 5.

Niuno certamente crederà di buona fede che a così basse temperature l' acqua gelata per convertirsi in vapore debba passare per lo stato liquido, onde poi gelarsi di nuovo nell' attaccarsi ai corpi.

§. II.

Di un calore fondente e volatilizzante che si sviluppa in contatto dell' acqua gelata coi corpi in genere e principalmente coi metalli, e più secondo ch' è minutamente divisa.

1. In occasione di usare quelle bilancette ho osservato che la neve cominciava a sgelarsi a temperatura inferiore allo zero. Ciò avveniva precisamente in contatto della neve colla lance ch' era di ottone, e progressivamente si conformava in un corpo semitrasparente pel suo parziale disgelo che avveniva per azione del metallo.

Per fare esperimenti di confronto io ponea in seguito della neve in un vetro da orologio che collocava sopra una lance della bilancia e nell' altra nuda di metallo poneva altra neve che facesse equilibrio. La bilancetta era sempre sospesa colle sue lance a pochi pollici di distanza dalla superficie della neve che copriva il terreno. Non parlerò degli sbilanci che avvenivano ora da una parte, ora dall' altra per causa di ineguali evaporazioni e precipitazioni dei vapori. Quello che ora importa è che nella capsula di metallo la neve cominciava a

fondersi di sotto in contatto a — 2° circa, ed a — 1° si riducea dopo qualche tempo liquida. Al contrario nella capsula di vetro sussisteva a lungo gelata anche fino a + 1° $\frac{1}{2}$.

Tali differenze erano così marcate e costanti nei molti esperimenti eseguiti, che mi mostrarono evidentemente un' azione del metallo a fondere la neve a temperatura inferiore allo zero, mentre il vetro sembrava avere per quel confronto la virtù opposta di mantenere la neve gelata al di sopra di quel termine.

Feci quindi questi altri esperimenti.

2. La temperatura della neve esplorata con un termometro essendo a più gradi sotto lo zero, per esempio a — 3°, io vi ponea a raffreddarsi egualmente un piccolo mortajo di vetro col suo pistillo, e un piccolo cucchiajo o di argento o di ferro forniti di manico di legno per poterli maneggiare senza comunicar loro il calore della mano. Indi prendendo della neve e collocandola nel mortajo la polverizzava assai fina. Così ridotta la sparpagliava leggermente ossia a piccole dosi e a molecole disgiunte sopra dischi di varj metalli del diametro di 9 centimetri, sopra altri dischi eguali di vetro, di resina, di agata, e di legno.

Le temperature dell'aria segnate da un termometro presso ai dischi erano nei varj esperimenti 0°; — 1°; — 1°,5; — 2°; — 2°,5. Prima di spargere la neve sopra i dischi io li lasciava esposti il tempo necessario onde acquistassero la temperatura dell' aria. La neve ch' io vi spargeva era sempre di qualche grado più fredda, per esempio come dissi a — 3°.

Ecco i risultati di un gran numero di esperimenti fatti a quelle temperature nell' inverno del 1826, e ripetuti con maggior distinzione anche negli inverni 1831 1832.

Sopra i dischi di zinco, di ferro, e di rame a tutte quelle temperature le minime molecole di neve si fondevano all'istante in goccioline. Pareva precisamente che toccassero metalli riscaldati al fuoco.

Le molecole maggiori si fondevano più tardi per esempio

in due o tre minuti secondi; e sempre più tardi secondo ch' eran maggiori, e secondo che la temperatura era più bassa entro i suddetti limiti.

Alla temperatura di 0°; tutte le goccioline restavano liquide. Alle temperature di — 1°; — 1°,5; — 2°; — 2°,5 le più piccole che si eran fuse restavano pure liquide; ma altre alquanto maggiori si congelavano di nuovo. La nuova congelazione però non era totale. Siccome aveano la forma lenticolare restavano fuse al di sotto in contatto col metallo, e di sopra eran gelate di nuovo; per lo che quelle lenticole erano anche facilmente mobili sullo stesso metallo, mercè uno straticello di liquido frapposto.

Sugli altri dischi di vetro, resina, agata, e legno, simili molecole di neve a quelle temperature non si fondevano.

Il potere fondente si sviluppa dunque dai metalli per le cause di cui dirò quì sotto dietro ad altri esperimenti.

Ho osservato il seguente ordine circa i gradi di quel potere fondente, secondo la diversa natura dei metalli.

Sui dischi di zinco, di ferro, o di rame, la fusione era la più pronta.

Sopra dischi di stagno e di piombo era alquanto più tarda.

Sopra un disco di argento il ritardo era ancora maggiore.

Anche adoperando della brina, invece che neve polverizzata come sopra, ottenni consimili effetti. Io aveva disposti sopra una tavoletta di pino quattro dischi, uno di argento, altro di rame, altro di zinco, ed uno di vetro, e li avea lasciati raffreddare come l' aria di cui la temperatura era 0°. Presi dei ramoscelli carichi di brina che ancora non si sgelava, la facea cadere raschiando sopra que' dischi. All' istante le molecole di brina in contatto coi metalli si sgelavano. Sul vetro subito non si sgelavano punto, e soltanto in seguito avveniva uno sgelamento parziale, tardo, e graduato. Lo stesso presso a poco avveniva delle molecole di quella brina che cadevano invece che sui metalli o sul vetro, sulla tavoletta di pino; cioè non si sgelavano punto nè all' istante nè in

breve tempo, ma soltanto in seguito lentamente e parzialmente, sempre dove toccavano il legno.

3. Importanti per le conseguenze circa le cause sono le seguenti ulteriori osservazioni.

Le lenticole gelate procedenti da disgelo dei briccioli di neve in contatto dei metalli con successiva congelazione dopo alcun tempo, per esempio di una mezz' ora, non si trovavano più ed erano tutte svanite per evaporazione; quantunque la temperatura si fosse mantenuta sempre sotto il gelo, nè fosse quindi accaduta nuova liquidazione; e ciò per la ragione che si formano come sopra (§. I), vapori gelati.

Mi è accaduto di vedere che da quelle gocciole gelate ed evaporate i dischi di rame, zinco e ferro aveano contratte evidenti macchie di ossido. Il disco di zinco avea varie macchiette di ossido bianco; quello di rame avea contratte alcune macchie bruno rossigne, e quello di ferro delle macchie brune. Tutte erano conformate in guisa che mostravano le tracce delle azioni chimiche delle gocciole evaporate; cioè formavano le loro basi.

Se quei metalli fossero stati bagnati estesamente d'acqua invece che da minime molecole, e se l'acqua fosse stata lentamente evaporata per dolce calore, non avrebbe lasciata certamente una traccia così marcata di ossidazione. D' onde ne segue che l' azione chimica di minime parti è in relazione più energica; il che combina colla energia che il Sig. De la Rive attribuisce ai gas ed ai vapori di sviluppare elettricità colle loro azioni chimiche sui metalli nelle sue recenti *Recherches sur la cause de la electricitè Voltaique. Genève* 1836. pag. 73.

Altre mie osservazioni mi hanno dimostrato che se i metalli avevano contratto un velame comunque leggerissimo di ossido per lunga esposizione all' aria, non avveniva in quei metalli la fusione dei briccioli di neve alle suindicate temperature, ma soltanto alla temperatura di 0° ed anche imperfettamente; cioè il disgelo era soltanto parziale.

Però se le molecole erano estremamente piccole non

mancavano di sgelarsi a — 1°,5; o — 2° quantunque vi fosse il velame leggero d'ossido.

In tali casi di mancato disgelo i briccioli di neve contraevano una forte adesione alla superficie, talchè non si distaccavano neppure percuotendo i dischi sopra un corpo duro; e questo era effetto di parziale disgelo al contatto susseguito da congelazione, come di sopra si è veduto succedere.

Togliendo al contrario dai metalli il leggero stato d'ossido comunque invisibile, e rinnovando la superficie, tosto divenivano atti a fondere prontamente anche a — 2°,5 quei briccioli di neve che prima sussistevano gelati completamente anche a 0°.

4. Da tutto questo è ben chiaro fin d'ora che lo sviluppo di calore fondente dei metalli sulla neve a temperature inferiori allo zero era accompagnato da chimica azione delle minime parti di questa sopra quelli.

E siccome la fusione avveniva più pronta e a temperature più basse secondo ch' eran minori le molecole, nè lo stesso velame d'ossido la impediva riguardo alle molecole estremamente piccole; ne segue che la loro azione chimica era più energica a misura ch' eran minori.

La maggiore azione secondo la tenuità della materia mi ha indicato inoltre lo sviluppo di quella forza o calorico nativo di cui trattano i miei principj di meccanica molecolare, e come dirò in seguito.

Si vedrà quì sotto come dalla stessa azione delle suddette molecole sui metalli si sviluppasse anche la elettricita.

Ma prima è da vedersi cosa avvenisse, e quando io sparpagliava le molecole di neve a temperature inferiori alle suindicate sui dischi metallici e non metallici; e quando usava masse maggiori a temperature superiori.

5. Colle regole suindicate (n.° 2) di raffreddare nella neve gli strumenti che adoprava a polverizzarla ed a spargerla diradata sui dischi, e di lasciar questi raffreddarsi come l'aria in aperta campagna, ho fatti i seguenti esperimenti.

Alle temperature di $-3°$; $-4°$; $-5°$; io esponeva dischi di zinco, di ferro, di rame, di resina, di legno, di agata, e di vetro, e vi spandeva sopra briccioli di neve. A quelle temperature non si fondevano neppure sui metalli. Invece entro un certo tempo sparivano senza passare per lo stato liquido, in virtù di quelle temperature, convertendosi come sopra (§ I) in vapori gelati.

Ho costantemente osservato che dai metalli la evaporazione delle molecole gelate era molto più sollecita che dagli altri corpi; il che era analogo alla fusione sui metalli e non sugli altri corpi a temperature un poco più elevate (n.° 2).

L' ordine più volte osservato delle più sollecite evaporazioni di quelle molecole secondo la natura dei corpi sui quali giacevano fu il seguente.

Dal zinco, dal ferro, dal rame, e dall'argento, le evaporazioni avvenivano a parità di circostanze più presto che dalla resina, da questa più presto che dal legno, e da questo più presto che dall' agata e dal vetro.

Come era avvenuto della fusione a più alte temperature, così anche la evaporazione delle più piccole molecole gelate era la più pronta. Mi son dato ad osservare più volte coll'uso della lente in qual modo avvenisse la diminuzione progressiva dei volumi; cioè se le particelle cristalline si rotondassero. Io facea tali osservazioni con visite alla sfuggita di quando in quando, per non influire col calore della persona. Non ho mai veduta molecola alcuna che nella progressiva diminuzione del suo volume si rotondasse. Conservavano invece tutte le loro forme cristalline cogli angoli e spigoli. Il che mi ha dimostrato nel modo il più immediato che l' acqua gelata partiva e si dissipava nell' aria senza disgelo alcuno, ed a strati o laminette superficiali; d' onde i vapori gelati indi nascenti doveano essere costituiti essi pure da molecole cristalline, le quali probabilmente si saranno ulteriormente suddivise in altri cristalletti minori dopo essersi volatilizzate.

6. Quantunque a dette temperature da $-3°$, a $-5°$, non

si fondessero le molecole di neve sui metalli, pure divenivano aderenti alle loro superficie in modo simile a quello che ho di sopra notato (n.° 3); senza però che tali adesioni togliessero la prontezza della evaporazione. Dipendevano quelle adesioni da un principio di fusione al contatto, susseguito da congelazione come ho detto al luogo citato.

7. Da questi secondi esperimenti a dette temperature (n.° 5) nelle quali le molecole gelate non si fondevano sui metalli risulta, che si sviluppava al contatto un calore volatilizzante le stesse molecole invece che fondente; e più al contatto dei metalli, che degli altri corpi, e coll' ordine di cui sopra secondo la diversa loro natura.

8. L' azione fondente o volatilizzante dei corpi in genere sulla neve, ma principalmente dei metalli con certa gradazione anche fra di loro dichiarata dagli esposti esperimenti molecolari, rende ragione dei seguenti effetti, e viene da questi confermata.

Ho detto di sopra (n.° 1) che la neve in una capsula di ottone cominciava a sgelarsi al contatto col metallo a — 2°, che a — 1° si sgelava interamente, e che al contrario in una capsula di vetro si manteneva gelata anche a + 1° $\frac{1}{2}$.

Però di sotto dove la neve era in contatto immediato col vetro io trovava alla temperatura 0° un principio di disgelo, il quale non progrediva, o assai lentamente. La neve acquistava fra le sue parti una certa coerenza per cui si potea levarla in corpo dalla capsula di vetro, ed era allora ch' io vedea la sua superficie inferiore, stata in contatto col vetro, bagnata da uno strato liquido sottilissimo.

Dunque anche in contatto col vetro alla temperatura 0° vi era un principio di fusione che non si manifestava punto superiormente.

Ho voluto vedere a temperatura superiore al gelo la differenza dell' azione fondente dei metalli sopra quella degli altri corpi usando masse notabili di neve invece di molecole.

Sopra una tavoletta di legno ho disposti tre dischi uno di zinco, altro di rame, ed uno di vetro; e li ho lasciati prendere la temperatura dell' aria che alle due ore pomeridiane era giunta a $+2.°$

Sopra ciascuno ed anche sopra la tavoletta ho collocata e distesa una certa quantità della neve che copriva il terreno, col mezzo di una spatola di legno, lasciata pure dapprima esposta alla temperatura dell' aria.

Appena che la neve toccava i metalli le parti minori si fondevano all' istante, ed il rimanente sì adagiava tenacemente alle superficie formando al contatto un corpo molle e trasparente colla neve di sopra; corpo molle e trasparente che a quella temperatura si osservava essersi formato col tempo sotto la neve in contatto di tutti i corpi in genere. Al contrario sul disco di vetro e sulla tavoletta la fusione era molto minore che sui metalli.

In somma al contatto di questi si operava all' istante quella trasformazione della neve in corpo molle e trasparente per fusione parziale, che in contatto degli altri corpi avveniva soltanto in lungo tempo.

Ho anche osservato che la neve formatasi in corpo sui metalli vi aderiva tenacemente, sicchè a fatica si potea movere sulle loro superficie pulite; mentre sul vetro e sul legno era molto più mobile e molto meno formata in corpo; ma sempre in contatto col legno e col vetro si fondeva molto più che al di sopra.

Quindi ho compreso che anche a temperature superiori allo zero l' azione fondente della neve vi era principalmente al contatto dei metalli, come molto più attivi degli altri a produrre l' effetto.

9. Cade sotto la osservazione di chiunque si trova in campagna in tempo di neve che questa sparisce attorno i corpi molto prima di quella che copre il nudo terreno, e che la sua scomparsa è progressiva per ampj spazj, i quali si vanno dilatando attorno i corpi; e ciò avviene anche a temperature di molti gradi sotto il gelo.

Ora in virtù delle premesse numeri 4, 7 si comprende che quell' effetto ha origine anche dal calore fondente e volatilizzante che si sviluppa al contatto, calore ch' è bensì più forte al contatto dei metalli, ma che non manca mai qualunque sia il corpo.

La progressiva scomparsa della neve attorno i corpi dipende anche da un' altra causa; cioè dall' azione dei raggi solari sopra gli stessi corpi i quali comunicano il calore concepito all' aria contigua; mentre la neve riflettendo tutti i raggi non concepisce egual calore. Ma al principio del disgelo vi concorre certamente anche il suddetto calore che si sviluppa in virtù del contatto; calore di cui sarà quì sotto determinata la causa (§ III.)

Si osserva anche un disgelo progressivo entro cavità chiuse da ghiaccio trasparente in cui si trasforma in alcuni luoghi la neve il che avviene spesso attorno corpi isolati, come sarebbe una pietra. Quel progressivo disgelo allora dipende dall'accumulamento di calore dei raggi solari, che ho scoperto avvenire di molti gradi entro vasi diafani, e più che entro vasi opachi, benchè questi sieno di metallo. (Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto 1831 pag. 39.)

Ma circa la scomparsa della neve per un calore o fondente o volatilizzante vi sono altri effetti curiosi dei quali non ho ancora penetrate abbastanza le cause, le quali mi propongo d' indagare ulteriormente spingendo le osservazioni.

Mi basterà quì accennare il seguente.

Sotto gli alberi svanisce progressivamente la neve e vieppiù secondo che sono frondosi e forniti di piccoli ramoscelli. L' effetto comincia attorno il tronco, poi prosegue sotto i rami rivolti al sole; e finisce col diffondersi tutto all' intorno. Non si comprende che dall' alto al basso e a grandi distanze possano quegli effetti procedere dal riscaldamento dell' aria in contatto dei rami, la quale in aperta campagna e per le agitazioni a cui è soggetta viene continuamente rinnovata.

Circa quella influenza dei rami dall' alto al basso, e a

molta distanza, ho fatte delle singolari osservazioni ed istituiti degli esperimenti di confronto per indagarne la causa precisa, ma mi riservo di parlarne in altra occasione, dopo avere spinte più oltre le indagini, restandomi ancora da dilucidare alcuni punti di fatto.

10. Non finirò questo articolo senza avvertire, che effetto generale dello sgelamento della neve è quello di prendere una parte del calorico necessario alla sua liquidità, e che si rende latente, dai corpi vicini e quindi anche dalle parti precedentemente sgelate, le quali in conseguenza si gelano di nuovo. Quindi si osserva formarsi sotto la neve in contatto dei corpi dei pezzi o lastre di ghiaccio trasparente dove appunto ha cominciato il disgelo come quì sopra (n.° 8). Così il terreno ch' era prima sgelato al cadere della neve, contraere poscia alle volte uno stato di gelo, quando quella si fonde per di sopra in virtù dei raggi solari o della temperatura dell'aria. Tutto questo è conforme a cose conosciute; ma non è cognito il perchè nel passaggio dallo stato solido al liquido un corpo non prenda tutto il calore occorrente dalla sorgente comunque pervenne che determina la sua liquidità , e ne prenda invece una parte dove non vi sarebbe causa di sua fusione.

§ III.

Sviluppo di elettricità contemporaneo a quello del calore fondente in contatto delle molecole gelate d' acqua coi metalli.

1. Negli Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto 1831 pag. 203, 204 nell' atto di riferire lo sviluppo di calore fondente e volatilizzante in contatto di molecole di neve coi metalli a temperature inferiori al gelo , di cui sopra (§. II, 2, 3) accennai di avere osservato anche uno sviluppo di un' attrazione elettrica con corpi stranieri delle molecole di nuovo congelate dopo la fusione. Un Fisico, forse per la importanza della mia osservazione, fece mostra di non crederci. Ma la cosa nulla ha di strano, anzi lo sviluppo di elettricità

è un' effetto necessario dell'azione chimica esercitata dall'acqua sui metalli, e tanto più energica quanto più piccole sono le molecole, come si è mostrato di sopra direttamente coi fatti (§. II, 3, 4).

Io riferirò quì in dettaglio le mie osservazioni circa quello sviluppo di attrazione elettrica, tali quali le ho registrate subito dopo fatte negli inverni 1826, 1831, 1832.

1. Colle regole di cui al § II, n.° 2, io sparpagliava minute particelle di neve sopra dischi di rame, di zinco, e di ferro collocati a tre pollici circa dalla superficie della neve sopra supporti di legno. Il termometro vicino ai dischi segnava — 1°, 5. Quelle particelle tosto si fondevano, le minori più presto delle maggiori.

Le goccioline che si producevano sui dischi dalla fusione delle molecole di neve erano subito dopo rappigliate, e formavano tante piccole lenti di gèlo. Io le trovava gelate toccandole con un festuco di paglia o col solito piccolo cucchiajo di ferro. Non aderivano quelle parti gelate al disco ma vi erano mobili sopra. Ho poi osservato che quelle piccole lenti o gocciole, anche bislunghe, gelate erano evidentemente attratte dalla estremità del piccolo cucchiajo di ferro che ad esse appressava. Cioè più e più volte osservai, che appressando loro quella estremità a piccola distanza correvano ad attaccarvisi, ed anche vi rimanevano attaccate una dopo l' altra formando un piccolo corpo di gelo prolungato e aderente alla estremità del cucchiajo. Per esempio una piccola lente di acqua gelata correva tutta intera ad attacarsi alla estremità del cucchiajo, e ciò avveniva alla distanza di una linea circa; e ripetendo questo sopra altri pezzetti di ghiaccio si agglomeravano a detta estremità uno dopo l' altro e in più serie formando una specie di piccola barba.

Anche con festuco di paglia o erba secca toccando quelle goccioline sui dischi metallici si palesavano gelate; ed ho anche rimarcati segni di attrazione, ma inferiori a quelli resi manifesti col cucchiajo di ferro.

Lo stesso esperimento l' ho ripetuto sopra un tavolo alto tre piedi, segnando allora il termometro — 1.° In questo caso le gocciole erano semigelate, e facilmente col tocco del cucchiajo di ferro si sgelavano affatto. Per altro vidi segni manifesti di attrazione, e l' aggregazione delle molecole che restavano semigelate alla estremità di quel piccolo strumento. Facendo l' esperimento sul tavolo ho adoprato un disco di rame.

2. Alla temperatura — 0,5 la minutissima neve sparpagliata sopra dischi di zinco e di rame si sgelava in gocciole lenticolari e poi si rappigliava. Quelle piccole lenti di nuovo gelate erano anche aderenti ai metalli; ma per lo più subito dopo eran mobili.

Ho fatto lo stesso esperimento anche sopra un disco di argento che da più di un' ora era collocato sopra supporti di legno a tre pollici dalla neve.

Colla punta di un grosso filo di ferro racchiuso in un tubo di vetro, ch'io tenea in mano, avvicinandola molto a quelle lenticole gelate, ma semisgelate al di sotto in contatto del metallo perchè mobili, vidi manifesta l' attrazione di que' pezzetti gelati, giacchè vi correvano a piccola distanza, e restavano aderenti attorno la punta.

Lo stesso esperimento l' ho ripetuto con esito eguale anche sopra disco di zinco.

3. Alla temperatura — 4° ho sparpagliata della neve polverizzata assai minutamente sopra dischi di zinco, di rame, di ferro, di stagno e di argento, di recente levigati, e sopra due altri di vetro e di pino. In nessuno si è svolto calore atto alla fusione. Dopo un quarto d' ora circa trovai che dai metalli si erano volatilizzate tutte le molecole di neve; e dai dischi di vetro e di legno se n' era volatilizzata soltanto una parte. Si noti che assai poca ne avea sparpagliata sulle superficie, e in tutte quantità eguali.

In seguito il termometro segnava — 3°, e a causa della mia presenza subito dopo — 2°,5. Sparsa col piccolo cucchiajo di

ferro della nuova neve sminuzzata sopra quelle superficie, e sempre in quantità eguali, osservai quanto segue.

Sui dischi di zinco, di ferro, e di rame si fondeva all' istante, sul disco di stagno la fusione era un poco più tarda, e sul disco di argento si fondeva pure ma con ritardo ancora maggiore. Sui dischi di vetro e di legno non si fondeva.

Sono stato in osservazione se goccioline sgelate al momento del contatto si congelassero di nuovo, e se di nuovo congelate venissero attratte da una punta straniera o dal piccolo cucchiajo di ferro ch' io adoprava, come mi era accaduto anteriormente. Di fatti sui dischi di zinco, di rame, e di ferro molte di quelle goccioline lenticolari procedenti dalla fusione di contatto dei briccioli di neve si erano di nuovo congelate a metà, e in tale stato si attaccavano alla estremità o spigolo del piccolo cucchiajo di ferro; sicchè ottenni abbastanza un saggio di ripetizione delle precedenti esperienze.

La temperatura fu sempre — 2°, 5 durante tutto l'esperimento, perchè il termometro la segnava ancora quando soddisfatto della ottenuta conferma mi sono partito lasciando tutto al suo posto.

Ritornato poco dopo trovai che la temperatura era ancora la stessa — 2°, 5 e che dai metalli erano scomparse tutte le molecole. Al contrario sul vetro e sul legno ve n'era ancora una parte allo stato di gelo, ed altra erasi volatilizzata.

Due ore dopo segnando il termometro 0° sparpagliai della neve sopra tutti i dischi col solito cucchiajo di ferro. Sopra quelli di metallo la fusione era momentanea se anche ve ne gettava in abbondanza oltre l' usato. Sui dischi di vetro e di legno non si fondeva se non che assai lentamente, e al solo contatto.

§. IV.

Circa le cause dei fatti esposti. Nuova prova immediata dello sviluppo di elettricità per azione chimica nella Pila di Volta. Dipendenza di detti effetti dal calorico nativo dei corpi.

Tutti i Fisici comprendono di quale importanza sia la cognizione delle forze molecolari generatrici dei fenomeni elettrici, magnetici, capillari, e di tutti quelli della materia organica; anzi in genere di tutta la natura; e nello stesso tempo quasi tutti disprezzano o almeno non curano le osservazioni dei minuti fenomeni. È questa una vera contraddizione con se stessi. Si abbandonano invece a sistemi fantastici creando sostanze imponderabili ed atomi materiali, e distribuendo colla immaginazione sì a quelli che a questi delle forze primigenie per applicar poscia tutto questo alla spiegazione dei fenomeni. Finchè si proseguirà con questo metodo chimerico, invece che consultare la natura nelle sue minute operazioni, cause di tutti i grandi effetti sensibili, non si farà che comporre volumi di errori, i quali arresteranno ancora per lungo tempo i veri progressi della scienza teorica.

Le osservazioni ed esperimenti di cui sopra, fatte in aperta campagna hanno importanza appunto perchè riguardano azioni molecolari. Ora mi accingo a mostrare la connessione dei fatti esposti colla teoria elettro-chimica della elettricità; e rimontando più in alto anche co' miei principj di meccanica molecolare che ho tratti non dalla fantasia, com' è di costume, ma dalle esperienze.

Un primo risultato ottenuto è lo sviluppo di calore fondente o volatilizzante le molecole (§ II) in contatto di metalli a temperature di più gradi sotto lo zero. D' onde viene quel calore? Vi rispondono altri fatti contemporaneamente rilevati, che viene da azione chimica di quelle molecole sui metalli. Tali fatti sono 1.° le evidenti marche di ossidazione che lasciano sui metalli quelle molecole dopo evaporate; 2.° l'impedimento allo sviluppo del calore fondente che oppone

un velame comunque leggerissimo di ossido che contratto abbia il metallo, velame che toglie appunto o diminuisce l' azione chimica; 3.° il minore sviluppo di quel calore fondente nel contatto dell' argento in confronto di metalli più ossidabili (§ II, numeri 2, e 3).

Un secondo risultato è la nuova congelazione delle molecole dopo essersi fuse in contatto dei metalli se la temperatura era inferiore a 0.° Di ciò si comprende facilmente la causa; il calore sviluppato a primo tratto dall' azione chimica non potea per la celerità del suo sviluppo essere subito tolto dal freddo dell' aria, ma venia sottratto in seguito. Per altro la continuazione dell' azione chimica svolgendo sempre nuovo calore, si mantenea fra le molecole gelate ed il metallo uno straticello liquido che le rendea mobili sulla superficie; e inoltre ivi l' aria non penetrava a togliere col suo freddo quel perenne calore in modo da produrre nuova congelazione.

Terzo risultato è lo sviluppo di un' attrazione fra quelle molecole prima fuse e poi di nuovo gelate con corpi stranieri e massime con uno spigolo o punta di metallo (§ III). Quell' attrazione anche alla distanza di una linea si mostra da per se stessa di carattere elettrico. Ma qui è noto dalle teorie, massime le più recenti, che l' azione chimica dei liquidi sui metalli è sorgente di elettricità; che il metallo si costituisce negativo ed il liquido positivo. Laonde quelle molecole di nuovo gelate erano elettrizzate positivamente; per lo che doveano essere attratte da qualunque corpo neutro, e massime dalla estremità acuminata di un metallo. Le prime molecole attratte scaricandosi della loro elettricità divenivano atte in conseguenza ad attraerne delle altre, d'onde la loro riunione in più serie attorno la estremità del corpo straniero, come mostra il fenomeno.

Ecco dunque che mentre la teoria elettro-chimica porge la chiara spiegazione del fenomeno osservato; questo dal suo canto mostra in un modo immediato che dall' azione chimica dell' acqua meteorica sui metalli si sviluppa elettricità assieme

col calore; d'onde anche nella Pila di Volta calore ed elettricità deono procedere dall'azione chimica dei liquidi sui metalli.

Fin quì parlano abbastanza le teorie generalmente ammesse di sviluppo di calore e di elettricità col mezzo delle azioni chimiche; ma le stesse teorie non rispondono ad altri fatti quì sopra rimarcati nelle mie osservazioni; cioè.

Che sugli stessi metalli il calore sia fondente, sia volatilizzante, si sviluppava maggiore del proporzionale secondo che eran piccole le molecole gelate, per lo che le minime si fondevano a temperature a cui le maggiori resistevano; ed alla stessa temperatura le minori erano le più pronte a fondersi e volatilizzarsi (§ II, 2, 3).

Che anche in contatto del vetro e più in contatto del legno e delle resine si sviluppava una certa quantità di calore fondente benchè molto minore che sui metalli, per cui alla temperatura 0° si formava uno strato liquido comunque leggero che progressivamente si aumentava fra que' corpi e la neve sovrapposta, mentre di sopra si conservava allo stato naturale; e ciò quantunque niun' azione chimica fosse sensibile fra la neve e que' corpi, nè si potesse supporre nel caso del vetro (§ II, 2, 7).

Che generalmente in modo analogo fra la neve ed ogni corpo che vi sia sottoposto si forma col tempo uno strato liquido mentre la neve al di sopra resta al suo stato naturale, strato liquido il quale poi sovente si converte in gelo trasparente o per abbassamento ulteriore della temperatura dell'aria, o per disgelo superiore che assorba da quello calore allo stato latente (§ II. 8.).

Dunque anche senza azione chimica sensibile si sviluppa un calore fondente o volatilizzante in contatto di molecole gelate d'acqua coi corpi solidi. Al che le teorie ammesse non rispondono.

Di questi fatti ulteriori si rende ragione coi miei principj di meccanica molecolare, ossia collo sviluppo del calorico nativo

sempre maggiore secondo la tenuità a cui viene ridotta la materia, e di cui i corpi sono dotati più o meno secondo la diversa loro natura.

Il mio principio tratto da lunga serie di esperienze è, che fra le parti della materia grandemente attenuata si sviluppa una forza di repulsione, la quale tende a dividere le parti con sempre nuovo sviluppo della stessa forza; cosicchè ogni divisione divien causa di nuovo sviluppo della stessa forza; e così progressivamente. Per lo che la ho chiamata *forza di espansione*. E siccome la stessa forza, più e meno energica secondo la varia natura delle sostanze, è anche principio di calore, sotto questo rapporto la ho chiamata *calorico nativo*.

Ho trovato inoltre che quella forza interviene essenzialmente nelle combinazioni chimiche, producendo divisioni interne e reciproche delle sostanze, e riducendo in tal modo al contatto le molecole da combinarsi, le quali allora agiscono per mutua attrazione. D'onde ho mostrato che senza il suo esercizio le combinazioni chimiche non potrebbero avvenire, perchè le molecole da combinarsi non si ridurrebbero al contatto; e di conseguenza ho anche mostrato che l'esercizio di quella forza precede le stesse combinazioni; e tuttociò sempre colla scorta delle esperienze.

Ho pure mostrato che da quel principio sorge il calore delle chimiche azioni, cioè perchè si svolge dai corpi colla divisione delle parti il calorico nativo.

Infine per i suoi caratteri la stessa forza si è manifestata essere anche il principio comune delle due elettricità, per due modificazioni fin' ora ignote. Ma nel maggior numero di casi da me osservati del suo originario sviluppo, agisce come semplice forza repulsiva fra le parti della materia, senza spiegare il carattere di forza elettrica, come in que' casi semplicissimi si sviluppa ed agisce senza produrre chimiche azioni.

Questi principj si trovano esposti colle loro prove esperimentali negli Annali delle Scienze del Regno Lombardo Veneto del 1833. Si veggano al proposito presente segnatamente

le Proposizioni 2, 7, 8, 9 alle pag. 29-36, e le Proposizioni 24, 26, 28, 29, 30 alle pag. 85-92.

Con questi principj si rende ragione e di ciò che avviene sui metalli secondo i fatti suesposti, e di tutte le loro circostanze, e dei fatti ulteriori a cui le teorie ammesse non rispondono.

Le molecole di neve o di brina in contatto dei corpi acquistano la tenuità opportuna allo sviluppo della suddetta forza di espansione o calorico nativo; e ciò a causa anche delle minime asprezze superficiali di essi corpi. Ogni più piccolo principio di tenuità opportuna a quello sviluppo dà origine alla suddetta progressione alternativa e crescente. Cioè ogni minima divisione di parti è causa di sviluppo di quella forza di espansione o calorico nativo; questa è causa di divisione ulteriore per cui si sviluppa nuova forza, e così progressivamente.

Dove vi è azione chimica, come fra le molecole d'acqua gelata ed i metalli, il calorico nativo atto alla loro fusione a certe temperature, o alla loro volatilizzazione a certe altre, procede e dalla stessa acqua e dagli stessi metalli che ne sono ricchi (l. c. Prop. 8. pag. 35.). Lo stesso calorico nativo è anche il principio della elettricità che si sviluppa e che si è osservata (§ III).

Quanto più piccole sono le molecole, più vigoroso è lo sviluppo di detta forza principio di calore (l. c. Prop. 9 pag. 36. Prop. 30, pag. 92). Quindi le loro fusioni a temperature minori secondo che sono piccole; ed alla stessa temperatura le loro fusioni o volatilizzazioni più pronte (§ II, 2, 5).

Dove l'azione chimica è nulla o insensibile, come al contatto delle dette molecole col vetro, o con resine, o con corpi vegetabili, il calorico nativo procede in tutto, o per la massima parte, dalla sola acqua che n'è povera. Dunque nè fusione nè volatilizzazione pronta, come nel caso di azione chimica sui metalli, ne' segni sensibili di elettricità.

Però il calorico nativo benchè scarso dell' acqua e lentamente sviluppato, accumulandosi col tempo fra quelle molecole e la superficie del corpo genera la loro fusione. Quindi uno strato liquido che si genera fra la neve ed i corpi sottoposti il quale alle volte si gela di nuovo per le cause suesposte (§ II numeri 8, 9).

§ V.

Col calorico nativo si rende ragione dello sviluppo di elettricità dalle chimiche azioni, e dello sviluppo di queste dalla elettricità.

Si sapea, secondo le esperienze, che dall'azione chimica sorge la elettricità; e che dalla elettricità sorge l' azione chimica. I fatti della Pila di Volta mostrano in un modo distinto che i due effetti sono a vicenda l' uno causa dell'altro. E da que' fatti ho concepita anche ivi una progressione alternativa; cioè che una minima azione chimica svolga da principio una minima elettricità, che questa sia causa di aumento della stessa azione chimica, e questa accresca lo svolgimento della elettricità; e così progressivamente fino a un certo limite, parlando della Pila (Annali delle Scienze ecc. 1834 pag. 54).

Ma non si sapeva poi come l'azione chimica sviluppasse elettricità, nè come dalla elettricità sorgesse l'azione chimica. Si sapeva cioè che un effetto segue l' altro, ma non come uno produca l'altro. Mancava la cognizione del nesso fra i due effetti.

Il mio principio del calorico nativo spiega quella connessione, e la reciproca dipendenza dei due effetti; e ciò per essere quel calorico tanto una forza agente nelle chimiche combinazioni, quanto il principio comune delle due elettricità. Ecco in qual modo.

Quel calorico o forza di espansione delle due sostanze è causa delle loro divisioni interne e reciproche con iscambievoli irruzioni, e quindi delle combinazioni delle molecole poste a mutuo contatto, agendo allora le loro attrazioni. In ciò consiste

l'azione chimica. Ogni divisione è causa di nuovo sviluppo di calorico nativo, questo è causa di divisione ulteriore, e lo stesso calorico è insieme il principio comune delle due elettricità. Dunque le elettricità si sviluppano assieme colle chimiche azioni. Reciprocamente come il calorico nativo di nuovo svolto è causa di progresso ulteriore dell'azione chimica, così anche la elettricità in cui si trasforma quel calorico è causa dello stesso progresso.

Siccome però l'azione chimica è costituita di due parti; cioè la divisione delle due sostanze in molecole, e l'attrazione delle une colle altre, quando in virtù di quella divisione interna e reciproca sono poste a mutuo contatto; così in certo modo è impropriamente detto che l'azione chimica svolga elettricità; bisogna dire invece che la divisione delle parti, cioè la prima operazione che ha luogo nell'azione chimica, è la causa di sviluppo di elettricità. Dal che si scorge che quello sviluppo ha una stretta analogia con quello che procede dal fregamento; anzi che la causa è la stessa. Io poi ho spiegato col principio del calorico nativo anche il calore che si svolge col fregamento dei corpi (Annali delle Scienze ec. 1833 pag. 98, Prop. 32).

§ VI.

Lo sviluppo di calore fondente e voltalizzante è causa di scarsezza di brina e di rugiada sui metalli. La potenza delle punte e degli spigoli ad aggregare le molecole di brina è un effetto di carattere elettrico dipendente da sviluppo di calorico nativo.

1. Ora si comprende la causa per cui sulle superficie dei metalli scarseggia grandemente la brina in confronto degli altri corpi. Dico che scarseggia perchè lasciandoli a lungo esposti nelle notti invernali calme e serene, un'absenza assoluta non vi è mai. Anzi ai loro spigoli si forniscono di brina molto bene, come dirò quì sotto.

La causa cioè è lo sviluppo del calore fondente e volatilizzante che si sviluppa in contatto coi metalli delle molecole di

gelo nuotanti nell' aria, e costituenti i vapori gelati, dai quali viene prodotta la brina nelle notti di basse temperature (§§. I, II).

2. Per la stessa causa manca nelle altre stagioni la rugiada sui metalli, o vi scarseggia in confronto degli altri corpi. Allora sono le molecole d' acqua liquida che in contatti dei metalli per l' azione chimica che vi esercitano, ed energica secondo la loro tenuità, vengono volatilizzate pel calore che da quell' azione si svolge.

È poi chiaro che essendosi trovato sviluppo di elettricità assieme col calore fondente, per l' azione chimica delle molecole gelate sui metalli (§. III), elettricità dee pure svolgersi anche nelle altre stagioni al contatto coi metalli del vapore notturno che forma la rugiada.

3. Co' miei scritti circa la causa della rugiada e della brina, pubblicati negli Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto, ho dimostrato colla scorta di esatte osservazioni che l' una e l' altra procedono da un vapore notturno che ascende di notte dal terreno, e anche dalla stessa neve; vapore che d' inverno può essere gelato (§. I), il quale è più caldo dell' aria soprastante, e si condensa in contatto di questa e dei corpi freddi come la stessa aria. Nei medesimi scritti ho dimostrato in più modi essere fallace la teoria comunque seducente del fisico Inglese Wells, che facea consistere la rugiada e la brina in una precipitazione sui corpi dell' acqua di saturazione esistente nell' aria anche di giorno; e ciò per un raffreddamento di essi corpi al di sotto dell'aria generato da irraggiamento del loro calore negli spazj celesti; ipotesi di cui il massimo fatto è di non tener conto del vapore notturno ascendente più caldo dell' aria soprastante, ch' è un fatto costantissimo e incontrastabile.

Secondo quella teoria ai metalli non si attaccherebbe nè rugiada nè brina, per questo perchè non si raffreddano al di sotto dell' aria per difetto d' irraggiamento del loro calore negli spazj celesti. Ma ciò importerebbe che fossero assolutamente privi di brina, e invece soltanto ne scarseggiano in

confronto di altri corpi; e di più importerebbe che ne restassero privi anche gli spigoli; e invece anche gli spigoli dei metalli ne restano bene forniti.

Nelle mie Memorie ho addotta anche questa fra le tante incoerenze di quella dottrina coi fatti; ora poi, più che non feci allora, ho mostrata la vera origine della scarsezza di brina sui metalli, cioè dipendentemente da un' azione chimica delle molecole al contatto la quale svolge un calore che le volatilizza.

Resta a parlare dell' attaccarsi della brina abbondantemente agli spigoli degli stessi metalli.

4. Premetto sempre che il vapore notturno, o gelato nell' atto stesso della sua sortita dal terreno o dalla neve, o che si gela dopo sortito nell' aria, subisce uno stato di condensazione e di precipitazione, perchè trova l'aria soprastante più fredda di se stesso, e i corpi freddi come questa; siccome i miei esperimenti esposti in dette Memorie hanno dimostrato. L' attaccarsi dunque sia della rugiada, sia della brina ai corpi, ha per causa generale il maggior freddo di essi in confronto del vapore anche gelato che ascende.

Sulle superficie metalliche si precipita pure per la stessa causa quel vapore, ma subito dopo il calore che si sviluppa per l'azione chimica lo volatilizza. Nello stesso tempo si sviluppa elettricità come si è veduto (§ III) e il metallo contrae la negativa. Questa tende, come è noto, a dissiparsi per le estremità acuminate e degli spigoli. Ivi dunque attrae le molecole di gelo nuotanti nell' aria, e queste attratte partecipando dello stesso stato elettrico, ne attrae delle altre, e così successivamente formandosi delle frange o barbe di brina, come avviene in fatto. L' azione delle molecole sulla superficie che svolge elettricità è continua, quindi è perenne quell' attrazione agli spigoli. Per altro le molecole una volta aggregate continuano ad esserlo anche per le attrazioni di coesione fra di loro, e di adesione col metallo.

5. L' aggregazione delle molecole di brina in forma di barbe o frange agli spigoli avviene su tutti i corpi, anzi agli

spigoli dei corpi non metallici riesce più abbondante; ma non è egualmente facile renderne ragione, benchè il fenomeno per se stesso e massime col confronto del caso dei metalli si mostrò di carattere elettrico.

Le molte osservazioni che ho fatte nel proposito mi dimostrarono la generalità e la costanza di quell'effetto; su di che passo a dare qualche dettaglio.

Lungo gli spigoli e sulle punte o di erbe, o di fusti e di rami, è sempre abbondante l'aggregazione delle molecole gelate per sovrapposizione. Le superficie liscie dei rami o foglie ne sono pressochè spoglie. Le erbe pelose al contrario ne sono abbondantemente ricoperte anche alle superficie, oltre averne il contorno riccamente fornito. Le foglie tutte o verdi o secche hanno i loro perimetri carichi di abbondantissima brina, mentre manca o scarseggia sulle rotondità dei tronchi e dei rami grossi. I rami minuti ne sono forniti, e vieppiù secondo che sono sottili, ossia quanto più si avvicinano allo stato di spigolo o punta; cosichè le gemme prominenti dai ramoscelli ne sono più cariche degli stessi ramoscelli. Se un grosso tronco di albero è reciso o infranto, mentre pochissima è la brina attaccata alla sua rotondità e alle parti bene recise; tutti gli spigoli e tutte le estremità puntate ne sono fornite, e vieppiù secondo che sono tenui.

Anche lastre di ghiaccio che abbiano contorni acuti, si forniscono alla notte sopra questi di frange di brina.

La terra lavorata e non coperta di vegetabili contiene brina assai meno che i vegetabili. Se ne forniscono le piccole prominenze; e i frantumi di vegetabili secchi che vi sono sempre da per tutto sulla terra, son questi che si coprono di brina, seguendo sempre la legge di disposizione a frange alle estremità. Ebbi anche ad osservare che nella composizione di quelle frange le propaggini affettano sempre le forme lamellari ed il parallelismo fra di loro.

Vi è dunque da per tutto nell'aggregazione dei cristalletti della brina un'azione crescente secondo la tenuità della

materia; ed è tanta l'azione della materia attenuata in quell'effetto, che alcune bave di ragno mi è accaduto vederle acquistare il diametro almeno di una linea col mezzo di quelle aggregazioni.

6. L'azione crescente secondo la tenuità della materia negli effetti ora descritti è conforme ai miei principj di meccanica molecolare, ma non ho potuto finora determinarla con precisione per mezzo di esperimenti diretti. La spiegazione di attaccarsi la brina agli spigoli dei metalli per attrazione elettrica (n.° 4) non si applica colla stessa facilità ai casi degli altri corpi vegetabili e inorganici. Si potrebbe concepire anche su di quelli tenuissime azioni chimiche delle molecole d'acqua che sviluppassero colla loro continuazione una elettricità agente agli spigoli ed alle punte; ma ho osservato che il vetro sul quale azione chimica non si può supporre, mentre si carica abbondantemente di brina alle sue superficie benchè liscie, nello stesso tempo contrae ricche frange di brina a' suoi spigoli, seguendo in ciò la legge generale degli altri corpi.

7. Bensì tanto sul vetro quanto sui metalli, ove eran più liscie le superficie io trovava espansa in lamine sottilissime e continue la brina, il che attestava che le molecole eran passate per lo stato liquido quantunque la notturna temperatura fosse stata sempre di più gradi sotto il gelo. Tali laminette o macchie gelate erano dentate nei loro contorni, oppure terminate con orlo più rilevato del rimanente; circostanze queste che mi davano il segnale di una resistenza incontrata nella ulteriore espansione, e il conseguente effetto di reazione in contrario secondo uno dei miei principj di meccanica molecolare. (Annali delle Scienze ec. 1833 Prop. 14, pag. 39).

Quindi ancora io vedeva in ciò lo sviluppo di calorico nativo avvenuto dall'acqua meteorica gelata in contatto non solo dei metalli ma anche del vetro; per cui passando per lo stato liquido avea esercitata la sua forza di espansione in superficie, e poi si era di nuovo gelata.

Non mancava dunque mai quello sviluppo al contatto delle molecole qualunque fosse il corpo, benchè l'azione chimica fosse nulla o insensibile, come anche da altri fatti di sopra è risultato (§. II, 8). Nè dovea quindi mancare lo sviluppo di elettricità di cui il calorico nativo è principio (§. V). Che la elettricità possa svolgersi anche dove non vi è chimica azione propriamente detta ossia con intacco di massa, e per le sole espansioni superficiali prodotte dal calorico nativo, è questa una conseguenza immediata del principio che quel calorico è bensì causa tanto delle azioni chimiche quanto delle forze elettriche, ma nei casi più semplici del suo sviluppo agisce senza produr chimiche azioni (§ V); per lo che senza di esse può anche essere causa di elettricità. Questa deduzione la ho applicata ne' miei scritti circa la sorgente della elettricità nella Pila di Volta, per rispondere ai casi in cui non è manifesto che il liquido intacchi i metalli.

8. Quando all' attaccarsi della brina ai corpi concorrono forze elettriche, necessariamente le stesse forze deono concorrere a produrre anche l' adesione delle stesse molecole allorchè son liquide, cioè della rugiada, com' è facile da comprendere, essendovi sempre la stessa causa qui sopra determinata, cioè lo sviluppo del calorico nativo col mezzo del contatto. Ciò per altro non deroga punto alla causa generale della precipitazione di que' vapori notturni o gelati o liquidi ascendenti nel terreno, sia nell' aria più fredda che incontrano, sia sui corpi freddi come l' aria. La precipitazione è il primo effetto, l' adesione per virtù elettrica sviluppata come sopra col mezzo del contatto è il secondo.

È stata fatta qualche osservazione circa le disposizioni delle molecole di rugiada sui corpi che indicano il concorso di azioni elettriche; ed io pure ho ravvisata la sua disposizione a globetti appunto sulle parti acuminate a imitazione della brina; ma su di ciò non ho proseguito.

9. Infine devo anche notare che formando una coppia di due dischi metallici eterogenei alla maniera di Volta (zinco

e rame), e lasciandoli esposti in notte di brina, non ne acquistavano nè più nè meno di altri dischi consimili senza essere accoppiati. Essendo un effetto elettrico quello di contraerne agli spigoli (n.° 4), quella indifferenza del contatto eterogeneo stà contro la teoria dello stesso Volta.

10. Finirò come ho cominciato; cioè col dire che i fenomeni meteorologici sono in gran parte involti da oscurità circa le loro cause, che le teorie fisiche fin' ora conosciute possono soltanto somministrarne dei barlumi, quando sieno esatte le osservazioni, e che in molti casi si trovano le tracce di azioni elettriche, ma non ancora bene determinate, e senza conoscere abbastanza nè come agiscano nè quali siano le loro modificazioni. Nello stesso tempo soggiungo che in questa Memoria ho dato dei saggi d'influenze delle azioni molecolari secondo i miei principj esperimentali nei fenomeni meteorologici, e dei saggi di azioni particolari abbastanza determinate in alcuni di que' fenomeni del calorico nativo con isviluppo di elettricità.

SULLO SPOSTAMENTO DEL MERCURIO OSSERVATO AL PUNTO DEL GHIACCIO SULLA SCALA DEI TERMOMETRI

MEMORIA

DEL CANONICO ANGELO BELLANI

Ricevuta adì 10 Marzo 1839.

Sono già trascorsi più di trent' anni da che io feci conoscere per la prima volta non ritornare il mercurio alli stessi punti della scala per un' eguale temperatura nei termometri già da qualche tempo costruiti; e ne assegnava la vera causa di questo fenomeno, provenire cioè, da una diminuzione di capacità nel recipiente del liquido per un lento ristringimento del vetro (*Tentativi per determinare l'aumento di volume che acquista l'acqua prima e dopo la congelazione.* Giornale di Fisica di Pavia anno 1808 pag. 429). Ma non fu che quattordici anni dopo, quando da un estratto di un mio opuscolo pubblicatosi nel Gennajo del 1822 dalla *Biblioteca Universale di Ginevra* si cominciò fuori d' Italia a venire in cognizione di questa imperfezione da me riscontrata ne' termometri; e sulle prime si dubitò del fatto, poi della spiegazione da me data (*Biblioteca Universale Febbrajo* 1822); fatto e spiegazione che ho quindi confermato con un altro mio più esteso lavoro intitolato: *Dell' incertezza nel determinare il punto del ghiaccio sui termometri . . . Di alcune proprietà del mercurio e del vetro e delle difficoltà che si sono finora presentate nel determinare le loro dilatazioni.* (Giornale di Fisica di Pavia 1822 bimestre IV e 1823 bimestre 2.°).

Non era tanto da maravigliarsi che la notizia di quel fenomeno fosse rimasta sconosciuta fuori d' Italia fino a tanto che un giornale estero l' avesse annunziata; quanto perchè il fenomeno stesso non fosse stato prima di me avvertito nello

spazio di cento anni almeno tra mille e mille persone che costruivano o usavano termometri, come cosa cotanto ovvia e che doveva di necessità presentarsi alla vista di chiunque sperimentando avesse posto il suo strumento nel ghiaccio che si fonde, come uno dei due punti fondamentali adattati per la sua scala, e come quello più facile e più sicuro d'ottenersi colla massima precisione. S' accresce la maraviglia ora nel considerare che dopo essersene trattato anche in giornali esteri, e specialmente nella (*Bibl. Univ.* Dicembre 1822), Giornale tanto stimato e diffuso in tutta l'Europa, sembra ancora ignorarsi da alcuni la vera causa; oppure si riproducon da altri, come loro proprie, esperienze e spiegazioni già da me istituite; avendo esposto al Pubblico prove sufficienti per poter asserire, essere vero tutto ciò che si disse e si dice conforme a quânto io già dissi, ed essere falso quanto ne discorda.

È ora mai a tutti noto che in un termometro di recente costruito immerso nel ghiaccio che si fonde, e marcato il termine dove il mercurio contenuto sembra stazionario lungo il tubo, ossia quando ha acquistata quella temperatura, si segna quel punto a zero come principio della scala; ma non è già che quel punto sia veramente stazionario, come già si suppose, perchè dall' istante che lo strumento fu costruito fino al termine di un anno circa, quel punto va lentamente innalzandosi con moto decrescente di modo che può giungere a segnare quasi un grado sopra 0; il qual fenomeno è ora conosciuto in fisica sotto la denominazione *di spostamento dello zero.* A quella più o meno lenta, e successiva elevazione partecipano per necessità anche tutti gli altri gradi della scala fino all' ebollizione del mercurio stesso, ma in minor quantità quanto più quelli si allontanano dal punto infimo della scala; perchè la bolla o il recipiente qualunque quanto più si riscalda, tanto più dilatandosi si accosta allo stato dell' originaria costruzione; di modo che ritornando a raffredarsi all'egual grado di prima; la capacità del vetro stata aumentata dalla cresciuta temperatura non torna tosto a diminuire come prima

per la rigidità delle parti solide del vetro, a differenza di quelle del mercurio che per essere liquide ubbidiscono prontamente ad ogni cambiamento di volume dipendente dal calorico.

Ma ecco che uno dei più celebri chimici Berzelius (*Traitè de Chimie Tomo VIII pag.* 329) ci viene ora a dire: ,, essersi ,, in questi ultimi tempi osservato che un termometro purgato ,, d' aria cambiava a poco a poco il suo punto della congelazione durante le prime settimane, e che questo punto ,, s' innalzava di un quarto di grado, di un mezzo grado, ed ,, anche di un grado e mezzo. Questo fenomeno sembra dipendere dalla bolla che non essendo perfettamente sferica ,, viene compressa dall'aria, ma senza che questo effetto arrivi ,, subito al suo massimo. Se la bolla è di un vetro un poco ,, grosso, o che non si prenda il punto della congelazione ,, che dopo aver chiuso il termometro, il fenomeno non ha più ,, luogo. Ma i fabbricatori di strumenti di fisica prendono so- ,, vente il punto della congelazione quando il termometro è ,, ancora aperto. ,, Già prima di Berzelius, Flaugergues, Gourdön, e Marcet e De la Rive (*Bib. Univ. Febbrajo* 1822, e *Aprile* 1823) al primo annunzio del fenomeno avevano fatta una simile supposizione come la più ovvia a presentarsi, ma alla quale aveva io risposto in due parole; cioè che il fenomeno succede egualmente ne' termometri stati sempre aperti, e dovendosi la causa di questo fenomeno distinguere da quell'altra che opera subito, e quasi in totalità al momento che si toglie la pressione atmosferica quándo si chiude ermeticamente il tubo del termometro. Non crederei poi che si trovino costruttori al presente di termometri cotanto inesperti da graduare lo strumento prima di chiuderlo ermeticamente; operazione preliminare tanto essenziale, perchè volendosi privare di tutta l' aria è quasi di necessità che dall' estremità del tubo resa capillare esca qualche poco di mercurio nell'atto che si chiude ermeticamente.

Altri invece hanno asserito che il fenomeno succedeva

bensì ne' termometri a mercurio, ma non già ne' termometri ad alcool, per cui non ammettevano come causa il ristringimento del vetro che sarebbe stato comune a questi e a quelli; ma che dipendesse da un lento sviluppo di una minima porzione d'aria rimasta fra le molecole del mercurio ed aderente alle interne pareti del recipiente, per cui ne aumentasse il volume; come si svolge dall'alcool medesimo quando si sottrae la pressione atmosferica; le quali bollicine d'aria come più voluminose nell'alcool e meno aderenti si fanno passare, com'è noto, nella parte del tubo rimasta vuota. Ma aveva io già fin dal principio prevenuta anche questa obbiezione col dimostrare che, siccome l'alcool meno o più rettificato si dilata da sei a sette volte più del mercurio alla temperatura della congelazione dell'acqua, e supposta un' eguale estensione di gradi (per esempio di una linea ciascuna) tanto in un termometro a mercurio come in uno ad alcool, per questo avrebbe fatto di bisogno di una capacità della bolla sei a sette volte meno; per cui l'effetto del suo ristringimento sarebbe di altrettanto meno sensibile nello spostamento dello zero; non dipendendo il fenomeno da dilatazione del liquido, ma da diminuzione di capacità nella bolla. Supposto dunque che lo spostamento in un termometro a mercurio fosse di un grado della scala, in uno ad alcool non sarebbe che di un sesto o di un settimo per uno stesso grado. Dato invece che eguale fosse la capacità della bolla e del tubo ne' due termometri, conservando quello a mercurio la estensione di ogni grado eguale ad una linea; in quello ad alcool risulterà invece di sei a sette linee per la maggiore sua dilatabilità, ma la quantità dello spostamento sulla scala sarà in ambedue di una linea, ossia di una sesta o settima parte di un grado, essendo questo spostamento indipendente dalla diversa dilatabilità del liquido impiegato. Oltre al costruirsi comunemente i termometri ad alcool con tubi più larghi di quelli a mercurio, per cui in proporzione dell'estensione de' gradi che ne risultano è come se fossero costruiti con bolle minori, e perciò in essi

meno sensibile lo spostamento, possono concorrere altre circostanze a togliere apparentemente ne' termometri ad alcool l' effetto dovuto allo spostamento medesimo, e sono: 1.° una porzione dell'alcool che facilmente può evaporare nella parte del tubo rimasta vuota, e che quindi si raccoglie e rimane aderente all' estremità chiusa ermeticamente massime se termina capillarmente: 2.° un velo d'alcool che rimane aderente per qualche tempo lungo le pareti interne del tubo che bagna, quando da una temperatura più alta si fa rapidamente discendere il liquido appunto per osservare lo spostamento se ha luogo al termine del ghiaccio: 3.° una porzione del liquido stesso che si converte allo stato aeriforme in ragione diretta della temperatura dell' ambiente e della capacità del tubo rimasta vuota: 4.° precipitando col tempo una porzione della sostanza colorante dell' alcool e questa precipitazione dipendendo da una condensazione delle parti, deve per necessità diminuirne il volume totale: 5.° se in origine un termometro ad alcool fu graduato nel ghiaccio, ma non tutta profondata in esso quella porzione del tubo contenente il liquido, e stando la temperatura esterna più alta; precauzione a cui poco si bada generalmente; allora riposto il termometro nello stesso ghiaccio ma anche con tutta quella porzione del tubo, come si dovrebbe fare per esplorarne lo spostamento, questo ancorchè avesse luogo, potrebbe non apparire pel ristringimento di quell' alcool in ragione diretta della lunghezza del tubo ch' era rimasta fuori e della temperatura più alta dell' ambiente. Ciò è in causa della grande dilatibilità dell'alcool rispetto al mercurio; per cui graduati due termometri l' uno ad alcool e l' altro a mercurio nello stesso bagno freddo, ma prolungata al di fuori un' eguale lunghezza di tubo occupata dal liquido stando la temperatura dell' ambiente più alta; rimessi ambedue nello stesso bagno con anche quella porzione di tubo occupata, il termometro ad alcool si manterrà più basso: viceversa succederà ne' gradi superiori. Se si costruisse un termometro coll' acqua, l'effetto dello spostamento sarebbe ancora

più notabile che non in quelli a mercurio, per esser la dilatazione dell' acqua ne' gradi di temperatura prossimi alla sua congelazione nulla, anzi retrograda, e potendosi facilmente formare recipienti molto grandi. Del resto aveva io già dimostrato (*Giornale di Fisica di Pavia* 1823 *bim.* 1.° *Articolo* 1.°) che il mercurio per sua natura non essendo idoneo ad assorbire alcun liquido ne' fluido aeriforme, non potrebbe menomamente sviluppare aria, sottratta la pressione atmosferica; e benchè si continui comunemente a dire che coll'ebollizione del mercurio si viene a purgarlo dall' aria e dall' umidità ospitante nella costruzione de' barometri e de' termometri; quella operazione propriamente non serve che a sviluppare ed espellere l' umidità e l' aria aderente alle pareti del vetro mediante quell' alta temperatura; e per cui quella minima porzione d' aria che pur si scorge talvolta all' estremità del tubo barometrico, quando coll' inclinazione si obbliga il mercurio a riempirlo, oppure rimane nella bolla del termometro, era dessa un residuo di quella ch' era aderente alle interne pareti, raccoltasi in un punto solo; quando però quella discontinuità del mercurio non provenisse talvolta da polviscoli rinchiusi, e già prima esistenti nell' aria, oppure da estranee molecole già aderenti al vetro.

Altri due distinti Fisici, Legrand e Despretz, riconobbero bensì quella stessa causa da me assegnata e comprovata in diverse mie Memorie, ma senza che neppur se ne faccia dal primo di me menzione; e in quanto poi da me discordano, si trovano fra loro stessi in opposizione. Nella seduta 30 Gennajo 1837 dell'Accademia R. delle Scienze di Parigi Legrand ha presentato una *Nota sullo spostamento dello zero nella scala dei termometri a mercurio* colla quale volle provare: „ 1.° Che lo spostamento dello zero raggiunge il suo limite „ di grandezza ossia arriva al suo massimo dentro lo spazio „ di quattro mesi. 2.° Nei termometri il recipiente de' quali „ è in vetro, lo spostamento arriva fino a mezzo grado centi- „ grado, ma in quelli che hanno il recipiente di cristallo o

„ di smalto, lo spostamento è generalmente nullo; anzi, sog-
„ giunge, che dalle sue sperienze risulterebbe assolutamente
„ nullo; ma che avendo passati in revista altri termometri co-
„ struiti e marcati allo zero già lungo tempo prima da *Bun-*
„ *ten* ch' era l'artefice medesimo che aveva costruiti i suoi,
„ ne trovò fra quelli uno che segnava perfino un innalza-
„ mento di mezzo grado. 3.° Quando lo spostamento è effet-
„ tuato, se si riscalda il termometro fino all'ebollizione del mer-
„ curio e che si lasci raffredar nell' aria, lo zero ricade al
„ punto ch' era immediatamente dopo la costruzione del ter-
„ mometro; ma rimonta col tempo come la prima volta. 4.°
„ Quando un termometro è riscaldato sino verso il 300 e raf-
„ fredato lentissimamente, come si può fare col mezzo d' un
„ bagno d' olio, lo zero rimonta molto più che non avrebbe
„ fatto senza ciò.... Un termometro a recipiente di cristal-
„ lo, scaldato e raffreddato allo stesso modo, prova pure uno
„ spostamento nella sua scala ma un poco meno che se fosse
„ di vetro. 5.° In una serie di sperienze nelle quali la tem-
„ peratura non oltrepassava 290°, con un lentissimo raffred-
„ damento lo spostamento ossia l' innalzamento dello zero fu
„ di gradi 1° e 4 per un recipiente di vetro e di 1° e 2 per
„ un recipiente di cristallo. Ora quel primo termometro la-
„ sciato all' aria libera per un tempo sufficiente, avrebbe pro-
„ vato uno spostamento di circa 0° 3; rimane dunque 1.° e
„ 1 per l'effetto d'averlo fatto ricuocere... 6.° Un termometro
„ stato ricotto a 300, ossia se si riscalda di nuovo fino all'ebolli-
„ zione del mercurio, e che si lasci raffredar nell'aria, lo zero
„ ridiscende ma non già fino al punto cui era immediatamente
„ dopo la sua costruzione. 7.° Lo spostamento succede tanto
„ in un termometro aperto come in uno privo d'aria e chiuso
„ ermeticamente; ma forse è minore lo spostamento nel primo
„ che nel secondo caso. 8.° Si conchiude che questo spostarsi
„ dello zero non può essere attribuito ad una elevazione del
„ mercurio proveniente da uno sviluppo d'aria, perchè non
„ succede col cristallo alle temperature comuni, e che non

„ viene impedito col lasciar il termometro aperto; per cui è
„ necessariamente dovuto ad un ristringimento del recipiente.
„ La pressione dell' aria non influisce che poco o punto su
„ questo ristringimento; per cui bisogna attribuirlo ad una
„ operazione propria del vetro. Si può credere che questo
„ effetto sia in relazione colla tempera che gli fa subire un
„ raffreddamento pronto; ma è singolare che questo stesso
„ effetto non succeda col cristallo, sebbene si temperi come il
„ vetro ec. „ (Annales de Chim. et Phys. Dec. 1836 pag. 368). Dice pertanto l'Autore che fra li 60 termometri da lui sperimentati a bolla di cristallo o di vetro tenero detto smalto conservati alle temperature comuni, si spostavano *poco o nulla* in confronto di quelli di vetro più duro; la differenza de' quali non superava un mezzo grado centigrado; ma poi tosto soggiunge che uno di Bunten dello stesso vetro dolce differiva *tanto come uno di vetro duro*; e che anche i suoi termometri di vetro tenero riscaldati fino a 300° e poi raffreddati lentamente si spostavano *un poco meno* di quelli di vetro duro. Anzi per questa specie di ricuocitura, ossia di *stempera*, provavano uno spostamento maggiore di quello che assegnava naturalmente, succedere a quelli di vetro duro. In secondo luogo dice l' autore che quando lo spostamento in su è stato effettuato naturalmente, se si viene a riscaldare il termometro sino all' ebollizione del mercurio, ma che si lasci raffreddar nell'aria, ossia rapidamente, *lo zero ricade al punto ch'era immediatamente dopo la sua costruzione, ec.*

Io dunque dirò: 1.° Che lo spostamento naturale non raggiunge il suo termine dentro lo spazio di quattro mesi, come ho trovato su milliaja di termometri in quarant'anni di prove; ma che si può limitare ad un anno, eccetto quelle minime variazioni che possono succedere anche per effetto dei soli cambiamenti di temperatura atmosferica, come si dirà più innanzi.

2.° Vi sarà bensì differenza da un termometro all' altro nella quantità e nella durata del tempo di questo spostamento; ma non mi sono accorto che una differenza notabile potesse

provenire dalla diversità del vetro. In quella mia prima relazione del fenomeno aveva già detto positivamente che non influiva sul risultato *la qualità diversa di vetro o cristallo*; e in un successivo scritto indico lo *smalto e il cristallo* come egualmente soggetti. La quantità poi dello spostamento naturale a me consta essere in generale alquanto maggiore di quella assegnata da Legrand, ma non mai arrivare un grado centigrado.

3.° Non e poi possibile che dopo una temperatura eguale a quella dell' ebollizione del mercurio ricada lo zero al punto ch' era immediatamente o prossimamente subito dopo la costruzione del termometro; perchè se Legrand medesimo prova che quanto più si riscalda un termometro e si raffreddi quindi prestamente, tanto più si abbassa il punto dello zero; per la stessa ragione siccome la temperatura del mercurio bollente è ben lontana dall'eguagliar quella della bolla vitrea nell'atto che passa dallo stato pastoso a quello solido, così dovrà sempre essere maggiore l'abbassamento sul termometro riempito subito dopo soffiata la bolla e tosto graduato nel ghiaccio, che non quando si rimettesse dopo molto tempo al grado del mercurio bollente.

4.° Aveva io già ripetutamente assomigliato l'effetto dello spostamento a quanto deve succedere nei vetri non ricotti per una specie di tempera, come succede in un modo eminente ma in senso opposto e finora inesplicabile nelle lacrime battaviche e ne' così detti mattracini di Bologna; ma non ho mai stimato che il *ricuocere* i termometri, ossia lo *stemperarli* rimediasse pienamente al difetto, perchè nelle vicende di temperatura alle quali si assoggettano comunemente questi strumenti, anche fra i soli limiti dalla congelazione all' ebollizione dell' acqua, si alterano sensibilmente i punti fissi per un parziale spostamento. D' altronde in pratica sarebbe operazione troppo lunga e fastidiosa il ridurre prima tutti i termometri capaci a sopportare il grado dell' ebollizione del mercurio, e lasciarli lentissimamente raffreddare per quindi diminuire nell' uso più comune la lunghezza, o capacità del tubo poco più

sopra i gradi dell'ebollizione dell'acqua, cioè di due terzi circa; e tanto più quando si volesse limitare la scala a soli 40 o 50 gradi sopra 0°, come frequentemente si pratica coi termometri che non devono esporsi che alle temperature dell' atmosfera. Oltre di che in questi essendo ogni grado molto più esteso ed anche suddiviso, lo spostamento riescirebbe sensibile egualmente anche nella variazione di pochi gradi. Credo dunque mezzo più comodo, più sicuro e più completo il lasciar *stagionare* i termometri un anno prima di fissarne la scala, e anche per fissar questa cominciar dal segnare il punto del ghiaccio, e quindi quello dell' acqua bollente, e non viceversa; perchè nel primo caso sebbene il detto punto si trovasse più basso rimettendo lo strumento nel ghiaccio, pure col tempo anche questo minor difetto svanirebbe, mentre facendo l'operazione inversa si troverebbe col tempo rialzato, e per sempre il punto marcato nel ghiaccio. Mi sembra poi che pei comuni termometri ne' quali non si richiede la maggior precisione, basterebbe anche appena fatti di fissarli sulla scala un mezzo grado al dissotto del punto marcato nel ghiaccio che si fonde, per trovarli poi dopo un anno rimontati al vero punto stazionario con qualche minima diversità da potersi trascurare.

5.° Trovo finalmente difettoso il metodo indicato dall' Autore nel costruire i termometri, se confessa *doversi talvolta riscaldare a differenti riprese qualche termometro durante un' intiera giornata senza neppur potere riescire a scacciarne tutta l' aria aderente alle pareti del recipiente, mentre in altre circostanze basta un' ora o due:* per me basta uno o due minuti. E qui mi sia lecito di soggiungere che nelle opere di alcuni Fisici d' altronde celebratissimi s' insegna bensì il modo di riempire i termometri, ma che poi in pratica non si riconosce pel migliore.

Nella seduta 19 Giugno 1837 Despretz presentò all' Accademia Reale di Parigi le sue *Osservazioni sullo spostamento e sulle oscillazioni dello zero del termometro a mercurio* (*Annales des Chimie e Physique T. LXIV an* 1837 *pag.* 312.

L'Institut N. 218 con qualche variazione). Comincia a dire che sino dal 10 Febbrajo 1833 aveva presentato alcune di queste osservazioni, e che trovò variare lo zero, ossia spostarsi coll' abbassarsi di nuovo se si rimetteva il termometro nell'acqua bollente e quindi novamente nel ghiaccio; e che questa osservazione era stata confermata da Legrand: cosa che io aveva pubblicata e in tanti modi confermata nel 1822-23. Mi fa quindi l' onore di nominarmi in una Nota dicendo però semplicemente che *Bellani, in Italia, Flaugergues* (e non Flangerges) *in Francia hanno fatto conoscere per li primi l'ascensione dello zero col tempo. Altri Fisici l' avevano osservato senza farlo conoscere, perchè l' avean attribuito a qualche errore d' osservazione.* Ma Flaugergues non ne parlò che nel Giugno 1822 alla pagina 117 della Biblioteca Universale di Ginevra, e dietro a quanto aveva io già fatto sapere nel Gennajo antecedente dello stesso Giornale; notizia che io aveva già resa pubblica in Italia quattordici anni prima, cioè nell'anno 1808 come già ho dimostrato. D' altronde Flaugergues non indicò neppure la vera causa del fenomeno, mescolando anche molti errori fisici nel suo ragionamento, da me fatti notare nel successivo anno 1823 col mezzo del soprannominato giornale di Fisica di Pavia. Anzi lo stesso Flaugergues neppur sospettando di quell' innalzamento dello zero ne' termometri a mercurio, aveva invece supposta e riprodotta una vecchia opinione, ch'era tutto all'opposto, in alcune sue *Osservazioni sulla diminuzione di dilatabilità dello spirito di vino ne' termometri* (*Journal de Physique: Paris* 1808 *Avril pag.* 295); osservazioni che furono tosto da me confutate in quel mio lavoro dello stesso anno inserito nel detto Giornale di Fisica di Pavia.

Come poi abbia Despretz potuto *conoscere* che altri Fisici avevano osservato l'innalzamento dello zero *senza farlo conoscere,* non lo dice. Dice poi che la durata del periodo entro il quale lo zero continua ad elevarsi dopo la sua costruzione, non sia già di soli tre o quattro mesi come vorrebbe

Legrand, ma bensì di quattro a cinque anni. Però dalla tavola annessa della marcia di due termometri ben si vede che il massimo cambiamento è succeduto dentro il primo anno; e siccome l' autore confessa che que' suoi termometri servirono per qualche tempo in alcune sue sperienze, per cui qualche volta provavano delle variazioni di temperatura da — 20 a + 20, come altri avean servito per altre esperienze a determinare temperature comprese fra + 30°, e 100°; ecco perchè la loro marcia riportata al termine della congelazione dell' acqua poteva talvolta essere stazionaria, ed anche rovesciata, ossia retrogradata osservandosi perfino in quella tavola che il primo termometro, dall' 8 Aprile 1834 al 17 Aprile 1835 non fece neppur un passo innanzi. Non si poteva dunque propriamente dire in vista di quelle estranee variazioni di temperatura, che lo zero avesse continuato naturalmente ad ascendere per lo spazio di quattro o cinque anni, tanto più che si mostrava retrogradato dal 9 Febbrajo 1837 fino al 23 Giugno dello stesso anno, epoca in cui cessarono le osservazioni (sebbene la Memoria, come si è veduto, fosse stata presentata fino dal 19 di detto mese ed anno). Se, come ho tante volte detto, lo zero rimane per qualche tempo più sotto, passando il termometro da una temperatura più alta ad una più bassa, ma sempre a + 0°; l' opposto deve succedere nel passaggio da una temperatura — 0.° a 0.°

Inoltre si fa notare dall'Autore che que' suoi termometri *erano terminati da una capacità piena d' aria di modo che il recipiente era egualmente compresso all' esteriore come all' interiore:* usandosi pertanto in queste sperienze di termometri molto sensibili e perciò col recipiente del mercurio di una capacità grandissima in proporzione del tubo, siccome erano alcuni di quelli adoperati dall'Autore che davano persino il centesimo di grado; quell' aria contenuta nel tubo e nell'appendice superiore variando di tensione secondo la temperatura dell' ambiente, doveva più o meno deprimere la colonna del mercurio, e tanto più quando vi fosse concorsa diminuzione

della pressione atmosferica sul recipiente medesimo, effetto già conosciuto. Anche il conservare i termometri nel tempo che non restano in azione orizzontali o verticali, non è cosa indifferente, perchè la colonna del mercurio lungo il tubo colla sua pressione tolta od aggiunta, e secondo la durata, può accelerare e ritardare lo spostamento, ed anche renderlo retrogrado. Si spiegherebbe in tal guisa come nel mese di Giugno del 1837 anche senza le altre cause concomitanti diventasse retrograda l'altezza del mercurio, acquistando maggior tensione d'aria ospitante per la maggior temperatura dell'atmosfera, essendo questo il solo mese di estate in cui durante li 5 anni si fece la prova.

Dirò bensì che quanto più i recipienti de' termometri sono di grosse pareti, tanto più lento sarà il finale spostamento ed in Francia costruendosi per lo più questi non con una soffiata, ma con pezzi di tubi cilindrici già tirati alla fornace come erano anche quelli dell'Autore, e perciò di pareti generalmente più grosse, deve l'effetto esser più lento, e meno notabile se quel pezzo fosse di vecchia data aggiunto al tubo non più riscaldato fino al punto della fusione, che al luogo dell' unione, e se prima d' introdurvi il mercurio non fu riscaldato in tutta la lunghezza almeno fino a diventar rovente se non molle. Altre cause concorrono eziandio ad alterarne il punto fisso quando se ne vuol ripetere lo sperimento, come sarebbe lo stesso gravitare dello strumento sul ghiaccio in cui si sperimenta, perchè col proprio peso schiaccia alquanto la bolla e ne diminuisce la capacità per cui il mercurio sale lungo il tubo. La stessa elasticità del vetro non mai perfettissima fa sì che indipendentemente da variazione di temperatura, col solo far oscillare la colonnetta del mercurio contenuta nel tubo, mediante piccole scosse dal sotto in su, rimane quella or più alta or più bassa; nè ciò farà maraviglia se si considera che l' estensione di ogni grado è di $\frac{1}{6480}$ in rapporto alla dilatazione apparente del mercurio nel recipiente, secondo Dulong e Petit, e supposto ogni grado diviso

in 100 parti, ciascuna delle quali potendosi ancora ad occhio suddividere, avremo sensibile non solo ma suddivisibile la 648000 parte di variazione nel volume, e perciò nella capacità del recipiente. Tralascio altre avvertenze, come sarebbe che il ghiaccio fondentesi che si adopera provenisse sempre da acqua pura; che tutto il tubo sin dove arriva il mercurio, si debba trovare in quello immerso, perchè se la temperatura esterna fosse superiore, influirebbe sulla dilatazione di quella porzione di colonna mercuriale rimasta fuori del bagno; oltre di che se fosse una miscella d'acqua e ghiaccio, non rimanendo costante la sua altezza sopra il recipiente del mercurio, non lo comprimerebbe sempre egualmente; e fuori della miscella lo spostamento apparirebbe in ogni caso sempre minore per la sottratta pressione del liquido incombente ec.

Del resto la spiegazione dello spostamento data da *Legrande e Despretz* coincide pienamente con la mia. „ Io diceva (*Giornale di Fisica di Pavia anno* 1822 *pag.* 279) se questo „ raffreddamento avesse luogo con somma lentezza, le molecole si potrebbero disporre secondo la propria attrazione „ di cristallizzazione; ma quando l'abbandono del calorico „ succede rapidamente e non uniformemente in tutta la massa „ del vetro, allora le molecole non possono che in parte ubbidire alle rispettive forze attraenti, rimanendo in uno stato „ di tensione contrario allo stato d'equilibrio. Succede un „ fatto analogo coll'acciajo, le molecole del quale per un „ freddo subitaneo non hanno tempo di disporsi secondo la „ natura loro, e ne risulta l'effetto della tempra, ec. „ Si sa che l'acciajo temperato ha un volume maggiore di quando ha perduto la tempera.

Despretz finisce col riferire l'esperienza di Pictet che una barra di ferro non ritorna alle primiere dimensioni scaldata e quindi nuovamente raffredata come prima; la qual esperienza aveva ancor io già citata (1): riporta inoltre un'espe-

(1) *Laplace e Lavoisier* scaldando ad un certo grado una verga metallica, quindi ricondotta alla temperatura primiera, viddero che rimaneva un poco più lunga di

rienza di Savart sullo solfo medesimo, il quale fuso e poscia nuovamente raffreddato rimaneva di un colore più oscuro, che perdeva col tempo riacquistando il suo bel color giallo. Avrebbe inoltre desiderato l' autore di sperimentare se lo spostamento avesse avuto luogo in un termometro col recipiente del mercurio in ferro invece di vetro: ma senza ricorrere a questo mezzo troppo difficile a conseguirsi, sarebbe bastato il pesare idrostaticamente un recipiente qualunque di ferro chiuso ermeticamente; lo che io già consigliai (Giornale di Fisica di Pavia anno 1822 pag. 277) pei recipienti in vetro, ed osservai che grossi e sensibilissimi Areometri di vetro col tempo diventavano specificamente più pesanti dell'acqua, ossia diminuivano di volume stando eguale la massa. Ho accennato in altro mio scritto che Prinsep aveva trovato sensibilmente diminuita la capacità di una storta di ferro, come riporta in una nota della sua *Memoria sulla valutazione delle alte temperature inserita nel T. XLI. Annales de Chim: et Phys.* Io però devo soggiungere che in questi ultimi giorni avendo immerso nell'acqua a o un areometro di Nicholson costruito in latta già da molt'anni, e fattolo in quella profondare fino alla metà del sottil gambo portante il bacinetto de' pesi additizzi; e quindi immerso nell' acqua bollente, e prestamente raffreddato, e novamente rimesso nell' istess'acqua ad eguale temperatura di o, mi diede indizio piuttosto di una diminuzione di volume, che non di un aumento. Feci uso nell' esperienza di acqua al grado della congelazione, come quello più facile a conservarsi costante, circondato di neve il recipiente, e colla temperatura stessa dell' ambiente prossima a quel grado; oltre di che dato anche che la temperatura di quell' acqua si fosse di qualche minima frazione di grado alterata (lo che non posso nel mio caso neppur supporre); da un' altra prova, la minima e dirò anche impercettibile differenza nella dilabilità dell'acqua prossima a quella temperatura, non avrebbe potuto punto alterare il ri-

---

prima; ma che per un urto dato alla verga si faceva scomparire questa differenza (*Annal. de Chimie. et Phys. T. LVI pag.* 267.)

sultato. Forse che la diversità di temperatura da me conosciuta all'aerometro metallico non fu sufficiente per manifestare il fenomeno; o forse meglio quella temperatura dell' acqua bollente ha contribuito a ravvicinare le parti della latta stata in origine distesa sotto il laminatojo e battuta a colpi di martello.

Il chiarissimo Sig. Dottor Fusinieri epilogando negli *Annali delle Scienze del Regno Lombardo Veneto Vol. VII. anno* 1837 *pag.* 294) le sopradette sperienze di Legrand (senza neppur far cenno delle mie) ha preso un abbaglio col fargli dire: *più che si riscalda un termometro, lasciato poscia raffreddare lentamente, e più ascende col tempo lo zero:* in questo caso la totale ascensione ha luogo immediatamente dopo il lento raffreddamento e non *col tempo*. Parlando poi delle altre sperienze di Despretz alla pag. 312 soggiunge: *Ma non si deono ascrivere soltanto al vetro quelle oscillazioni, si deono attribuire in parte anche allo stesso mercurio, il quale pure secondo la suddetta legge d' inerzia molecolare di non obbedire intieramente all' azione del calore dee o restringersi, o dilatarsi meno di prima al ritorno della stessa temperatura. Che tutta la oscillazione dello zero dei termometri a mercurio non debba essere ascritta al solo vetro, emerge anche da ciò che si tratta appunto di termometri a mercurio e non ad alcool.* Se si avesse ad attribuire in parte anche ai fluidi quell' inerzia che si riscontra ne' solidi, oltre che la fluidità stessa sembra opporsi a questa attribuzione, nel nostro caso il mercurio avrebbe dovuto subire nel termometro un movimento tutto in opposizione con quello prodotto dal cambiamento di volume e per conseguenza di capacità; nel primo doveva apparentemente far diminuire il volume del secondo. D' altronde perchè attribuire al solo mercurio e non all' alcool la stessa proprietà, se è comune anche ai fluidi? Io poi in quella mia Memoria (*Dell' incertezza nel determinare il punto del ghiaccio ecc. Giornale di Fisica di Pavia anno* 1822 *pag.* 273) aveva provato all' evidenza che nè il mercurio, nè l' alcool influivano per loro stessi nel fenomeno dello spostamento.

Il chiarissimo Sig. G. Libri (*Memoria sulle determinazione della scala nel termometro dell'Accademia del Cimento. Annal. de Chim. et Phys. T. XLV* 1830) aveva trovato che in alcuni termometri dell' antica Accademia del Cimento rimessi nel ghiaccio, lo spirito di vino in essi contenuto discendeva allo stesso o quasi allo stesso punto originario. Egli gentilmente mi aveva mostrato nel suo passaggio da Milano questi termometri, siccome molti altri ne aveva io veduti nel Museo di Firenze, e nell'Università di Bologna. Devo dunque premettere che i gradi di questi termometri già poco fra loro distanti non sono già tracciati sopra scale di legno, carta, o metallo come si fa adesso, ma vi sono divisi i gradi immediatamente sul tubo stesso termometrico con alcuni globetti di vetro, o smalto colorato fusivi sopra, ossia perline alternanti ogni cinque o dieci nere con una bianca, o viceversa per poterli più facilmente contare. Ora oltre all'essere questa divisione molto grossolana di modo che lo spazio occupato da ogni globetto equivaleva in alcuni di que' termometri a poco meno dell'intervallo fra un grado e l'altro, non si sarebbe potuto per conseguenza ben precisare il punto di ciascun grado dove incominciava e dove finiva: per quanto poi fosse stata grande l'abilità dell'artefice, ossia del *gonfia*, che certo era grandissima, non era possibile che potesse sempre fissare alla lucerna i globetti equidistanti, nè potenvasi più correggere un errore commesso. Non era poi possibile di potersi eseguire questa graduazione rimanendo lo spirito nel bulbo e lungo il tubo, perchè come ciascuno può immaginarsi, dovendosi fondere quel globetto di vetro e saldarsi sulla superficie del tubo, bisognava che il tubo stesso participasse in que' punti ad una temperatura altissima di vetro rovente, alla quale sicuramente non avrebbe potuto reggere il liquido contenuto e ne veniva di necessità la rottura del tubo medesimo. Ora nessun mezzo rimaneva, a mio avviso, per segnarvi e per eseguire la scala se non che dopo riempito il termometro, e fissati in qualunque modo i punti principali della divisione, votare nuovamente lo strumento,

e perfettamente ascingarlo internamente (operazione lunga e difficile in tubi così capillari); e quindi applicarvi al dardo della fiamma que' globetti ai punti prima marcati; e poscia novamente introdurvi lo spirito e in quella quantità che dovesse corrispondere al grado della temperatura indicata, chiudendosi infine ermeticamente. Ora facilmente si scorge che oltre a tutte le altre cause già da me assegnate che potevano concorrere a diminuire ne' termometri a spirito la già piccola differenza del loro spostamento in confronto a quelli a mercurio, la costruzione stessa della scala in quelli dell'Accademia del Cimento vi doveva maggiormente contribuire.

Ma che giova produrre nuovi argomenti e nuove sperienze riguardo allo spostamento, se il fenomeno del cambiamento di volume nel vetro, come anche nell' acciajo per effetto della tempera o del lento raffreddamento era già stato osservato in Italia, e pubblicato già da più di un secolo e mezzo?

Magisterii naturae et artis. De Lanis. Brixiae 1686. *Tomus secundus. De motu rarefactionis et condensationis liber octavus: pag.* 344.

" § LVII. Vitrum, si postquam igne incanduit, aquae immergatur, majus spatium occupat, quam antea ignitionem; sic eadem virga, quae dum candesceret igne elungabatur, et lente refrigerata pristinae longitudini restituebatur, si post ignitionem subito frigore afficeretur per immersionem in aquam aut alium liquorem, non recuperabit pristinam longitudinem, sed notabiliter longior remanebit. Narrat etiam Geminianus Montanarius, guttam seu globulum solidum ex vitro prius temperatum, id est post ignitionem subito aquae immersum, et deinde ponderatum tum in aere, tum in aqua, deprehensum esse habere molem aequalem granis ejusdem aquae 47 $\frac{1}{10}$. Deinde vero, cum ipsum vitrum rursus candefactum sponte ac sensim refrigescere permisisset, bilance appensum nihil prioris ponderis in aere ammisisse cognovit, at vero in aqua illud ponderando, animadvertit ejus molem fuisse imminutam, ita ut aequaret grana ipsius aquae 46 4/10, ac proinde moles ista ad prioem ejusdem vitri molem se haberet ut 46 ad 47. "

„ §. LVIII. Alia minore guttula (ut refert idem Auctor) in aere et in aqua examinata, tum ante, tum post ammissam priorem temperaturam (quam ammisit mediante ignitione longiore, scilicet semihoraria) adeo imminuta est, ut moles ad molem esset ut 100 ad 96 $\frac{1}{2}$; cum prioris guttae, moles fuerit ut 100 ad 98 $\frac{1}{2}$. Observavit enim etiam in aliis solidis globulis, quo diutius candescunt in igne ita tamen ut non patiantur fusionem, eo magis molem eorum imminui. *Forse* (subit auctor) *perchè meglio vanno poco a poco condensandosi, ed unendosi a luogo loro le parti, che forzatamente stavano distese e rare, perchè di poi in certo spazio di tempo, come di due ore incirca, non s' addensano più, se non si fondono in modo che le gallozzole di dentro si diminuiscano* (1). „

„ § LIX. Idem auctor diversa adducit experimenta a se ipso habita, quibus ostendit duritiem chalybis majorem duritie ferri non provenire ex eo quod ferrum densius evadat mediante temperatura, ut plurimi judicant, siquidem, ut ipse asserit (quod etiam verissimum est) ferrum temperatum levius esse in ispecie, adeoque minus densum, quam ferrum simplex.

Primo, inquit ille, frustulum chalybis temperatum perfecte, seu ut ajunt *a tutta tempra*, exhibuit pondus proportionaliter ad aequalem molem aquae, ut 7716 ad 1000. illud idem frustulum distemperatum fuit ad ipsam aquam ut 7791 ad 1000.

Secundo. Idem frustulum exiguo calore rursus temperatum fuit in dicta ratione ut 7779 ad 1000 ec. ec.

„ Liber undecimus. De adhaerentia partium ad invicem in eodem corpore, et de resistentia discontinuationis. Cap. I. pag. 487.

§. VIII. Dum ferrum ignitum et consequenter etiam dilatatum et extensum ad majorem molem, extinguitur in aqua,

---

(1) Ne abbiamo un esempio nelle così dette Lagrime bataviche.

licet iterum condensetur, et coarctetur fere ad priorem molem (tantillum enim manet dilatatum) partium, tamen nexus et mutua adhaerentia, qua frixioni resistit, plurimum minuitur, ut patet ex eo, quod frangibile evadit. Quod si in igne rursus coquatur et sensim per se ipsum frigescat, priorem partium consistentiam, ductilitatem, et firmiorem nexum recuperat, et simul eamdem prorsus molem, quam antea obtinebat.,,

SULL' ERIGERON SICULUM

DI LINNEO

JASONIA SICULA

DE-CAND. PRODR.

MEMORIA

DEL PROFESSORE CAVALIER GAETANO SAVI

Ricevuta adì 25 Novembre 1838.

Or son quarant'anni ch' io parlai di questa pianta nella *Flora Pisana* Tom. 2. pag. 281, e la chiamai *Solidago pratensis.* Mi parve subito in sul principio che ella dovesse essere l' *Erigeron siculum* di Linneo, e me lo confermava la mancanza del raggio indicata da Linneo stesso nella diagnosi di questa specie (Spec. Plantar. T. 2. pag. 1210); ma da un altro lato io non ci trovava l' invoglio superante il fiore in altezza, come gli è attribuito dalla frase dello *Species*; e la seguente Sinonimia appostavi da Linneo serviva piuttosto a confondermi che a dileguare i miei dubbj.

Conyza sicula annua, foliis atro-virentibus, caule rubente. Bocc. sic. pag. 62 tab. 32; fig. 4. Morison Hist. 3; p. 115. Sect. 7; tab. 20. fig. 28.

Conyzae Species foliis Virgae aureae. I. Bauh. Hist. 2, p. 1089.

La figura di Boccone, per vero dire, non ci disconverrebbe, anzi ella mostra l' abito della pianta, e le foglie vi son ben rappresentate, ma in quanto ai fiori, tutti quei filamenti che ci si vedono mi lasciavan dubbioso se dovevo prenderli per squame degli antodj, o per pappi; nè la descrizione datane dal Boccone serviva ad illuminarmi, perchè da essa altro non si rileva se non che i fiori son color d'oro, e meno compatti

di quelli della *Conyza minor vera*, cioè dell' *Erigeron graveolens*, il che non è vero, perchè anzi lo sono molto di più. La figura del Morison è una copia di quella del Boccone, e copia pure ne è la descrizione. In quanto poi alla citazione di Giovanni Bauhino pare che la vi sia messa espressamente per confondere. La figura mostra foglie grandi, lanceolate, e dalla descrizione si sente che i fiori son muniti di raggio.

Tutti questi riflessi m' impedirono di risolvermi a tenerla per l' *Erigeron Siculum*, e trovandoci qualche analogia coll'*Erigeron graveolens*, che nella Flora Francese di Lamark vedeva collocato nel genere *Solidago*, in questo genere pure io la collocai e la chiamai *Solidago pratensis*. Ell' è una pianta comunissima ne' prati intorno a Pisa, ove trovasi fiorita nel Settembre e nell' Ottobre.

In processo di tempo giunsi a conoscere che per consenso unanime de' Botanici ell' era tenuta per l' *Erigeron Siculum* di Linneo, ed ebbi la soddisfazione di vedere che la mia idea di collocarla fralle *Solidagini* non era punto strana, giacchè anche De-Candolle nella Flora Francese T. 4. p. 140 (1805) confessò che anzi che agli *Erigeron* alle *Solidago* era meglio assocciarla.

Fu poi riposta fralle *Conyza*, e dopo che si è portato il più acuto e dettagliato esame sugli organi florali delle composte, e se n' è voluta regolare la classazione sulle differenze loro le più minute, il che (sia detto in passando) non pare che abbia favoriti i progressi della Scienza: la pianta di cui si tratta, fu staccata dall' *Erigeron*, dalla *Conyza*, dalla *Solidago*, situata in differente Sotto-Tribù in un Genere creato dal Cassini, adottato da Lessing e chiamato *Jasonia*, del qual genere ecco i caratteri, come da De-Candolle sono esposti nel Prodromo.

Gen. JASONIA. *Capitulum multiflorum heterogamum, floribus radii ligulatis foemineis uniserialibus, aut homogamum floribus omnibus tubulosis quinquedentatis hermaphroditis.*

Receptaculum subalveolatum planum. Involucrum imbricatum disco circa aequale, squamis linearibus acutis: Antherae basi setis caudatae. Achaenium villosum oblongo-cylindraceum basi attenuatum. Pappus biserialis utrinque setis filiformibus barbellatis, exterioribus brevissimis, interioribus corollam fere aequantibus.

Sect. EUJASONIA. Capitula radiata aut subdiscoidea. Achaenia teretiuscula undique villosa. Pappus interior multi (10-20) setus.

Jasonia sicula *herbacea erecta subvillosa, radice gracili, foliis radicalibus lanceolatis dentatis, caulinis linearibus basi auriculata semiamplexicaulibus integerrimis, ramis parce foliosis.*

Var. *α discoidea* floribus marginalibus subtubulosis, aut in ligulam involucro breviorem fissis.

Jasonia discoidea. Cassini. Dict. Scienc. Natur. *Conyza sicula annua: lutea* etc. Bocc. Sic. pag. 62. tab. 32. fig. 8.

Il Cassini all' articolo *Jasonia discoidea* nel Dizionario di Scienze naturali, riferisce esattamente tutti i caratteri generici che in essa si riscontrano, ma non menziona i caratteri specifici. Questi per altro gli aveva già esposti nella stessa Opera, all' articolo *Dimorphanthes sicula*, ove si vede che descrive accuratamente l' *Erigeron Siculum*, ma ciò facendo non pose mente agli organi dai quali si desumono i caratteri generici, poichè non può questa pianta porsi nel genere *Dimorphanthes* cui sono assegnati gli ovarj compressi e il pappo uniseriale. Chiaro pertanto apparisce che il Cassini quando scriveva l'articolo *Jasonia discoidea*, aveva scordato quello che aveva scritto all' articolo *Dimorphanthes sicula*, oblivione che non sorprende, considerando la farragine e il caos di cose e di nomi fra i quali doveva trovarsi avviluppato quando scriveva l' *abbozzo della Sinanterologia.*

Due altre citazioni sono nel Prodromo di De-Candolle, e sono le appresso.

Conyza sicula. Poiret Enc. Bot. Suppl. che in nessun modo però conviene alla pianta di cui si tratta, come facilmente deducesi dalla seguente frase specifica che nella citata opera vi è apposta, cioè *Conyza pumila foliis suboppositis filiformibus acutis glabris flore solitario*, e dalla ivi riportata figura del Boccone Mus. pag. 145. tav. 109. *Helychriso Sylvestris similis tota viridis*, figura che per i capolini solitarj sopra lunghi e nudi peduncoli somiglia molto la *Conyza saxatilis*. Bisogna per tanto togliere dalla Sinonimia dell' *Jasonia sicula*, la *Conyza sicula* di Poiret.

L' altra citazione che si trova nel Prodromo è quella dell' *Inula chrysocomoides* Lamark. Enciclopcd. *Inula foliis semiamplexicaulibus, linearibus margine revolutis perpaucis, pedunculis unifloris*, e questa ci conviene, malgrado che sia una pianta lingulata, sapendosi che l'*Erigeron siculum* varia dal discoideo al raggiato, ma la figura che vi si cita dall' Illustr. des Genr. Pl. 680 n.° 3, non ci ha la minima somiglianza, e non serve che ad imbrogliare, onde bisogna sopprimere la citazione di questa figura, e riportare l' *Inula chrysocomoides* alla varietà che nello stesso Prodromo è chiamata *Jasonia sicula* 3 *radiata*.

Ecco pertanto che la nostra pianta ha figurato con tutti gli appresso diversi nomi. 1. *Erigeron siculum*. 2. *Solidago pratensis*. 3. *Conyza sicula*. 4. *Dimorphanthes sicula*. 5. *Jasonia discoidea*. 6. *Jasonia sicula*, cui bisogna aggiungere: 7. *Tubilium siculum* che così fu chiamata da Fischer e Mayer nel catalogo del Giardino di Pietroburgo per l'anno 1835, quantunque al genere *Tubilium* dessa non possa appartenere, giacchè in questo, secondo Lessing, la serie esterna del pappo debb' essere coroniforme.

Ora per altro pare, che generalmente e definitivamente sarà adottato il nome di *Jasonia sicula*.

Esposta così la storia delle peripezie cui è andata soggetta la nomenclatura dell'*Erigeron siculum*, conviene adesso far qualche osservazione su i caratteri stati impiegati nelle frasi per indicarlo, il che parmi che meglio non possa farsi che

riportando le frasi stesse che dai diversi Autori sono state adoprate.

Erigeron siculum *calycinis squamis inferioribus laxis florem superantibus* Lin. Spec. Plant.

Erigeron siculum *squamis calycinis inferioribus laxis florem superantibus, pedunculis foliosis.* Murr. Syst. Veget.

Solidago pratensis *caule corymboso, foliis lanceolatis margine revolutis, pedunculis foliosis, radio nullo.* Savi Flor. Pis.

Conyza sicula *foliis lineari-lanceolatis scabris subintegerrimis margine revolutis, caule paniculato, pedunculis unifloris foliosis; squamis calycinis inferioribus laxis.* Willd. Spec. Plant. Savi Botan. Etrusc. Poiret Enc. Bot. (*sub Erig. siculo*). Decand. Synops. *Erigeron* siculum *squamis calycinis inferioribus laxis florem superantibus pedunculis foliosis, foliis lineari-lanceolatis scabris subdentatis margine revolutis.* Pers. Synops.

Conyza sicula *caule herbaceo paniculato, foliis lineari-lanceolatis scabriusculis subintegerrimis margine revolutis, pedunculis unifloris foliosis involucris, squamis inferioribus laxis.* Loisel. Fl. Gall.

Conyza sicula *foliis linearibus margine revolutis scabris subintegerrimis, caule ramoso, ramis unifloris patentibus, squamis anthodii inferioribus laxis.* Spreng. Syst. Veget.

Conyza sicula *caule erecto laevi ramoso, foliis inferioribus lanceolatis, superioribus linearibus integerrimis margine revolutis, capitulis paniculatis.* Duby Botanic. Gallic.

Linneo, e Murray il quale quasi altro non fece che copiar Linneo, assegnarono all'*Erigeron siculum* le squame inferiori dell' invoglio superanti in lunghezza la calatide, il che, come di sopra ho detto, non è vero, e non è neppur vero che tali squame siano lasse, come in tutte le surriferite frasi, due sole eccettuate, è asserito: ma c' è una circostanza che può aver dato luogo a giudicar lasse le squame inferiori dell' invoglio, ed è che nella maturazione de' frutti, quando la calatide comincia ad aprirsi, le foglie superiori del rametto, piccolissime, e simili a quelle dell' invoglio, e talvolta a quello

affatto contigue, si piegano in giù, e a prima vista sembra che siano squame involucrali inferiori.

De-Candolle nel Prodromo, e Duby hanno saviamente omesso nelle loro frasi questo carattere equivoco, ed aggiungendo alla frase del primo che le *foglie ramee hanno i margini reflessi*, alla frase del secondo che le stesse *foglie sono orecchiute alla base e semiamplessicauli*, ed indicando che le foglie cauline son lanceolate, si avrà la miglior frase che alla pianta in questione possa convenire.

Jasonia sicula *herbacea erecta subrillosa paniculata, foliis caulinis lanceolatis, rameis linearibus margine revolutis, basi auriculata semiamplexicaulibus.*

Malgrado che questa Specie sia stata tanto discussa, pure non esiste finora della medesima, almeno a mia notizia, una figura tale che serva a farne acquistar facilmente un' idea chiara, ed io ho cercato di supplire a questo difetto colla tavola qui unita, nella quale si rappresenta al

N.° 1 la parte superiore d'un individuo della *Jasonia sicula*, di grandezza naturale con i fiori disposti a pannocchio su i rametti uniflori: le foglie cauline lanceolate *a*, *a*, *a*: le ramee lineari con i margini reflessi, auriculato-semiamplessicauli alla base *b*, *b*, *b*.

N.° 2. Il ricettacolo subalveolato in piena maturità, nel quale stato è leggermente convesso, colle squame dell'invoglio deflesso e sul rametto che lo regge, alcune foglie ramee, il tutto moltissimo ingrandito.

N.° 3. Un fiore femminino periferiale.

a. Corolla fessa longitudinalmente quasi fino alla base del lato interno, non distesa in linguetta, ma tubulato-infundibuliforme, tridentato nel lembo, col nervo marginale decurrente.

b. Lo stilo con i rami stimmatici armati in giù.

c. L' Achena bislungo-cilindrica assottigliata alla base, pelosa, con alcune glandole globose pedicellate nella parte superiore.

d Serie esterna del pappo di palee lineari molto corte, lineari-lanceolate acute.

e. Serie interna del pappo di setole filiformi, barbellate, lunghe tre quarti e più della corolla; il tutto moltissimo ingrandito.

N.° 4. Una delle cinque antere del tubo anterifero d' un fiore ermafrodito in cui *a* l' appendice terminale lanceolato-acuminata. *b*. *b*. le appendici basilari o code: il tutto moltissimo ingrandito.

Soc. Ital. T.° X. P. II. pag. 102.

F. 1.

b

b

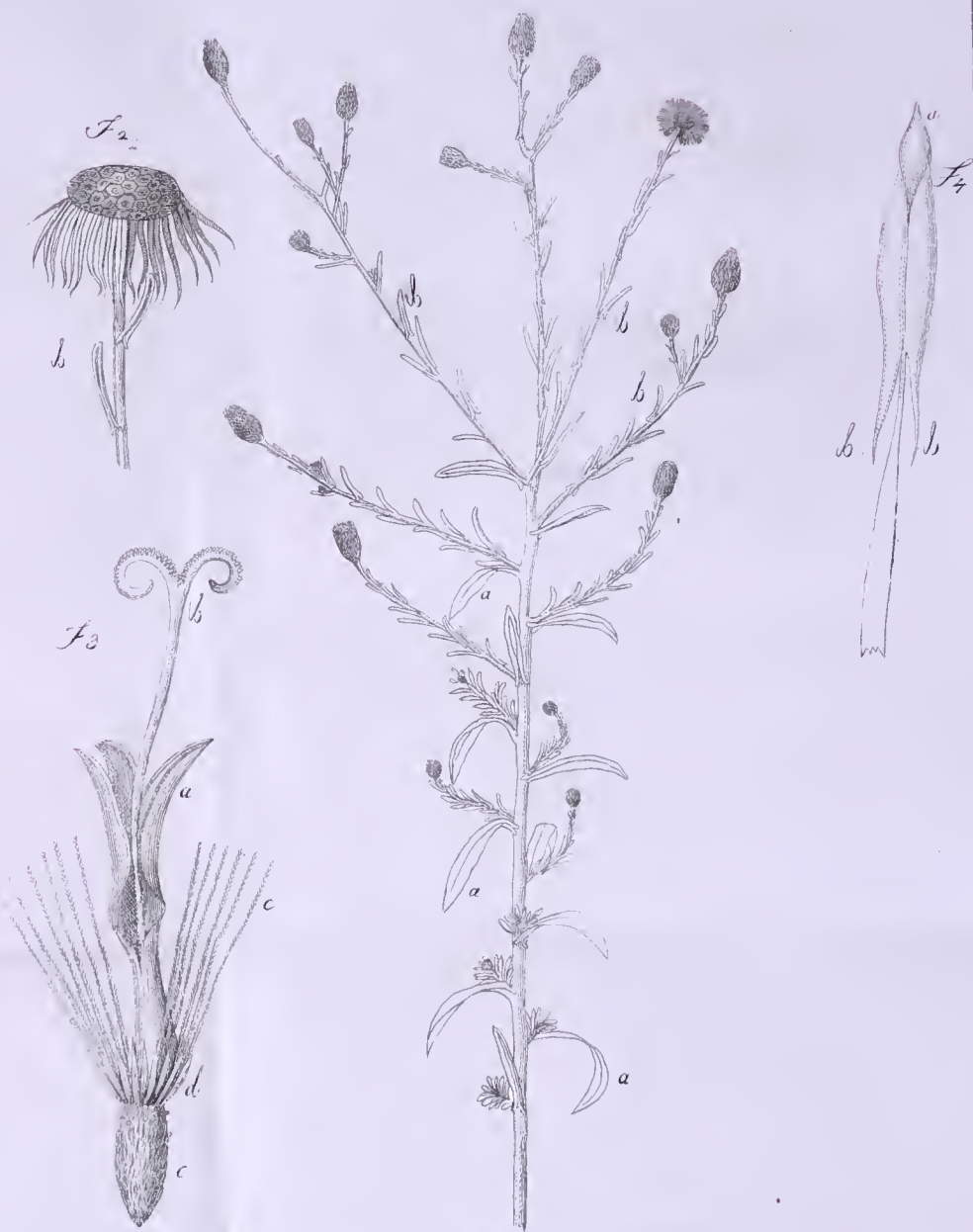
a

F. 4.

F. 1.

F. 2.

F. 3.

F. 4.

INTORNO AD UNA SPEZIE DI FALENA

RINVENUTA IN LONIGO NEL MDCCCXXX.

CONSIDERAZIONI

DEL DOTTOR FRANCESCO ORAZIO SCORTEGAGNA

SOCIO ORDINARIO DELLA CESAREA R. ACCADEMIA

DI SCIENZE, LETTERE, ED ARTI DI PADOVA

NONCHÈ DI ALTRE ILLUSTRI SOCIETÀ

PRESENTATA DAL SOCIO

SIGNOR PROFESSOR GIOVANNI SANTINI

APPROVATA DAL SOCIO

MONSIGNOR CAMILLO RANZANI

Ricevuta adì 10 *Luglio* 1838.

§. I.

1. Fu creduto da molti, che la foglia del gelso fosse dall'Autore Provvidentissimo dell'Universo conceduta al mantenimento de' Bachi da seta esclusivamente a qualunque altra spezie di Bachi ; ma questa opinione non regge ad un fatto da me osservato come egli si fu, che anzi esser falsa in se stessa io spero di poter dimostrare. In fatti se i Bachi da seta hanno assoluto bisogno di cibarsi della foglia di gelsi, nè altro cibo fuori di questo è ad essi proprio (giacchè fino ad ora non è noto qual mai altro vegetabile siasi da zelanti coltivatori rinvenuto adattato per ridurre a termine la metamorfosi conducente al perfetto stato di essi) non è perciò che qualche altra spezie d'insetti non abbia in comune col baco da seta la stessa foglia. Se questa proposizione sia per essere ammissibile o non lo sia, spero che risulterà da ciò che passo ad esporre.

2. Nel giorno primo di Giugno del 1830 trovandomi presente alla somministrazione della foglia de' gelsi pel pasto a'bachi da seta, mi accorsi essersi posato sulla mia giubba un picciolo

bruco che a prima giunta parvemi simile al baco da seta, ma guardato bene, vidi che differiva nel colorito ch' era bianchiccio tendente al rossigno, e differiva ancor più a cagione della sua piccolezza in confronto de' miei bachi li quali in quel dì erano nel massimo ingrandimento di corpo, essendochè si accostavano alla maturità. Egli fu perciò che mi invogliai di prenderlo ad esame.

3. La forma di esso era quale si vede delineata alla fig. I. Di fatto avea dieci piedi, cioè sei pettorali, due caudali, e due sotto caudali. La sua mossa eseguivasi a ondate come fanno le sanguisughe, per lo che fui d'avviso di riferirlo a quella divisione delle *Falene* che vengono dette *Geometre.*

4. Allora pensai di porlo in un vaso di cristallo, la cui superiore apertura fu da me chiusa con invoglio di carta da molti forellini traforata, affinchè il bruco non potesse sottrarsi alle mie osservazioni ed avesse a godere il benefizio dell'aria vitale. E siccome l' averlo rinvenuto là dove si somministrava la foglia pei bachi, fece in me nascere il sospetto, che della foglia stessa si andasse cibando, così fui indotto a porre nell'alberello alcune foglie di gelso unitamente però a diverse erbe di prato, niuna delle quali, malgrado della maggior diligenza adoperata, si potè conoscere se esso avesse rosicchiata, ma salito invece sopra le foglie di gelso se ne cibò. Pertanto avvisai di rinnovargli consecutivamente li pasti due volte almeno per giorno colle foglie dei gelsi, e di queste secondo il proprio bisogno mangiava ogni giorno per satollarsi·

5. Ogni giorno pur anco deponeva le feccie le quali erano conformate a guisa di quelle de' bachi da seta, ad eccezione, che erano queste in confronto di quelle più piccole proporzionatamente alla piccolezza del bruco. Tutte le funzioni corporee furono regolarmente eseguite fino al giorno 11. Giugno, giorno in cui nulla mangiò, e si collocò a canto del fondo del vase formante angolo colla circonferenza e là immobile se ne rimase.

Il giorno 12 di detto mese si vide raccorciato in lunghezza ma cresciuto alcun poco di grossezza.

Il 13 era divenuto di una terza parte più piccolo in lunghezza e proporzionatamente più grosso.

Il 14 si tramutò in crisalide, spogliato essendosi della cute che lo ricopriva nello stato di bruco.

6. Questa crisalide nella parte anteriore cioè dalla metà sino al capo ch' è quanto il dire, dalla metà sino alla più grossa estremità era adornata di colore verde-porro bellissimo, nella parte inferiore poi, cioè dalla metà sino alla estremità acuminata apparve di colore castagno. Nel finire del giorno anche il bellissimo colore verde-porro si tramutò in verde carico e poi in colore di castagno oscuro. In tale stato si rimase sino al giorno primo di Luglio susseguente, giorno in cui si svolse la Falena: ed eccone i caratteri specifici.

F. *pettiniccornuta due palpi visibili, ale sottorotondate, fimbriate argenteo-bigie, con linea ferruginosa ambiente uno spazietto triangolare nella parte superiore; ed alla parte inferiore contrassegnate da macchia subtriangolare ferruginea in sito corrispondente alla impressione superiore; le ale stesse guarnite da due righe nerastre a ghirigoro al di sopra, e al di sotto da macchie fosche, il corpo cinereo fasciato con otto striscie nereggianti, lingua spirale.*

§. II.

7. Conviene por mente nella distribuzione degl' insetti a qual posto debba collocarsi questa Falena; perciò eseguire a preferenza di ogni altro si scieglie il sistema del Sig. Lamarck. Però in primo luogo si osserva che il bruco ha dieci piedi, cammina geometricamente, cioè perticando il suolo in quella guisa con cui muovonsi le mignatte; in secondo luogo si osserva che le ale inferiori della nata Falena sono più piccole delle superiori, che però dee riporsi tra le *Falenidi* nel novero dei *Lepidotteri notturni*, e tra questi nella prima divisione cioè a quella delle *Falene Geometre* siccome di sopra si è accennato; si osserva finalmente che questa Falena ha le antenne

setacee, due palpi, lingua spirale, sicchè considerando che sempre ha continuato a pascersi delle foglie del gelso, nella contingenza di dover darle un nuovo nome specifico sembrami che potrebbesi denominare *Falena del Gelso* (Phalæna moris, *Nachtfalter des maulbeerbaum*).

8. Non nego per altro, che questa per avventura non possa essere spettante a quel novero di Falene che di ogni sorta di erbe si pascono e che chiamansi *omnivore*; ma se delle foglie del gelso si nutre esclusivamente, non impropria mi rassembra la presente denominazione. Vi avrà forse alcuno che mi riprenderà, perchè affine di distinguere questa specie di bruco abbia io adoperata la medesima dizione di cui si servì il Linneo riferita da Gmelin alla pagina 2413. Ed in vero negare non posso che la cosa non sia in questi termini, ed accordar debbo altresì, che qualora si lasci sussistere la denominazione Linneana, potrebbe nascere confusione tra queste due spezie di Falene. Che però a togliere ogni ambiguità, mi è convenevole far conoscere avermi prevenuto il soprallodato Sig. Lamarck come si può vedere nel Tomo III, a pag. 563 della storia Naturale degli Animali invertebrati: poichè potrà ogni uno rilevare che il baco da seta fu da esso chiamato *Bombice* del *gelso*: Bombix mori (*seidenwurm*). Quindi equivoco non può esservi applicando a questa nuova spezie il nome di *Falena* del *gelso*: Phalæna mori (*Nachtfalter des maulbeerbaum*).

9. Esaminato avendo varie opere di accreditati Entomologi rinvenni avere la nostra Falena rassomiglianza colla *Falena Turcaria* di Fabricio, ma differisce da questa per la mancanza della lunula bianca delle ale, che per verità si riscontra esservi impressa nella *Turcaria*. Non appartiene dunque la nostra alla detta spezie.

10. Questa Falena nata, come dissi, il giorno primo di Luglio tenuta in serbo per entro all' alberello medesimo fu da me nel terzo giorno di Luglio rinvenuta morta, trascorsi essendo tre giorni inclusivi dalla sua nascita. Vivente tramandò

degli escrementi scorrevoli rossastri nei quali, guardati alla lente, non potei scorgere verun indizio di uova; perlocchè puossi inferire, che non appartenesse a sesso femminile. Oltre a tale prova negativa ve ne sono altre che obbligano a ritenere che fosse maschio: primo perchè il ventre ossia l'addome è poco rigonfio; secondo perchè è dotato di ale intierissime e bene conformate, mentre le femmine di tal genere hanno soltanto un cominciamento di ale, proprietà comune alle Farfalle provvenienti dalle Geometre.

11. Non essendosi potuto rinvenire altro individuo fuori di questo non posso alle già dette cose aggiungerne verun'altra per lo che rimaner debbo silenzioso. Peraltro in quelle regioni del globo, ove abiti in copia questa spezie di Falene, potranno gli Entomologi studiarne le proprietà e renderle note a comune istruzione.

§. III.

12. Rimane pertanto a conchiudere intorno a questa Falena, che essendosi cibata della foglia del gelso, ch' essendo vissuta mediante questo alimento, e che avendo compiuta l'intiera e regolare metamorfosi a cui la natura la destinò, il baco da seta non è il solo insetto che possa nudrirsi di questa foglia; e quindi ne segue che una spezie di pianta può essere atta ad alimentare più di una spezie di insetti restando con ciò dimostrata falsa la idea di quelli che credono, che ogni pianta abbia una sola spezie di bruco a poter nudrire. Un siffatto particolare si può leggere nel dizionario di Storia Naturale pubblicato a Parigi e ristampato in Venezia nel 1804 all' articolo *Chenille*, dove così si esprime " *on a cru et l' on croit encore assez ordinairement que chaque plante a son espèce particuliere de chenilles qui Elle nourit. On pourroit plutôt douter s' il peut y avoir une seule espèce de chenille à qui la nature n' ait assigné pour aliment qu' une seule espéce de plante ou une seule substance. Si cela existe, ce n' est sans doute que dans ces espèces que leur petitesse dèrobe entierement*

a nos yeux et leur permet de vivre partout ou elles se trouvent. „

13. La nostra Falena non essendo tanto piccola per nascondersi alla nostra vista, servirebbe vie meglio per risolvere il quesito al quale si riferisce la ricerca fatta nel testè riportato paragrafo di quel Dizionario; che fu quella di riconoscere se una tale spezie di bruco si pasca esclusivamente delle foglie di gelso, ovvero pur' anco di altre erbe. A tale scopo dal 1830 in poi non mancai di farne assidua ricerca, nè mi fu mai possibile rinvenire alcun altro individuo consimile. Sicchè non essendo in mio potere il dare una sufficiente soluzione del quesito in discorso, debbo a mio malgrado rimetterla alle indagini degli Entomologi abitatori di quelle contrade, o a meglio dire di quelle regioni, ove soggiorni una tale spezie di insetto, poichè allettato forse da temperatura più propria allo sviluppamento suo, egli è molto probabile il credere, che in quei luoghi vi faccia stabile dimora. Perciò colà medianti osservazioni continuate, oltre alle da me fatte investigazioni, potranno essi Entomologi conoscerne ad un tempo le abitudini ed a noi trasmetterle aggiungendovi le buone o cattive qualità della medesima spezie.

§. IV.

Spiegazione delle Figure.

14. Fig. I. Il bruco nella naturale piccolezza.

Fig. II. Il bruco medesimo ingrandito alla lente, in cui osservasi sotto le lettere.

a. a. Due piccole tuberosità nella fronte.

b. b. Due tentoni uncinati laterali alla bocca delle quali parti si darà la descrizione nella fig. III.

c. Sommità del capo dal qual punto discendono due peli che vanno a terminare ciascuno all' angolo rispettivo della bocca.

g. g. g. Li tre piedi squamosi del destro lato corrispondenti ad altri tre dell' opposto lato.

i, i. Li due piedi membranosi, dei quali il primo caudale, il secondo sotto caudale, simili agli altri due nel lato sinistro.

In questa figura vengono ad osservarsi li nove forellini o stimate inservienti alla respirazione, simili agli altri nove dell'opposto lato, che però risultano in tutto n.° 18.

h. Bitorzolino rugoso a cui ne corrisponde un altro al lato opposto. Sì l' uno che l' altro situato sopra la quinta fascia cominciando a numerare dal capo dell'insetto che al pari degli altri bruchi possede N.° 12 di dette fascie.

Fig. III. La testa del medesimo insetto ingrandita al microscopio.

In questa figura ad evidenza si oserva in

a. a. Due prominenze fatte a guisa di corna.

b. b. Li due tentoni l' uno di qua l'altro di là della bocca.

c. Apice ossia sommità della fronte fra le due prominenze suddette, la quale sommità nello stato di Farfalla costituisce l' elmo. Dalla sommità stessa li due peli o le due piumicelle, che dire si vogliano discendono in basso per terminare al rispettivo angolo della bocca. Queste piumicelle continuate superiormente si producono sino alle due prominenze *a*, *a*, le quali nello stato di farfalla svolgonsi per formare le antenne.

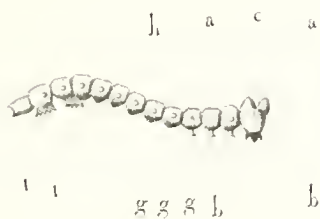
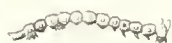
d. d. La bocca aperta, le cui mascelle sono munite di seghe cartilaginose.

e. e. Sei occhietti ad ambi i lati della testa. Detti occhietti sono disposti circolarmente, cinque dei quali occupano tre quarte parti di circolo, il sesto situato nel centro è maggiore degli altri, li quali diminuiscono notabilmente cosicchè li due ultimi sono piccolissimi. Tutti sei hanno forma sferica e colore nerissimo, sostanza cornea.

f. Finimento del capo là dove comincia il collo ossia per meglio dire il corpo del bruco.

Fig. IV. La Falena del bruco superiormente descritta.

N. B. Si avvertono gli Entomologi che bramassero esaminare l'individuo testè descritto, che lo ritroveranno collocato nell' I. R. Museo di Storia Naturale di questa Università di Padova, posciachè in veruna collezione di Verona, di Bassano, di Venezia, e precedentemente di Padova medesima non mi venne fatto rinvenire alcun Archetipo di questa spezie.

a c a
b b
e e
d f d

DELLA DISTRIBUZIONE DELL' ELETTRICO

NE' CORPI CONDUTTORI

MEMORIA

DEL DOTTOR GIUSEPPE BELLI

PROFESSORE DI FISICA

NELL' I. R. LICEO DI PORTA NUOVA IN MILANO

Ricevuta adì 28 *Ottobre* 1839.

1. La sperienza ha fatto conoscere già da molto tempo che l' Elettricità, sia positiva sia negativa, si distribuisce nei corpi conduttori unicamente alla superficie. Ed è noto dal calcolo, pure da molto tempo, che per riguardo alle sfere e a diversi altri corpi la distribuzione dee necessariamente aver luogo a questo modo, quando le parti del fluido elettrico si respingano fra se, in ragione inversa dei quadrati delle distanze, e vengano attratte secondo la legge medesima dalla materia pesante de' corpi. Dal che si ha una assai valida ragione per credere che il fluido elettrico sia effettivamente soggetto ad una ripulsione e ad una attrazione dotate di questa legge. Convinto dell'importanza di una siffatta conclusione, tanto più che da molti distinti fisici non si reputano affatto sicure le altre ragioni che si addussero a di lei sostegno (1), ho cercato di darne una dimostrazione elementare e rigorosa, mediante la quale anche coloro che non sono molto inoltrati nelle matematiche, si possano persuadere che le *azioni cui è soggetto il fluido elettrico, considerate da molecola a molecola, seguono la ragione inversa de' quadrati delle distanze*. Ed è questo l' oggetto della prima parte della presente Memoria.

---

(1) Volta *Collezione delle Opere*, T. I. parte 2. p. 71. Kämtz, citato nel Gehlers *Physikalisches Wörterbuch neu bearbeitet*, Leipzig 1825 e seg., art. *Elektrometrie*, p. 698, ec.

A questa dimostrazione, la quale a dire il vero nulla arreca di nuovo alla scienza, ma solamente avvalora ciò che era già conosciuto, aggiungo nella seconda parte della Memoria alcune altre cose le quali non credo ancora trovate da altri. Era ben noto fino dai tempi di Priestley e di Cavendish, che quando le azioni elettriche seguano la ragione inversa de' quadrati delle distanze, dee l'Elettrico ne' corpi sferici distribuirsi unicamente alla superficie (1). E Poisson estese la dimostrazione alle elissoidi e ai sistemi di due sfere, sì toccandosi queste ultime come trovandosi a qualche distanza (2). Ma nessuno, a quello che io sappia, l'aveva estesa a tutti i conduttori in genere (3). Ed è appunto questo quello che io ho procurato di fare nella detta seconda parte della presente Memoria (4).

---

(1) Priestley, *Storia dell' Elettricità* tradotta in francese, Parigi 1771, T. III. p. 463. Cavendish, *Phil. Trans.* 1771. p. 593, 594. e 595.

(2) *Memorie dell' Istituto di Francia, Classe delle Scienze matematiche e fisiche*, anno 1811, Parte I. p. 1 e seg. Parte II. p. 163, e seg.

(3) Nelle Memorie dell'Accademia di Parigi pel 1786, p. 76. si trova su ciò un tentativo di dimostrazione fatto da Coulomb, ma assai imperfetto e affatto lontano dal rigore matematico.

(4) Parecchie delle conclusioni ottenute in questa memoria si trovano già esposte per estratto nel terzo Volume del mio Corso Elementare di Fisica, a p. 32, 114, 141, 153, 178.

PARTE PRIMA

DELLA LEGGE DELLE AZIONI OPERANTI SUL FLUIDO ELETTRICO.

PROPOSIZIONE 1.ª

2. *Una quantità qualsivoglia di una materia repulsiva le cui parti si respingano in ragione inversa dei quadrati delle distanze, e che sia distribuita uniformemente in una superficie sferica, non esercita azione veruna verso i punti collocati nell' interno di questa superficie* (1).

DIMOSTRAZIONE.

Sulla superficie di una sfera, della quale sia AFBE (*fig.* 1) un cerchio massimo, suppongasi distribuita uniformemente una materia che sia condensata unicamente su questa superficie senza occupare nessuna grossezza, e le cui parti esercitino un' azione respingente la quale varii in ragione inversa del quadrato delle distanze. In un punto qualsivoglia D preso entro di essa superficie si supponga concentrata una piccola quantità m di materia atta a sentire questa ripulsione. Si asserisce che le azioni esercitate sulla massa m dalle diverse parti della detta materia distribuita sulla superficie sferica, si controbilanciano e si distruggono a vicenda.

Conduciamo pel punto D il diametro ADB, la retta D'DD'' perpendicolare a questo diametro, e inoltre le due corde EDF, E'DF', le quali intercettino due archi EE', FF' situati in due opposti de' quattro archi AD', D'B, BD'', D''A; e distinguiamo

(1) Questo Teorema è stato dimostrato la prima volta da Newton ne' suoi *Principj matematici,* Lib. 1. Prop. 70, rispetto però a una forza attrattiva. Io ho procurato di ridurre elementare la dimostrazione, colla piccola diversità di considerare in vece un' azione repulsiva. Molti lettori troveranno il calcolo troppo sminuzzato: il che fu per renderlo accessibile a un maggior numero di persone. Ma chi conosce il calcolo integrale, può camminar da se per una via assai più breve.

sulla superficie della sfera le due zone che nascono dalla rotazione dei detti due archi EE', FF' intorno al diametro AB. E cominciamo a dimostrare che le contrarie azioni esercitate dalle porzioni di materia repulsiva distribuite su queste due zone sono fra loro uguali.

De' due segmenti AD, DB del diametro AB sia AD il minore. Si conducano ad esso diametro le perpendicolari EG, E'G', FH, F'H'; e per mezzo di corde condotte pel punto D si divida ciascuno degli angoli EDE', FDF' in un tal numero di parti uguali, che gli archetti ee', ff' ecc. corrispondenti a queste parti riescano minori della quantità $\frac{1}{n}\, l$, dove per l s'intende la più piccola fra le otto rette EG, E'G', FH, F'H', DG, DG', DH, DH', e per n un numero assai grande anticipatamente scelto. Il quale scopo sarà sempre ottenuto quando le eguali parti degli angoli suddetti EDE', FDF' saranno sì piccole, che venendo fatte alla circonferenza AEBF insistano su archi minori di $\frac{1}{n}\, l$.

Ciò fatto si scelgano due di questi archetti, l'uno ee' in EE', l'altro ff' in FF', corrispondenti a due angoli eDe', fDf' opposti al vertice. E si considerino le azioni esercitate sulla massa m esistente in D dalle due porzioni di materia repulsiva appartenenti alle zone nate dal rotare di essi archetti ee', ff' intorno al diametro AB.

L'azione spettante alla zona generata da ee' dipende da due elementi, cioè:

1.° Dall'estensione superficiale di questa zona;

2.° Dalla media energia della materia distribuita sulla zona stessa, per ispingere la massa m verso B.

Ora l'estensione di questa zona è misurata, come è noto dalla Geometria, dal prodotto

$$2\pi.\ \text{corda}\ ee'.\, e''g'',$$

essendo

π il rapporto della circonferenza al diametro,

corda ee' la corda dell'arco ee',

$e''g''$ la perpendicolare calata su AB dal punto di mezzo e'' dell'arco ee'. Chi non si rammentasse di questo Teorema, consideri che la corda ee' è perpendicolare al raggio Ce'', e che perciò il suo prolungamento fa col prolungamento del diametro BA un angolo che è complemento dell' angolo e''CA, ossia un angolo uguale a $g''e''$C, che è anch' esso complemento di e''CA. Si ha pertanto

$$gg' : corda\ ee' : : e''g'' : e''C,$$

ossia

$$gg' . e''C = e''g'' . corda\ ee'.$$

Ma l'estensione superficiale della zona di cui si tratta è uguale $= 2\pi . e''C . gg'$ (Legendre, *Géométrie*, Lib. VIII, Prop. XI, ediz. 1813); dunque ella è anche $= 2\pi . e''g'' . corda\ ee'$.

In quanto alla energia dell'azione respingente egli è chiaro che se tutta la materia repulsiva distribuita in questa zona fosse collocata in un punto unico dell'arco ee', la sua azione verso m, considerandone l' effetto utile secondo la direzione DB, varierebbe di grandezza secondo la particolar posizione di un tal punto unico: vi è una posizione per la quale quest' azione sarebbe *massima*, ossia più grande che in qualsivoglia altra posizione scelta in esso arco ee' o anche in tutta l' estensione della detta zona, e perciò più grande altresì dell'azione che dee effettivamente aver luogo secondo la DB, essendo essa materia distribuita, come si è supposto, in tutta l' estensione superficiale della zona medesima; vi è una posizione in cui tale azione sarebbe *minima*, e più piccola della effettiva; e frammezzo a queste due posizioni ve ne debbe eziandio essere necessariamente una in cui una siffatta azione uguaglierebbe esattamente la effettiva suddetta. Chiameremo quest' ultima posizione il punto di *energia media* della ripulsione della materia di essa zona per ispingere la massa m nella direzione DB. Indichiamo con

e''' questo punto di energia media (il quale però non è segnato nella figura per non far confusione);

g'' il piede della perpendicolare calata da e''' su AB;

X l' azione totale esercitata secondo DB dalla materia distribuita nella zona generata da ee'. E sarà

$$X = \frac{p 2\pi . e''g'' . corda\, ee' . g'''D}{(e'''D)^3},$$

essendo p un coefficiente costante.

In un modo affatto somigliante si trova che l'azione esercitata sulla massa m nella direzione DA dalla materia ripulsiva distribuita nella zona generata dall' arco ff', azione che noi indicheremo con Y, viene data da

$$Y = \frac{p 2\pi f''h'' . \text{corda}\, ff' . h'''D}{(f'''D)^3}$$

essendo p lo stesso coefficiente costante di poc' anzi,

f'' il punto di mezzo dell' arco ff',

f''' il punto di energia media della materia ripulsiva distribuita nella zona summenzionata, per ispingere la massa m nella direzione DA,

$f''h''$, $f'''h'''$ le perpendicolari calate rispettivamente dai punti f'', f''' sulla AB.

Per conseguenza avremo

$$X : Y :: \frac{e''g'' . \text{corda}\, ee' . g'''D}{(e'''D)^3} : \frac{f''h'' . \text{corda}\, ff' . h'''D}{(f'''D)^3}.$$

Ma ne' due triangoli rettilinei ee'D, ff'D sono uguali fra loro i due angoli eDe', fDf' siccome opposti al vertice, ed uguali i due $e'e$D, ff'D, ossieno $e'ef$, $ff'e'$, siccome formati entrambi alla circonferenza AEBF ed insistenti sullo stesso arco e'Af; perciò si ha

$$corda\ ee' : corda\ ff' : : eD : f'D ;$$

d' onde si ricava

$$X : Y : : \frac{e''g''.\ g'''D.\ eD}{(e'''D)^3} : \frac{f''h''.\ h'''D.\ f'D}{(f'''D)^3}.$$

In questa proporzione le linee che compongono il terzo termine sono separatamente o uguali o prossimamente uguali ai lati del triangolo egD, e quelle del quarto termine eguagliano ciascuna prossimamente un de' lati del triangolo Dfh simile a egD. Assai poco perciò possono differire, seppure differiscono, i valori di questi due termini, e così pure i valori di X e di Y; e tanto più esatta apparisce l' eguaglianza fra esse X ed Y, quanto più piccoli sono gli archetti ee', ff'. Ma per maggior rigore di ragionamento osserviamo che

$$e''g''=eg-(eg-e''g'')=eg\left[1-\frac{eg-e''g''}{eg}\right];$$

e siccome si ha

$$eg-e''g''< \text{dell' arco } ee'$$

$$eg > \text{della lunghezza } l,$$

e perciò

$$\frac{eg-e''g''}{eg}<\frac{ee'}{l}, \text{ e quindi } <\frac{1}{n},$$

così potremo porre

$$e''g''=eg\left(1-\frac{k}{n}\right),$$

dove per k si vuol indicare una quantità positiva minore di 1.

Similmente si ha

$$g'''D=gD+gg'''=gD\left(1+\frac{gg'''}{gD}\right)=gD\left(1+\frac{k_1}{n}\right)$$

essendo k_1 una quantità analoga alla k.

Così pure

$$e'''D=eD-(eD-e'''D)=eD\left[1-\frac{eD-e'''D}{eD}\right]=eD\left[1-\frac{k_2}{n}\right],$$

essendo k_2 anch' essa analoga alla k.

In simil modo

$$f''h''=fh-(fh-f''h''),$$

ovvero

$$f''h''=fh+(f''h''-fh),$$

valendo l'una o l'altra equazione, secondo che fh è maggiore o minore di $f''h''$: perciò

$$f''h''=fh\left(1\pm\frac{k_3}{n}\right),$$

ove k_3 è un' altra quantità analoga alla k.

E proseguendo innanzi si trova

$$h'''D=hD\left(1+\frac{k_4}{n}\right)$$

$$f'D=fD\left(1+\frac{k_5}{n}\right)$$

$$f'''D=fD\left(1+\frac{k_6}{n}\right),$$

essendo k_4, k_5, k_6 altre quantità positive minori di 1. Avremo adunque

$$X:Y::\frac{eg.gD.eD}{(eD)^3}\cdot\frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k_1}{n}\right)}{\left(1-\frac{k_2}{n}\right)^3}:\frac{fh.hD\,fD}{(fD)^3}\cdot\frac{\left(1\pm\frac{k_3}{n}\right)\left(1+\frac{k_4}{n}\right)\left(1+\frac{k_5}{n}\right)}{\left(1+\frac{k_6}{n}\right)^3}.$$

Cominciamo ad osservare che attesa la somiglianza de' triangoli egD, fhD, si ha

$$\frac{eg}{eD}=\frac{fh}{fD},\quad \frac{gD}{eD}=\frac{hD}{fD},$$

ed avremo

$$X:Y::\frac{\left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k_1}{n}\right)}{\left(1-\frac{k_2}{n}\right)^3}:\frac{\left(1\pm\frac{k_3}{n}\right)\left(1+\frac{k_4}{n}\right)\left(1+\frac{k_5}{n}\right)}{\left(1+\frac{k_6}{n}\right)^3}$$

da cui

$$(a)\qquad Y = X\left\{\frac{\left(1 \pm \frac{k_3}{n}\right)\left(1 + \frac{k_4}{n}\right)\left(1 + \frac{k_5}{n}\right)\left(1 - \frac{k_2}{n}\right)^3}{\left(1 - \frac{k}{n}\right)\left(1 + \frac{k_1}{n}\right)\left(1 + \frac{k_6}{n}\right)^3}\right\}.$$

Osserviamo che, essendo k_p una quantità positiva minore di 1, si ha

$$1 + \frac{k_p}{n} = \frac{1 + \frac{k_p}{n}}{1 + \frac{k_p}{n} - \frac{k_p}{n}} = \frac{1}{1 - \frac{k_p}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k_p}{n}}} = \frac{1}{1 - \frac{k_q}{n}}$$

essendo k_q un' altra quantità compresa fra 0 e $+1$. Pertanto la Equazione (a) si può mettere sotto quest' altra forma

$$(b)\qquad Y = X.\frac{\left(1 \pm \frac{k_3}{n}\right)\left(1 - \frac{k_4}{n}\right)^3\left(1 - \frac{k_7}{n}\right)\left(1 - \frac{k_8}{n}\right)^3}{\left(1 - \frac{k}{n}\right)\left(1 - \frac{k_9}{n}\right)\left(1 - \frac{k_{10}}{n}\right)}$$

essendo k_7, k_8 ec. altre quantità analoghe a k. Osserviamo di più che

$$\left(1 - \frac{k_p}{n}\right)\left(1 - \frac{k_q}{n}\right) = 1 - \frac{k_q}{n} - \frac{k_p}{n}\left(1 - \frac{k_q}{n}\right) = 1 - \frac{k_q}{n} - \frac{k_r}{n}$$

$$= 1 - \frac{2k_s}{n}$$

$$\left(1 - \frac{ka_p}{n}\right)\left(1 - \frac{k_q}{n}\right) = 1 - \frac{k_q}{n} - \frac{ak_p}{n}\left(1 - \frac{k_q}{n}\right)$$

$$= 1 - \frac{k_q}{n} - \frac{ak_r}{n}$$

$$= 1 - (a + 1)\frac{k_s}{n}$$

essendo k_r, k_s quantità comprese anch' esse fra 0 e $+1$. Avremo perciò

$$Y = X \frac{\left(1 \pm \frac{k_3}{n}\right)\left(1 - \frac{7k_{11}}{n}\right)}{1 - \frac{3k_{12}}{n}}$$

$$= X \left\{ \frac{1 - \frac{7k_{12}}{n} \pm \frac{k_3}{n} \mp \frac{7k_3k_{11}}{nn}}{1 - \frac{3k_{12}}{n}} \right\}$$

$$= X \left\{ \frac{1 - \frac{3k_{12}}{n} + \frac{3k_{12}}{n} - \frac{7k_{11}}{n} \pm \frac{k_3}{n} \mp \frac{7k_3k_{11}}{nn}}{1 - \frac{3k_{12}}{n}} \right\}$$

$$(c) \qquad Y = X \left\{ 1 + \frac{3k_{12} - 7k_{11} \pm k_3 \mp \frac{7k_3k_{11}}{n}}{n - 3k_{12}} \right\}$$

dove, col dare una grandezza sufficiente alla n, i diversi termini in cui si può decomporre la parte frazionaria del valore della X, possono rendersi minori di qualsivoglia quantità assegnata. Per conseguenza, col prendere la n sufficientemente grande, noi potremo ridurre la differenza fra la X e la Y più piccola del prodotto di X per una minima frazione scelta preventivamente a piacere.

In tutto ciò che si è fatto e detto per le due zone appartenenti agli archetti ee', ff', non si è avuto verun riguardo alla posizione di questi archetti dentro agli archi EE', FF'. Perciò quando siasi stabilito che la differenza fra X ed Y debba, p. e., riuscir minore di un milionesimo della X, e siasi quindi assegnato alla n un valore abbastanza grande, e si sieno divisi gli angoli EDE', FDF' in un bastevole numero di parti, noi potremo essere certi che l'azione di ciascuna delle zone appartenenti all'arco FF' differirà dall'azione della corrispondete zona appartenente ad EE' meno di un milionesimo del valore di quest'ultima, e che anche l'azione spettante a tutta

la zona generata dall' arco FF' differirà dall' azione spettante alla zona nata dall' EE' meno di un milionesimo di quest'ultima azione. Da ciò possiamo conchiudere che le azioni esercitate da queste due ultime zone si eguagliano e si distruggono esattamente. Perocchè se alcuno asserisse esservi fra cotali azioni una differenza maggiore di una qualche quantità da lui assegnata, p. e. maggiore di un milionesimo dell'azione della zona corrispondente ad EE', noi gli potremmo immediatamente dimostrare che non può aver luogo una differenza di cotale grandezza.

Procedendo innanzi nella dimostrazione, passiamo a provare essere uguali le contrarie azioni esercitate sulla massa m dalle due porzioni di materia repulsiva distribuite sulle due calotte, in cui vien divisa la superficie sferica dal piano passante per D perpendicolarmente ad AB.

Chiamiamo a quest' uopo T, T' queste due azioni, cioè T quella della calotta dalla banda di A, T' quella della calotta opposta. E chiamiamo U, X, U'; V, Y, V' le azioni esercitate rispettivamente sulla massa m dalle porzioni di materia distribuite sulle parti di superficie sferica generate dalla rotazione degli archi AE', E'E, ED'; BF', F'F, FD'' intorno al diametro AB; delle quali azioni le prime tre operano nella direzione AD, da D verso B, e le altre tre nella direzione da D verso A. Avremo

$$T-T'=U+X+U'-V-Y-V';$$

e siccome, da quanto si è testè veduto, si ha $X=Y$, così

$$T-T'=U+U'-V-V'.$$

Ma col diminuire gli archi AE', ED', D''F, F'B le quantità U, U', V, V' diminuiscono tutte e quattro sino a poter divenir minori di qualsivoglia quantità assegnata, senza che mai cessi il polinomio

$$U+U'-V-V'$$

dall' essere uguale a $T-T'$. Dunque $T=T'$. Altrimenti, se fra

T e T' vi fosse qualche differenza δ anche minima, si potrebbero prendere sì piccoli i detti archi che le quantità $U+U'$, $V+V'$ fossero l'una e l'altra minori di δ, e che perciò anche la loro differenza fosse minore di δ; e si avrebbe l'assurdo che le due quantità $T-T'$, $U+U'-V-V'$ sarebbero nello stesso tempo eguali e diverse.

Si elidono adunque a vicenda le due azioni esercitate sulla massa m dalle anzidette due calotte; ed essa m si trova in equilibrio fra le diverse azioni su lei esercitate dalle varie parti della materia ripulsiva distribuita sulla superficie sferica.

PROPOSIZIONE II.

3. *Se nella sfera* AEBF (fig. 1) *si trova distribuita della materia ripulsiva non già condensata unicamente alla superficie, ma bensì disposta in uno strato di qualche grossezza al di sotto di essa superficie, essendo pure diversa, se si voglia, la densità in questo strato alle differenti distanze dal centro, ma essendo la stessa in tutti i punti equidistanti dal centro medesimo; anche in questo caso le diverse azioni esercitate dalle varie parti di cotal materia ripulsiva verso una massa* m *collocata in un punto* D *al di dentro del detto strato, supposta aver luogo la medesima legge de' quadrati inversi delle distanze, si fanno vicendevolmente equilibrio.*

Concepiamo che lo strato di materia ripulsiva di cui si tratta, venga separato in tanti minori strati da una numerosa serie di superficie sferiche concentriche equidistanti. E immaginiamo che la materia appartenente a ciascuno di questi strati minori, movendosi secondo la direzione de' raggi della sfera, venga a trasportarsi sulla di lui superficie interna. Lo strato totale verrà con ciò ridotto a una serie di separate porzioni di materia ripulsiva, ciascuna delle quali si troverà distribuita uniformemente su di una superficie sferica e non eserciterà perciò azione veruna sulla massa m.

Chiamiamo dopo ciò

S l'azione che può dubitarsi esercitata verso la massa m dal considerato totale strato di materia ripulsiva, innanzi all' immaginato trasportamento di questa;

s il cangiamento che può dubitarsi avvenuto nella grandezza di questa azione mediante un tale trasportamento.

Dall'essere nulla cotale azione dopo avvenuto il trasporto, noi veggiamo che il cangiamento s distrugge l'azione primitiva S, e che perciò la s è uguale, e di segno contrario alla S; talchè noi potremo conoscere la S appena che si sappia il valore della s.

Ora per riguardo a quest' ultima egli è manifesto, che s'ella è qualche cosa, deve al certo essere assai piccola quando assai piccolo è il trasportamento che si suppone nella materia ripulsiva del considerato strato, ossia quando sono assai numerose le superficie sferiche equidistanti che lo separano; ed è certamente picciolissima quando cotali superficie sono numerosissime; anzi non vi ha quantità sì piccola di cui non possa cotale s ridursi minore col prendere un numero abbastanza grande di siffatte superficie concentriche, e col fare perciò abbastanza piccolo il trasportamento delle varie porzioncelle della detta materia repulsiva. Da ciò possiamo dedurre che tanto la S quanto la s sono uguali a zero: altrimenti si verrebbe all' assurdo che una quantità di grandezza determinata quale è la S, sarebbe eguale a un' altra quantità capace di divenir minore di qualsivoglia minima grandezza data quale è la s.

PROPOSIZIONE III.

4. *Se la massa* m, *in luogo di essere concentrata in un punto unico, si trova diffusa in uno spazio alquanto esteso, sempre però abbracciato dallo strato della materia ripulsiva, supposta in questo strato la medesima distribuzione ammessa poc'anzi, e supposta la stessa legge di ripulsione, l'azione di cotal materia ripulsiva verso la massa* m *sarà ancora nulla.*

Ciò è chiaro dal vedersi che la materia ripulsiva di cui si tratta, non esercita azione alcuna verso nessun punto dello spazio occupato dalla massa m.

PROPOSIZIONE IV.

5. *Se in vece di uno strato di materia ripulsiva, si trovasse distribuito sotto la superficie sferica uno strato di materia attrattiva avente anch' essa la stessa densità in tutti i punti equidistanti dal centro, e operante similmente in ragione inversa de' quadrati delle distanze, neppur questo strato eserciterebbe azione veruna su di una massa* m *contenuta al di dentro.*

Si scelga ad arbitrio un punto nella massa m, e si supponga che la materia distribuita nello strato sferico sia in sul principio ripulsiva, operando in ragione inversa del quadrato delle distanze; e che poscia tutte le azioni esercitate dalle varie porzioncelle di essa materia verso il punto scelto si cangino in attrattive, conservando ciascuna la medesima intensità di prima. Egli è chiaro che siccome tutte queste azioni si equilibrano dapprincipio quando sono ripulsive, così debbono equilibrarsi anche di poi quando sono divenute attrattive; essendo noto dalla meccanica che allorquando in un sistema di forze operanti sopra di un punto si rovescia la direzione di queste senza che se ne alteri l' intensità, l' equilibrio si mantiene ancora. Equilibrandosi poi queste forze attrattive rispetto a qualsivoglia punto della massa m, è chiaro che anche l'intera massa medesima non sentirà dal loro aggregato azione veruna.

PROPOSIZIONE V.

6. Supponiamo che vi abbian de' corpi formati di questi due distinti elementi, cioè:

1. Di una materia pesante, impenetrabile tra se medesima, composta di parti fortemente coerenti, mobile sì, ma sempre col mezzo di una sensibile forza estranea;

2. Di un fluido composto di parti estremamente slegate, mobilissime, penetrantissime, capaci perciò di scorrere agevolissimamente frammezzo alle parti della precedente materia pesante.

E ammettiamo che questo fluido sia sottoposto alle seguenti due forze, cioè:

1. A una ripulsione vicendevole fra le proprie parti, operante in ragione inversa del quadrato delle distanze; in conseguenza della qual ripulsione noi daremo a un tal fluido il nome di *fluido repulsivo*;

2. A un' attrazione verso la materia pesante già menzionata, operante anche quest' attrazione in ragione inversa de' quadrati delle distanze.

Noi cominceremo a riflettere che secondo questa ipotesi si può trovare in qualunque de' supposti corpi una tale quantità del menzionato fluido, che distribuita opportunamente non lasci esercitare da esso corpo veruna azione verso nessuna molecola del fluido medesimo sì dentro che fuori del corpo stesso. Perocchè considerata una data porzioncella p di esso corpo, egli è evidentemente possibile il supporvi collocata una tale quantità q di fluido repulsivo, che una data molecola a d' altro simile fluido sia cotanto respinta dalla quantità q come ella è attratta dalla materia pesante della detta porzioncella p. E quando ciò abbia luogo, anche un' altra qualsivoglia molecola b di fluido repulsivo estraneo alla menzionata porzioncella p, sentirà uguali le due azioni contrarie che provengono da essa p, essendo uguale l' incremento o il decremento di cotali due azioni in conseguenza del variare della distanza; e sarà perciò essa porzioncella p affatto priva di azione verso ogni molecola di fluido repulsivo estraneo. Ma ciò può valere per qualunque altra porzioncella del corpo. Dunque in uno qualsivoglia de' considerati corpi si può proporzionare e distribuire talmente il fluido repulsivo, che da esso corpo non venga esercitata azione alcuna verso nessuna molecola di cotal fluido estranea ad esso corpo. E questa nullità d'azione avrà altresì

luogo verso le molecole del fluido repulsivo contenuto in esso corpo. Perocchè scelta in questo ad arbitrio una particella di materia pesante colla rispettiva porzioncella di fluido repulsivo, noi possiamo considerare il rimanente del corpo come distinto in due parti, frammezzo alle quali giaccia una tale particella, e alle quali essa si possa riguardare come estranea. Ora il fluido di questa particella non sentirà azione alcuna nè dall'una nè dall' altra delle dette parti, e nemmeno sarà sollecitato a cangiar di luogo dall' azione della materia pesante associatagli. Un corpo che si trovi in questo stato il possiam chiamare *saturo di fluido repulsivo.*

Considereremo dopo ciò che se un corpo, oltre alla dose di fluido repulsivo corrispondente alla saturazione, ne contiene un' altra quantità la quale diremo *sovrabbondante*, l'azione che questo corpo eserciterà su qualsivoglia molecola di fluido repulsivo dipenderà unicamente dalla detta quantità sovrabbondante. Quest' azione poi nell' interno del corpo verrà sentita tanto dalle molecole del fluido sovrabbondante quanto da quelle della dose di saturazione. Tutte cioè le molecole del fluido repulsivo appartenenti al corpo saranno passive; benchè attive non possano essere che quelle del fluido sovrabbondante. E similmente se il fluido repulsivo contenuto nel corpo non arrivasse alla dose di saturazione, ma saturasse soltanto una parte di esso corpo, non avrà luogo sulle molecole del fluido repulsivo sì dentro al corpo stesso che fuori, altra azione che quella attrattiva esercitata dalla parte rimanente della materia pesante del corpo stesso, parte che noi diremo *deficiente*. Ammesso e considerato quanto sopra,

Concepiamo che un corpo sferico della specie che qui consideriamo, contenga una quantità di fluido repulsivo eccedente la dose di saturazione; e che in sul principio la quantità sovrabbondante si trovi distribuita uniformemente in tutta la solidità di esso corpo sferico. Si asserisce che la total massa del fluido repulsivo contenuto in questo corpo non si troverà in equilibrio, ma si muoverà per tal modo da distribuirsi la

detta parte sovrabbondante in uno strato superficiale sottilissimo.

Immaginiamo che per un punto qualunque preso entro la sfera, ma fuori del centro, venga fatta passare una superficie sferica concentrica alla sfera medesima. Egli è evidente, da quanto si è testè dimostrato, che il fluido sovrabbondante contenuto nello strato compreso fra la superficie della sfera e la superficie sferica nuovamente immaginata, non esercita veruna azione verso una particella di fluido esistente in quel punto. In vece il fluido sovrabbondante contenuto al di dentro della superficie sferica ultimamente immaginata spingerà questa medesima particella di fluido verso l'infuori, talchè essa particella verrà dalla somma di tutte le azioni su di essa operanti spinta appunto dall' indentro all'infuori. E così avverrà di tutte le altre particelle di fluido repulsivo contenute dentro la sfera; le quali tutte, sì quelle appartenenti alla dose di saturazione, come quelle sovrabbondanti, tenderanno a portarsi verso la superficie; di manierachè questo fluido andrà rarefacendosi verso il centro e condensandosi verso essa superficie.

Ma anche dopo cessata l' uniforme distribuzione, e dopo che la densità si è resa maggiore nelle parti superficiali che nelle interne, continuerà esso fluido ad essere spinto verso la superficie, purchè nelle dette parti interne rimanga qualche piccola sovrabbondanza, e l' aumento della densità partendo dal centro sia tale che vi abbia la densità medesima in tutti i punti equidistanti da esso centro. Perocchè immaginando descritta dentro la sfera, come poc' anzi, una superficie sferica concentrica qualunque, il fluido sovrabbondante situato al di dentro di questa superficie spingerà verso l'infuori le molecole di fluido esistenti in essa, senza che queste sentano alcuna azione contraria dal fluido sovrabbondante esistente all'esterno della medesima.

Cesserà però nell'interno della sfera questa azione spingente all'infuori, allorchè il fluido sovrabbondante si sarà ridotto a un sottile e uniforme strato superficiale; perocchè allora la

dose di saturazione contenuta al di sotto di un tale strato non sentirà veruna azione che ne spinga le molecole nè all'indentro nè all' infuori. Però nello strato superficiale medesimo, ciascuna delle molecole di fluido esistenti al di fuori della superfice interna di esso strato, si troverà spinta verso l'esterno dal fluido sovrabbondante della parte più interna dello strato stesso; e però le diverse molecole del fluido di questo strato si andranno condensando presso l'esterna superficie, sino a che o l' impenetrabilità, se questa ha quì luogo, o qualche altra causa equivalente, impedisca per avventura l'ulteriore condensamento. Giunto il fluido repulsivo a questo stato, tutte le sue parti si troveranno equilibrate, ben inteso che alla sua superficie si trovi un ostacolo che ne trattenga la tendenza a diffondersi nello spazio circostante.

Ecco adunque come essendo dapprincipio uniforme la distribuzione del fluido sovrabbondante, e respingendosi questo secondo la supposta legge, debba esso infine ridursi a un sottile strato superficiale. Ma anche nel caso che la sua distribuzione iniziale non sia uniforme, non lascerà di prendere la medesima distribuzione finale. Perciochè si vede, con quel grado di evidenza del quale siamo soliti contentarci in molte altre dottrine della fisica, che in questo caso il fluido repulsivo, oltre ad una tendenza pressocchè generale dal centro verso la superficie, ne avrà una a portarsi dai luoghi ove è più condensato verso quelli ove è più rarefatto; talchè si muoverà in maniera da recarsi verso la superficie, e insieme rendersi ugualmente accumulato in tutti i punti di questa. Di ciò però si darà in seguito una dimostrazione rigorosa (Vedi più innanzi al §. 21).

PROPOSIZIONE VI.

7. *Ritengasi ancora, come poc' anzi, l'esistenza di corpi formati d' una materia pesante congiunta a un fluido mobilissimo e penetrantissimo; e ritengasi eziandio che questo fluido sia*

sottomesso a una ripulsione fra le proprie parti e a un' attrazione verso la materia pesante, le quali operino entrambe con una medesima legge (nel qual caso avranno ancora luogo le due considerazioni fatte sul principio della Prop. V.); *ma si ammetta che questa legge sia diversa da quella del quadrato inverso delle distanze. Si asserisce non esser possibile l'equilibrio di esso fluido repulsivo in un corpo sferico che ne contenga una quantità maggiore della dose di saturazione, quando la parte sovrabbondante sia tutta distribuita in uno strato superficiale, e le parti interne si trovino tutte allo stato di saturazione.*

Sia AMBN (*fig.* 2) il corpo sferico di cui si tratta; e abbia primieramente luogo una legge più rapida di quella del quadrato inverso delle distanze. Consideriamo l'azione che in questo caso il fluido sovrabbondante d'esso corpo AMBN, supposto tutto distribuito alla superficie, esercita verso una molecola di fluido repulsivo appartenente alla dose di saturazione e collocata dentro ad esso corpo in qualsivoglia punto D diverso dal centro C. Conduciamo per D il diametro AB, e perpendicolarmente a questo un piano MN il quale divida la superficie sferica nelle due calotte diseguali MAN, MBN, delle quali la minore sia per ipotesi la sinistra, ossia la MAN. E supponiamo che il fluido sovrabbondante distribuito alla superficie di AMBN cessi per una breve durata di tempo dall' operare secondo questa nuova legge, e operi in vece in ragione inversa de' quadrati delle distanze, con tale energia che l' azione di una di lui porzione, corrispondentemente alla distanza DM, sia la stessa in ambedue le leggi. È chiaro che in questa breve durata di tempo le due porzioni di fluido repulsivo sovrabbondante contenute nelle due calotte MAN, MBN eserciteranno verso D azioni eguali. Ma diverranno subito diseguali queste azioni al repristinarsi della supposta più rapida legge. Giacchè in ciascuna molecola del fluido sovrabbondante contenuto nella calotta MAN verrà a crescere tanto l' azione assoluta verso la molecola situata in D, quanto la componente di quest'azione

operante nella direzione DB; e perciò crescerà eziandio l'azione esercitata secondo DB da tutto il fluido sovrabbondante contenuto in essa calotta; e invece l'azione del fluido sovrabbondante della calotta MBN diverrà più debole. La molecola adunque di fluido repulsivo situata in D non sarà in equilibrio, ma sarà sollecitata a muoversi verso il centro della sfera. E lo stesso avverrà di qualsivoglia altra molecola di fluido repulsivo situata al di dentro dello strato sovrabbondante superficiale ed esistente fuori del centro. Perciò con questa legge più rapida e con questa distribuzione non avrà luogo l' equilibrio; ma il fluido repulsivo si muoverà verso le parti interne.

Questa stessa conclusione avrà pur luogo quando il fluido sovrabbondante si trovi condensato in una serie di vicinissime superficie sferiche concentriche delle quali l' una sia quella stessa della sfera, e le altre sieno collocate al di dentro ma a piccolissima distanza, essendo uniforme la distribuzione in ciascuna delle superficie, ma variando con legge qualsivoglia dall'una all'altra. Vale a dire una qualsivoglia molecola di fluido repulsivo situata nel punto D, al di dentro di tutte queste superficie ma non nel centro, sarà sollecitata verso questo centro. E varrà pure una tale conclusione pel caso che il fluido sovrabbondante si trovi diffuso in uno spazio di qualche grossezza, potendo a questo caso avvicinarsi cotanto quello delle superficie concentriche, da differire le azioni sul punto D, dall' un caso all' altro, meno di ogni minima quantità assegnata. In ogni caso adunque le molecole del fluido repulsivo verranno sollecitate verso il centro. Continuerà poi il movimento in fino a che la densità del fluido nelle parti vicine al centro sia cresciuta al segno da equilibrarsi fra loro le due azioni, che vengono esercitate su qualsivoglia molecola di fluido dell' interno del corpo, dal fluido sovrabbondante più lontano che essa dal centro, e dal fluido sovrabbondante più vicino al centro; azioni che tendono l'una ad avvicinare questa molecola al detto centro, e l' altra ad allontanarla: epperò quando si avrà ottenuto l' equilibrio, si troveranno in qualche grado sovrabbondanti di fluido anche le parti interne del corpo.

Quando in vece il fluido repulsivo si supponesse operare secondo una legge meno rapida di quella de' quadrati inversi delle distanze, fatta la stessa costruzione, e ripetuti presso a poco gli stessi ragionamenti, si troverebbe che l' azione della calotta sinistra verrebbe superata da quella della calotta destra, e che perciò il fluido della dose di saturazione contenuto nelle parti più interne del corpo si muoverebbe verso la superficie; e si conchiuderebbe che dopo ottenuto l' equilibrio dovrebbero le parti interne del corpo trovarsi in qualche grado deficienti (1).

CONCLUSIONE.

8. Segue da tutto ciò, essere la sola legge de' quadrati inversi delle distanze quella che in un corpo sferico può ridurre e mantenere alla superficie la quantità sovrabbondante di un fluido repulsivo quale abbiamo considerato poc'anzi.

Applichiamo ora tutto ciò all' Elettrico, il quale secondo la teoria di Franklin è appunto un fluido repulsivo della specie che abbiamo contemplata. Riguardo a questo adunque la sperienza ha dimostrato che elettrizzando positivamente una sfera conduttrice, tutta la quantità d' elettrico che eccede la dose naturale (corrispondente alla dose di saturazione poc' anzi considerata) si distribuisce unicamente alla superficie (2). Per conseguenza la ripulsione che ha luogo fra le parti del fluido elettrico non può avere altra legge che quella de' quadrati inversi delle distanze.

Questa legge è necessariamente altresì quella secondo cui il fluido elettrico viene attratto dalla materia pesante diselettrizzata; poichè mostrando il fatto che un corpo allo stato naturale non manifesta azione alcuna sull'elettrico degli altri corpi nè da vicino nè da lontano, dee l' attrazione di cui si

---

(1) Cavendish, *Phil. Trans.* 1771, p. 596 e 597.

(2) Si consultino i Trattati di Fisica, e in ispecie quello di Pouillet, T. I. parte 2. p. 573, ediz. 1827 e seg.

tratta avere la stessa legge della ripulsione vicendevole fra le parti del fluido elettrico.

9. *Osservazione.* Cogli esposti ragionamenti si è determinata la legge, ma non già l' intima essenza delle azioni a cui è soggetto il fluido elettrico. Se perciò alcuno vuol riguardare la ripulsione fra le parti di questo fluido come una forza propria di esso, tale cioè da sussistere ancora quando tutto venisse a mancare in natura salvo l' elettrico, egli è libero di farlo. E se in vece alcun altro preferisce di crederla una conseguenza di altre cause, di maniera che, tutto distruggendosi in natura tranne l' elettrico, debba cessare anche cotal forza, questi pure è libero di così pensare. Dalle esposte dimostrazioni risulta soltanto che se l' elettricità vitrea nasce dallo accumularsi ne' corpi un particolar fluido oltre ad una data dose, *ogni molecola di questo fluido tende ad allontanarsi dal luogo ove ne esiste un' altra simile, con una forza che varia in ragione inversa del quadrato delle distanze.*

PARTE SECONDA.

DELLA DISTRIBUZIONE DELL'ELETTRICO NE' CORPI CONDUTTORI

10. Mediante la cognizione della legge ritrovata nella Parte prima, noi possiamo coll'ajuto delle matematiche risolvere molte questioni riguardanti l' equilibrio del fluido elettrico, e in ispecie alcune di quelle che riguardano la distribuzione del medesimo ne' corpi conduttori; e dico alcune, perchè lo stato attuale delle matematiche medesime non basta ancora alla risoluzione di tutte.

Fra le altre cose si può dimostrare questo importantissimo Teorema: cioè che *in un qualsivoglia corpo conduttore, isolato o non isolato, l' elettricità o positiva o negativa che in esso si stabilisce, sì per aggiunta o per sottrazione di fluido elettrico, che per influenza di altri corpi elettrizzati, o per entrambe le cagioni insieme, si trova distribuita unicamente*

alla superficie, lasciando le parti interne perfettamente allo stato naturale. Non essendo questo Teorema, per quanto io sappia, stato ancora dimostrato da altri nella sua generalità, ma essendo soltanto conosciuto per mezzo della sperienza, ho stimato di esporne la dimostrazione in questa seconda parte della presente memoria. Dividerò l'argomento in più articoli, e comincerò a trattare nell'

ARTICOLO PRIMO.

Della distribuzione dell' Elettrico in un conduttore isolato, elettrizzato, e libero da azioni straniere.

PROPOSIZIONE VII.

11. Abbiasi un corpo qualsivoglia ABCD (*fig.* 3) sotto la cui superficie si immagini descritta un'altra superficie chiusa *abcd* soggetta alla sola condizione di non toccare la ABCD in nessun punto. Ed abbiasi a disposizione una materia repulsiva operante in ragione inversa del quadrato delle distanze, e la quale possa essere distribuita nell' intervallo ABCD*abcd* con quella qualunque legge di densità che da noi si reputi più conveniente. Si asserisce prima di tutto che *una data quantità* M *di questa materia repulsiva può essere distribuita nell' intervallo suddetto per tal modo, che riesca nulla la sua totale azione verso qualunque punto situato dentro la superficie più interna* abcd.

Ammettiamo siccome dimostrati i due seguenti Teoremi, cioè:

1.° Che una data quantità di materia ripulsiva operante in ragione inversa del quadrato delle distanze, e distribuita uniformemente in una superficie sferica, considerata in totale non esercita azione veruna verso i punti collocati nel vano interno e sottoposti all'azione delle sue singole parti.

2.° Che una tale quantità di materia ripulsiva, verso i punti esterni soggetti all'azione delle sue singole parti esercita la medesima azione totale, come se tutta la sua massa si trovasse raccolta e condensata nel centro della detta superficie.

Il primo di questi Teoremi è stato da noi dimostrato nella prima parte di questa Memoria al §. 2; il secondo, dovuto anch'esso a Newton, il quale lo dimostrò per riguardo a una forza attrattiva operante nella già detta ragione inversa de' quadrati delle distanze (1), può agevolmente verificarlo da se chiunque conosca il Calcolo integrale. Io non mi occuperò perciò della sua dimostrazione, intendendo in questa seconda parte di parlare a chi sia alquanto inoltrato nelle matematiche.

Ammessi questi due Teoremi, immaginiamo che intorno al corpo ABCD sia descritta una superficie sferica FGHI qualsivoglia, purchè di un diametro non molto più grande della maggior dimensione AC del corpo medesimo; e supponiamo condensata e uniformemente distribuita in questa superficie una quantità N, diversa se si voglia dalla M, della detta materia ripulsiva; la quale quantità N, pel primo de' citati Teoremi, non eserciterà azione veruna sui punti situati nell'interno del corpo ABCD. Immaginiamo divisa questa superficie in una grandissima moltitudine di parti di piccolissime dimensioni; e supponiamo che la materia di ciascuna di queste parti si condensi dapprima nel rispettivo centro di massa, e quindi si diffonda e si distribuisca uniformemente in una superficie sferica avente il centro in siffatto centro di massa, e cotanto grande che arrivi a toccare la superficie *abcd*, mantenendosi una tale materia così distribuita, coll' ajuto di forze estranee sufficienti, sino a che noi non torniamo ad alterarne la disposizione.

Con una tale trasformazione nella distribuzione della massa N, una piccola parte di questa verrà a disporsi nell'intervallo ABCD*abcd*, e un' altra parte molto maggiore verrà a distribuirsi in uno spazio solido all' intorno del corpo ABCD, tanto al di dentro della superficie FGHI quanto al di fuori. Nell' azione totale esercitata dalla massa N verso i punti collocati al di dentro di *abcd*, avverrà qualche piccolo cangiamento per le concentrazioni delle varie minime porzioncelle nei

(1) *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* Lib. 1. Prop. 71.

rispettivi centri di massa; ma pel Teorema 2.°, testè citato non succederà poscia mutazione alcuna in conseguenza della diffusione nelle diverse superficie; talchè la detta massa N non verrà di poi ad avere un' altra azione verso i punti collocati al di dentro di *abcd* che quella derivante dalle dette concentrazioni. Ora quest' ultima azione, quando si prendano abbastanza numerose e abbastanza piccole le porzioncelle suddette, può aversi minore di qualsivoglia minima quantità assegnata, e determinatamente può aversi minore della quantità

$$\frac{1}{n} Q,$$

ove n è un numero assai grande scelto anticipatamente ad arbitrio, e Q l' azione che la parte di materia dispostasi nell'intervallo ABCD*abcd*, quando fosse concentrata in un punto, eserciterebbe su di un altro punto collocato, per fissar le idee, ad una distanza uguale ad AC.

Infatti coll' impiccolire le porzioncelle dell' anzidetta superficie sferica FGHI, le due azioni che ciascuna di esse può esercitare prima e dopo la suddetta concentrazione verso qualsivoglia punto preso dentro la *abcd*, possono ridursi ad avere una differenza quanto si voglia minore dell' una di esse. All' incontro, descritta dal centro di massa di una di cotali porzioncelle una superficie sferica toccante la *abcd*, non può la parte di questa superficie sferica compresa nell' intervallo ABCD*abcd* esser ridotta quanto si voglia minore della totalità di essa superficie; ella dee, p. e., necessariamente avere con quest' ultima un rapporto maggiore di quello che si otterrebbe conducendo da un centro p preso nello spazio frapposto alle superficie FGHI e ABCD, una superficie sferica toccante la *abcd*, determinando di questa superficie la parte compresa nell' intervallo *abcd*ABCD, e il rapporto di questa parte colla totalità di essa superficie sferica, e scegliendo il punto p di tal maniera che questo rapporto risultasse il minimo possibile. Si può perciò con sicurezza conchiudere che le porzioncelle menzionate

possono impiccolirsi a tal punto che il cangiamento dell'azione di una qualunque di esse verso qualsivoglia punto preso al di dentro di *abcd*, in conseguenza della già detta concentrazione sia minore della quantità

$$\frac{1}{n} q,$$

essendo n il numero indicato poc'anzi con questa medesima lettera, e

q l' azione che verrebbe esercitata alla distanza AC da quella parte della materia appartenente alla detta porzioncella la quale viene a passare nell' intervallo ABCD*abcd*. Unendo pertanto insieme per mezzo della composizione delle forze tutti i cangiamenti delle azioni delle varie porzioncelle verso un determinato punto preso entro *abcd*, e rammentando che la risultante di tutti questi cangiamenti è minore della somma loro, noi possiamo conchiudere che il cangiamento totale nell' azione della massa N verso qualsivoglia punto preso entro *abcd* può aversi minore dell' anzidetta quantità

$$\frac{1}{n} Q.$$

Dimostratane la possibilità, supponiamo che ciò siasi realmente mandato ad effetto; ed allora dopo la supposta trasformazione l' azione della massa N verso qualsivoglia punto compreso entro *abcd* sarà minore di $\frac{1}{n}$ Q.

Eseguita questa prima trasformazione nella intera massa N, immaginiamone fatta una seconda su quella parte di N che viene a rimanere al di fuori del corpo ABCD. Immaginiamo cioè, che lo spazio solido da essa parte esterna occupato venga distinto in tante parti di dimensioni piccolissime: che la porzioncella di materia contenuta in ciascuna di queste parti si venga prima a concentrare nel rispettivo centro di massa, e poi ad estendere uniformemente in una superficie

sferica descritta intorno a cotale centro di massa e toccante la *abcd*, mantenendosi distribuita in questa superficie coll'ajuto di forze a ciò sufficienti. Con questa seconda trasformazione una nuova piccola porzione della N verrà a disporsi nell'intervallo ABCD*abcd*, e la parte rimanente si distribuirà in uno spazio attorno ad ABCD, stendentesi ad una distanza alquanto maggiore di quella di poc' anzi. E raccogliendo in uno tutti i cangiamenti d'azione nati dalle varie concentrazioni operatesi in questa seconda trasformazione, si avrà in totale un cangiamento d'azione verso i punti collocati entro *abcd*, il quale, col prendere abbastanza piccole le dimensioni delle porzioncelle, potrà sicuramente aversi minore della quantità

$$\frac{1}{n} Q_1,$$

dove Q_1 è l'azione che verrebbe esercitata alla distanza AC dalla parte della N dispostasi nell'intervallo ABCD*abcd* con questa seconda trasformazione. La quale piccolezza, giacchè lo si può, supponiamola effettivamente ottenuta.

Dopo questa seconda trasformazione, concepiamone eseguita allo stessissimo modo una terza su quella parte della massa N la quale dopo essa seconda trasformazione rimane esteriore al corpo ABCD; quindi, ancora allo stesso modo, una quarta, una quinta, ec. su quelle parti della N che successivamente rimangono esteriori ad ABCD; con che si verranno a disporre altre nuove parti di materia repulsiva nell'invervallo ABCD*abcd*; ma nello stesso tempo avverranno de' nuovi cangiamenti di azione verso i punti contenuti entro *abcd*; i quali cangiamenti però noi supponiamo, come realmente lo si può, che riescano rispettivamente minori delle quantità

$$\frac{1}{n} Q_2, \ \frac{1}{n} Q_3, \ \frac{1}{n} Q_4, \text{ ec.},$$

essendo Q_2, Q_3, Q_4, ec. le azioni che le parti di materia repulsiva passate separatamente nell'intervallo ABCD*abcd* eser-

terebbero verso un punto collocato alla distanza AC. Diverrà poi successivamente più grande lo spazio solido in cui si verrà a diffondere la parte di N rimasta all' esterno di ABCD.

Ma fino a quando continueremo queste trasformazioni? Immaginiamo descritta all' intorno della FGHI e ad essa concentrica una superficie sferica S di tale grandezza, che se venisse trasportata oltre ad essa tutta la massa N e disposta ivi comunque, dovesse questa esercitare verso qualsivoglia punto contenuto dentro *abcd* un' azione minore di

$$\frac{1}{n} Q,$$

essendo n, Q quelle quantità che abbiamo indicate con siffatte lettere nella prima trasformazione. E noi continueremo le nostre trasformazioni nel modo anzidetto, insino a che la materia della N cominci a diffondersi oltre a questa nuova superficie S. Quando però una di tali trasformazioni comincerà a far oltrepassare questo limite, ella dovrà esser l' ultima di quelle eseguite nel detto modo; e dopo di essa se ne eseguiranno bensì ancora delle altre, ma operando solamente sulla materia repulsiva che rimarrà fra la superficie S e la ABCD. In ciascuna cioè delle nuove trasformazioni si dividerà questa materia in tante porzioncelle di piccolissime dimensioni, s'immagineranno queste concentrate ne' rispettivi centri di massa, e quindi estese in altrettante superficie sferiche descritte intorno a cotali centri e toccanti la superficie *abcd*, prendendo sì piccole le dimensioni di esse porzioncelle, che il cangiamento d'azione che ne nasce verso qualsivoglia punto collocato entro *abcd* riesca minore della quantità

$$\frac{1}{n} Q_k ,$$

dove per Q_k s' intende l' azione che verrebbe esercitata su di un punto alla distanza AC dalla porzione di materia dispostasi

nell'intervallo ABCD*abcd* mediante la trasformazione di cui si tratta. E si continueranno le trasformazioni a questa nuova maniera in sino a tanto che nello spazio fra S ed ABCD non rimanga quasi più materia repulsiva, ma siasi quasi tutta ridotta parte nell'intervallo ABCD*abcd*, e parte al di là della superficie S; e precisamente non ne rimanga fra S ed ABCD che una tale quantità da esercitare sui punti contenuti entro *abcd* un' azione minore di

$$\frac{1}{n} Q.$$

Il che è sempre possibile mediante un sufficiente numero di trasformazioni. Infatti, per quanto grande siasi presa la S, ciascuna delle ultime trasformazioni dee trasportare nell' intervallo ABCD*abcd* una parte aliquota della materia esistente fra S ed ABCD, parte che non può esser minore di ogni quantità data, ma che dee necessariamente superare il prodotto di essa materia per qualche data piccola frazione che diremo $\frac{1}{m}$. Ond'è che ad ogni successiva trasformazione la parte di materia che rimane fra S ed ABCD, dee diminuire in una ragione più rapida di quella di 1 a $1 - \frac{1}{m}$. Ora è chiaro che ripetendo un sufficiente numero di volte cotal diminuzione si può scendere al di sotto di qualsivoglia minima quantità. Ed è perciò chiaro che questa quantità di materia che rimane fra ABCD ed S dee potersi ridurre sì piccola, da dover necessariamente esercitare su ciascun punto preso dentro *abcd* un' azione minore di $\frac{1}{n}$ Q.

Giunti a questo punto fermeremo le nostre trasformazioni. E allora nell' azione esercitata dalla massa N verso i punti collocati al di dentro della superficie *abcd*, avranno parte:

1.° Quella porzione di N che colle successive trasformazioni è passata nell' intervallo ABCD*abcd*;

2.° La porzione rimasta fra ABCD ed S;

3.° La porzione recatasi al di là della S.

La grandezza poi di cotale azione si avrà componendo insieme tutti i cangiamenti d'azione avvenuti nelle dette successive trasformazioni. E siccome nella composizione di più forze, la risultante è sempre minore della somma delle componenti, così quest'azione sarà minore della quantità

$$\frac{1}{n}Q + \frac{1}{n}Q_1 + \frac{1}{n}Q_2 + \ldots + \frac{1}{n}Q_r,$$

ossia della quantità

$$\frac{1}{n}(Q + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_r),$$

essendo $Q + Q_1 + Q_2, \ldots + Q_r$ l'azione che verrebbe esercitata alla distanza AC da tutta la materia dispostasi nell'intervallo ABCD*abcd*.

Immaginiamo adesso soppressa la materia repulsiva rimasta fra ABCD ed S, e quella collocata oltre ad S, e lasciata soltanto quella dispostasi nell'intervallo ABCD*abcd*. È chiaro che l'effetto di questa soppressione equivarrà all'introduzione di due azioni uguali e contrarie a quelle esercitate dalle porzioni di materia soppresse, e perciò minori anch'esse, separatamente considerate, della quantità $\frac{1}{n}Q$. Per conseguenza, rammentando un'altra volta che l'azione totale risultante dall'unione di parecchie azioni parziali è sempre minore della loro somma, noi avremo l'azione della materia repulsiva dispostasi nell'intervallo ABCD*abcd* minore della quantità

$$\frac{1}{n}(Q + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_r) + \frac{1}{n}Q + \frac{1}{n}Q,$$

e però anche minore di

$$\frac{3}{n}(Q + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_r).$$

Fin quì questa quantità di materia dispostasi nell' intervallo ABCD*abcd* non è che una porzione a noi sconosciuta della massa N. Siccome però accrescendone o scemandone in qualsivoglia proporzione la densità e quindi la quantità, cresce o scema nella ragione medesima la sua azione verso qualsivoglia punto dello spazio, così noi potremo ridurla alla grandezza della massa M, e conchiudere che questa massa M può talmente disporsi nell' intervallo ABCD*abcd* da non esercitare sui punti contenuti dentro *abcd* che un' azione minore della frazione $\frac{3}{n}$ moltiplicata per l' azione che essa M può esercitare alla distanza AC.

Ma la n si può prendere di qualsivoglia grandezza senza che mai la conseguenza manchi. Perciò ripetendo più volte da capo l' operazione col dare alla n de' valori gradatamente più grandi, si avrà per la M una serie di disposizioni nell'intervallo ABCD*abcd*, per le quali le azioni di essa verso i punti collocati entro *abcd*, si troveranno al di sotto di limiti successivamente minori, e in fine affatto minimi. Il che ci porta a conchiudere, che è possibile una tale disposizione della massa M nell' intervallo ABCD*abcd* da riuscire affatto nulla la sua azione verso i detti punti compresi entro *abcd*.

La trovata conclusione ha luogo qualunque sia la distanza fra la superficie *abcd* e la ABCD, anche allorquando queste sono estremamente vicine. Da ciò possiamo ricavare la seguente importantissima

PROPOSIZIONE VIII.

12. *Una data quantità di materia ripulsiva può essere per tal modo distribuita alla superficie di un corpo qualsivoglia da non esercitare azione veruna sui punti collocati internamente.*

Siavi chi il neghi, asserendo che disposta in qualunque modo la menzionata quantità di materia repulsiva nella superficie ABCD, e tracciata entro questa una qualche altra superficie

a'b'c'd', vi dee sempre essere, verso qualcuno de' punti situati al di dentro di questa, un' azione non minore di una data *a*. Noi possiamo immaginare descritta fra la ABCD e la *a'b'c'd'* un' altra superficie *abcd*; concepire disposta per tal modo la data quantità di materia nell' intervallo ABCD*abcd*, da non esercitare azione alcuna verso i punti collocati internamente, e in ispecie verso quelli situati entro *a'b'c'd'*; in fine immaginare trasportata tutta questa materia nella superficie ABCD col mezzo di movimenti normali a quest'ultima. E con ciò, supposte abbastanza vicine le due superficie ABCD, *abcd*, avremo verso i suddetti punti interni ad *a'b'c'd'* un cangiamento d'azione, ossia un' azione totale, minore sicuramente di *a*, contro l' asserzione dell' oppositore, la quale perciò era assurda.

13. *Osservazione* I. Io ho forte ragione di credere che la distribuzione superficiale alla quale non corrisponde nessuna azione interna, sia una sola per un dato corpo e per una data quantità di materia repulsiva. Uno degli argomenti si è, che se dopo data questa distribuzione e se noi la immaginiamo alterata togliendo parte di quella materia da un dato piccolo luogo e aggiungendola in un altro, l' azione verso i punti interni cessa dall' esser nulla; in modo che qualunque molecola collocata internamente ed atta a sentire quell' azione repulsiva, viene attratta al luogo stato impoverito e respinta dal luogo stato arricchito. Ma questa conclusione non ho potuto finora estenderla a qualunque maniera di trasportamento della materia repulsiva e a qualunque forma di corpi. Veggasi su ciò anche la Prop. XIII.

14. *Osservazione* II. Non v' è che la ragione inversa de' quadrati delle distanze, la quale renda possibile una tal distribuzione superficiale di una materia repulsiva, da non produrre alcuno effetto sui corpi internamente contenuti. Di che può sufficientemente persuaderci la dimostrazione data pei corpi sferici al §. 7.

PROPOSIZIONE IX.

15. *Dentro ad un corpo di figura qualunque, formato d'una materia repulsiva di densità o uniforme o in qualsivoglia modo variabile e le parti della quale si respingano fra se in ragione inversa del quadrato delle distanze, si può condurre per un punto qualunque una tale superficie chiusa da lasciare esternamente una porzione di esso corpo, che sia affatto priva d'azione verso i punti situati al di dentro di cotal superficie.*

Immaginiamo che nella superficie ABCD di questo corpo venga disposta una piccola porzione di cotal materia ripulsiva, venendovi distribuita in tal modo che sia affatto nulla la sua azione verso i punti collocati internamente, supponendo però che una tale materia venga ceduta da parti del corpo contigue ad essa superficie ABCD, alla quale essa materia arrivi movendosi secondo linee normali alla ABCD medesima. Verrà con ciò lasciato un vano sotto questa superficie, e la residua parte del corpo sarà terminata da un' altra superficie A'B'C'D' posta al di dentro della ABCD e assai vicina ad essa. In questa A'B'C'D' immaginiamo distribuita un' altra piccola porzione della detta materia repulsiva nel modo medesimo. E lo stesso immaginiamo fatto colla superficie A''B''C''D'' che succederà alla precedente a rivestire la rimanente parte del corpo. E seguitiamo a fare lo stesso in sino a che il corpo abbia perduto tanta parte della sua materia, che la superficie della parte residua passi per un punto scelto precedentemente ad arbitrio; il che si può conseguire esattamente col prendere in quantità opportuna l' ultima porzione di materia ripulsiva trasportata. Ciò fatto egli è evidente che la materia ripulsiva distribuita nel complesso di tutte queste superficie, non eserciterà azione veruna verso i punti collocati al di dentro di esse tutte. Ed è pure evidente che restituita questa materia ripulsiva alle pristine sue posizioni, non ne avverrà che un piccolissimo cangiamento d' azione, il quale cangiamento poi

costituirà l'azione totale esercitata dallo strato primitivo che ha somministrato cotale materia. E un siffatto cangiamento d'azione, e una siffatta azione totale saranno di tanto maggiore piccolezza, quanto più numerose e più vicine si saranno prese le dette superficie, e più piccolo sarà perciò stato il movimento della materia repulsiva per ritornare alle posizioni primitive; e potranno esso cangiamento d'azione ed essa azion totale riuscire minori di ogni quantità data, col prendere le dette superficie sufficientemente numerose e sufficientemente vicine. Dal che possiamo conchiudere che pel punto dato si può far passare una tale superficie chiusa da lasciare esternamente uno strato di materia repulsiva affatto privo d'azione verso i punti interni (1).

16. *Osservazione* I. Nel corso delle operazioni or ora indicate può succedere che nel far venire materia repulsiva ad una delle superficie ABCD, A'B'C'D', A''B''C''D'' ecc. dallo spazio interno per mezzo di movimenti secondo linee normali a queste superficie, vengano alcune di queste normali a incontrarsi prima di arrivare a tale lunghezza, che alle parti corrispondenti delle superficie suddette possa giungere una sufficiente quantità di materia repulsiva. Così può avvenire p. e. in N e in Q delle fig. 4 e 5, dove la superficie è o troppo incurvata o anche acuminata. In questi casi dopo avere fatto uso dei movimenti normali sino a che le linee normali non si sono incontrate, si guarderà quanta materia ancor manchi dopo quest'incontro, affinchè quelle parti di superficie ne abbiano la debita porzione; e vi si supplirà con della materia presa nello spazio lasciato ancora intatto, da parti più che si può vicine a quelle parti di superficie, p. e. dai coni indicati

---

(1) Pe' corpi omogenei pochissimo differenti dalla sfera quest'ultima conseguenza era già stata dimostrata da Laplace; il quale si era altresì accinto a determinare l'interna superficie del sovrammenzionato strato, ammettendo, in luogo di una forza repulsiva, l'attrazione di gravitazione. *Meccanica celeste* T. II, Capo II, §. 13.

abc, def. Siccome anche in tali casi il cammino percorso dalla materia ripulsiva è piccolissimo, così regge ancora la medesima dimostrazione, e la medesima conseguenza.

17. *Osservazione* II. Per certe forme di corpi, se si va prendendo successivamente più grosso lo strato che manca d' azione verso i punti interni, viene finalmente il residuo del corpo ad essere formato di più parti interrotte. Così avverrebbe in un sistema di due sfere, ineguali se si voglia di grandezza e unite da un sottile cilindro, essendo sì questo che quelle di una medesima uniforme densità. Determinando in questo sistema uno strato mancante d' azione verso i punti interni, e pigliando questo strato successivamente più grosso, arriva esso infine ad occupare in qualche punto tutta la grossezza del cilindro, e a interrompere la continuità della materia residua. A ciascuna poi delle parti interrotte possono ancora levarsi altri ed altri strati privi anch' essi d' azione verso i rispettivi punti interni: ma non è quì il luogo di occuparci di ciò. Basti quì il notare che questo interrompimento non ha luogo quando dal corpo si levano strati assai sottili.

18. *Osservazione* III. Se in una massa indefinita di materia ripulsiva di una densità o uniforme o in qualsivoglia modo variabile, si immagina condotta una superficie qualunque, all' esterno di essa può sempre trovarsene un' altra passante per un punto dato e tale che lo strato compreso fra le due superficie non eserciti azione alcuna sui punti interni. Chiamata infatti A la superficie immaginata, si concepisca distribuita in essa una piccola quantità di materia ripulsiva priva di azione verso i punti interni, fatta venire in essa A dall' esterno della massa indefinita supposta, per mezzo di movimenti normali alla A medesima. Sulla nuova superficie che si verrà a formare al di fuori di A, e che dirò A′, si immagini fatta la stessa operazione; e così sull' altra nuova superficie A″ che verrà a risultarne, continuando infino a che si arrivi al punto dato; e infine si immaginino ravvicinate e moltiplicate all'infinito queste superficie A′, A″ ec. E con un ragio-

namento simile a quello del §. 14 si arriverà alla conseguenza proposta.

PROPOSIZIONE X.

19. Supponiamo che dentro al vano chiuso da una superficie qualsivoglia ABCD si trovi contenuta una certa quantità di una materia repulsiva respingentesi nella ragione tante volte nominata de' quadrati inversi delle distanze, e capace di potersi ridurre, senza opporre veruna resistenza, a una densità assaissimo più grande di quella che corrisponderebbe a una densità uniforme dentro a quel vano, ma che però al di là di certo condensamento opponga una forte resistenza diversa dalla repulsione già menzionata, e analoga a quella dell'impenetrabilità. Si asserisce che *questa materia non potrà trovare equilibrio dentro a quello spazio se non disponendosi in uno strato assai sottile contiguo alla superficie* ABCD, *e non esercitante azione alcuna sui punti interni.*

Suppongasi che per un istante abbia luogo una disposizione diversa, tale che vi abbia di cotal materia in tutte le parti del suddetto spazio chiuso, anche in quelle più lontane dalla superficie. Si concepisca condotta per un punto qualsivoglia *a* di questo spazio una superficie *abcd* la quale lasci all' esterno di se uno strato di essa materia repulsiva che sia affatto privo d' azione verso i punti collocati entro *abcd*, e che non arrivi a quella densità a cui ha luogo la resistenza all' avvicinamento analoga all' impenetrabilità. La parte di cotale materia che è contenuta dentro *abcd*, si troverà in piena balìa della vicendevole ripulsione delle sue parti, come se fosse in un luogo affatto vacuo; di maniera che ella tenderà ad espandersi al di fuori di essa *abcd*, senza che la materia esistente fra *abcd* ed ABCD eserciti veruno sforzo per opporsi a questa espansione. Non avremo adunque equilibrio, ma bensì movimento della materia repulsiva verso l' esterno; e questo movimento non cesserà sino a che una siffatta materia ripulsiva non siasi tutta condensata alla superficie, a quella den-

sità sino a cui le sue parti possono arrivare, e lasciando vacuo l'interno. Giunta poi a questo stato non potrà ella ancora essere in equilibrio finchè non siasi disposta in uno strato non avente azione alcuna verso i punti situati internamente. Suppongasi in fatti che giunta presso la superficie ella non abbia ancora presa una siffatta disposizione. Noi potremo considerare lo strato K da essa allora formato, siccome nato da un altro strato *k* non esercitante azione alcuna verso i punti interni, e al quale siasi levata di questa materia da un lato per porla, pure internamente da un altro lato; e contentandoci dell'evidenza fisica, senza pretendere al rigore geometrico, noi veggiamo che con questo traslocamento verrebbe indebolita la forza ripulsiva delle parti scemate, e invigorita quella delleparti accresciute, e che la materia traslocata verrebbe per cotal cangiamento di forze sospinta via da queste ultime parti verso le prime.

20. *Osservazione* I. Se la materia ripulsiva non opponesse nessuna resistenza alla sua condensazione, non si potrebbe ella in tal caso ridurre all'equilibrio, se non disponendosi interamente nella superficie ABCD, e accumulandosi ove più e ove meno ne' diversi punti di questa, in guisa da non esercitare azione alcuna verso i punti dello spazio interno.

21. *Osservazione* II. Con questa Proposizione viene esteso a tutte le specie di corpi quello che avevamo enunciato alla fine del §. 6 riguardo alle sfere.

22. *Corollario.* Ammettiamo ora che la materia ripulsiva di cui si tratta sia del fluido elettrico sovrabbondante in un corpo conduttore cinto da aria asciutta o da altro mezzo coibente. Supposto dapprincipio che il fluido naturale di un tal corpo sia affatto immobile, *quello sovrabbondante, lasciato in balìa delle proprie forze, nel prendere la disposizione di equilibrio si disporrà tutto alla superficie in uno strato sottilissimo non esercitante azione alcuna verso i punti interni.* E supposto di poi che venga lasciato libero al moto anche il fluido naturale, coll'anzidetta distribuzione si troverà in equilibrio altresì quest'ultimo.

PROPOSIZIONE XI.

23. *Ne' conduttori isolati, e liberi da azioni straniere l'elettricità negativa si distribuisce allo stesso modo come la positiva.*

Ammettansi nel fluido elettrico le due azioni menzionate nel §. 6, cioè una ripulsione fra le sue parti, e un' attrazione verso la materia pesante, operanti entrambe in ragione inversa de' quadrati delle distanze. E si abbia un qualsivoglia corpo C allo stato naturale. Sotto la superficie di questo si supponga descritta un' altra superficie tale che lasci al di fuori uno strato d' elettrico appartenente alla dose naturale, il quale strato uguagli nella massa l' elettrico che si intende di levare al corpo, e sia determinato in modo da non esercitare azione alcuna verso le molecole del fluido interno. È facile a vedersi che tolto via questo strato dal corpo, non cesseranno le molecole del fluido naturale interno dal trovarsi in equilibrio. Perocchè se si equilibrano fra loro diverse forze ripulsive operanti su di una data molecola del fluido naturale interno, quali sono le forze ripulsive che venivano esercitate dal fluido sottratto, l'equilibrio dovrà sussistere ancora quando a queste si sostituiscano altrettante forze attrattive della medesima grandezza, quali sono le forze esercitate su quella data molecola di fluido naturale, dalla materia pesante che da quella sottrazione è rimasta spoglia d' elettrico. Dovrà per conseguenza esser quella la distribuzione di equilibrio del fluido rimasto, dopo fatta la suddetta sottrazione.

Immaginiamo ora che si abbia un altro corpo conduttore C' uguale e simile al C, e che essendo prima allo stato naturale, gli si aggiunga una quantità sovrabbondante d'elettrico perfettamente uguale a quella levata da C. Si asserisce che dopo ridottasi questa quantità aggiunta allo stato di equilibrio, avrà essa sensibilmente la stessa distribuzione dello strato levato da C; vale a dire che prendendo nello strato aggiunto a C' e in quello levato a C due porzioni di fluido elettrico in-

sistenti normalmente a porzioni omologhe delle superficie de' due corpi, saranno queste porzioni prossimamente eguali. Immaginiamo infatti che ogni molecola del fluido aggiunto a C' sia per un momento trasportata e condensata alla superficie di esso C' col mezzo di movimenti normali a questa superficie ; e che una simile cosa si faccia rispetto al fluido dello strato levato da C. Essendo piccolissimo il movimento delle parti in ciascuno de' due strati, dee di necessità esser pochissimo il cangiamento delle forze operanti sui punti interni, pochissimo il disequilibrio che verrà a risultarne, e pochissimo tanto nell' uno che nell' altro strato il cangiamento di distribuzione necessario a rimettere l'equilibrio. Per conseguenza le distribuzioni dell' elettrico ne' due strati dopo il trasportamento alla superficie differiscono pochissimo dalla distribuzione superficiale di equilibrio, e sono perciò vicinissime fra loro.

PROPOSIZIONE XII.

24. *Determinare l' azione che lo strato di fluido elettrico sovrabbondante in un corpo conduttore e in esso ridotto allo stato di equilibrio esercita sulle proprie più superficiali molecole.*

Lemma I. Siano QA, MB (*fig.* 6) due archi circolari concentrici, aventi le due estremità A e B in una retta passante pel comun centro O, e le due Q ed M in una retta QMD perpendicolare ad AO. E immaginiamo che il quadrilatero mistilineo QMBA rotando intorno alla retta OA generi un solido, il quale sia formato d'una materia di densità uniforme e dotata d' una forza ripulsiva operante in ragione inversa de' quadrati delle distanze. Si vogliono le azioni esercitate da questo solido su d' un punto fisico collocato in A, e su d' uno collocato in B.

Chiamisi P l' azione che verrebbe esercitata su d'uno di cotali punti fisici da una porzione della materia del solido in quistione, corrispondente al volume 1 e supposta concentrata in un punto alla distanza 1 ;

S l' azione esercitata sul punto A dal segmento sferico nato dalla rotazione del triangolo mistilineo BMD, nel supposto che questo segmento sia della materia e della densità del solido che consideriamo;

S' l' azione esercitata su A dal segmento sferico nato dalla rotazione del triangolo AQD, nel supposto come sopra;

X l' azione esercitata su A dal solido in questione, e la quale si tratta di determinare,

Posto
$$BA = a$$
$$BO = R,$$
$$BD = m,$$
$$BE = x,$$
$$EF = y,$$

avremo evidentemente

$$S = P\int dx \int dy \; \frac{2\pi y(a+x)}{[(a+x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}},$$

essendo le integrazioni estese fra i limiti

$$y = 0, \; y = \sqrt{x(2R-x)};$$
$$x = 0, \; x = m.$$

Avremo S' ponendo nel valore di S

$$a = 0, \; m' \text{ in luogo di } m, \; R' \text{ in luogo di } R,$$

e quindi facendo

$$m' = a + m,$$
$$R' = a + R.$$

E sarà finalmente
$$X = S' - S.$$

Eseguendo le integrazioni indicate, avremo

$$S=P2\pi\int dx\left[-\frac{(a+x)}{\sqrt{(a+x)^2+y^2}}+\text{cost.}\right]$$

$$=P.2\pi\int dx\left[1-\frac{(a+x)}{\sqrt{(a+x)^2+x(2R-x)}}\right]$$

$$=P.2\pi\int dx\left[1-\frac{a+x}{\sqrt{a^2+2ax+2Rx}}\right]$$

$$=P.2\pi\left[x-\frac{(a+x)\sqrt{a^2+2ax+2Rx}}{a+R}+\int dx\,\frac{\sqrt{a^2+2ax+2Rx}}{a+R}\right]$$

$$=P.2\pi\left[x-\frac{(a+x)\sqrt{a^2+2ax+2Rx}}{(a+R)}+\frac{(a^2+2ax+2Rx)^{\frac{3}{2}}}{(a+R)\frac{3}{2}(2a+2R)}+\text{cost.}\right]$$

$$=P.2\pi\left[m-\frac{(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{(a+R)}+\frac{(a^2+2am+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{3(a+R)^2}+\frac{a^2}{a+R}-\frac{a^3}{3(a+R)^2}\right]$$

$$S'=P.2\pi\left[m'-\frac{m'\sqrt{2R'm'}}{R'}+\frac{2R'm'.\sqrt{2R'm'}}{3R'R'}\right]$$

$$=P.2\pi\left[m'-\frac{m\sqrt{2m'}}{3\sqrt{R'}}\right]$$

$$=P.2\pi\left[a+m-\frac{1}{3}\,\frac{(a+m)\sqrt{2(a+m)}}{\sqrt{a+R}}\right.$$

$$X=P.2\pi\left[a+m-\frac{1}{3}\,\frac{(a+m)\sqrt{2(a+m)}}{\sqrt{a+R}}\right.$$

$$\left.-m+\frac{(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{a+R}-\frac{(a^2+2am+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{3(a+R)^2}-\frac{a^2}{a+R}+\frac{a^3}{3(a+R)^2}\right]$$

$$=P.2\pi\left[a-\frac{a^2}{a+R}+\frac{a^3}{3(a+R)^2}-\frac{1}{3}\,\frac{(a+m)\sqrt{2(a+m)}}{\sqrt{a+R}}\right.$$

$$\left.+\frac{(a+m)\sqrt{a^2+2am+R2m}}{(a+R)}-\frac{(a^2+2am+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{3(a+R)^2}\right].$$

Chiamiamo ora

Y l' azione esercitata dallo stesso solido verso il punto B: si avrà questa col determinare:

1.° l' azione T esercitata su B dal pezzo di sfera nato dalla rotazione intorno ad AO, del quadrilatero mistilineo KBDQ, ove la retta BK è parallela alla DQ;

2.° l' azione T' esercitata su B dal segmento di sfera nato dalla rotazione del triangolo mistilineo BMD;

3.° l' azione T'' esercitata sullo stesso punto B dal segmento di sfera nato dalla rotazione del triangolo mistilineo AKB.

Perciocchè sarà

$$Y=T-T'-T'';$$

e tenderà essa azione a spingere il punto B verso A o verso D secondo che il suo valore si troverà essere positivo o negativo.

Per determinare T, poniamo ancora

$$BE=x$$

$$EF=y;$$

e adottate le altre denominazioni usate poc' anzi, avremo

$$T=P.\int dx\int dy.\frac{2\pi yx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

essendo le integrazioni estese fra i limiti

$$y=0,\ y=\sqrt{(a+x)(2R+a-x)},$$

$$x=0,\ x=m.$$

Sarà perciò

$$\mathrm{T} = \mathrm{P}.2\pi\int dx\left[-\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}+\text{cost.}\right]$$

$$= \mathrm{P}.2\pi\int dx\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+2\mathrm{R}a+2\mathrm{R}x+a^2-x^2}}\right]$$

$$= \mathrm{P}.2\pi\int dx\left[1-\frac{x}{\sqrt{a^2+2\mathrm{R}a+2\mathrm{R}x}}\right]$$

$$= \mathrm{P}.2\pi\left[x-x\frac{\sqrt{a^2+2\mathrm{R}a+2\mathrm{R}x}}{\mathrm{R}}+\int dx\,\frac{\sqrt{a^2+2\mathrm{R}a+2\mathrm{R}x}}{\mathrm{R}}\right]$$

$$= \mathrm{P}.2\pi\left[x-x\frac{\sqrt{a^2+2\mathrm{R}a+2\mathrm{R}x}}{\mathrm{R}}+\frac{(a^2+2\mathrm{R}a+2\mathrm{R}x)^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{R}.\frac{3}{2}.2\mathrm{R}}+\text{cost.}\right]$$

$$= \mathrm{P}.2\pi\left[m-m\frac{\sqrt{a^2+2\mathrm{R}a+2\mathrm{R}m}}{\mathrm{R}}+\frac{(a^2+2\mathrm{R}a+2\mathrm{R}m)^{\frac{3}{2}}}{3\mathrm{R}^2}-\frac{(a^2+2\mathrm{R}a)^{\frac{3}{2}}}{3\mathrm{R}^2}\right].$$

Il valore di T′ si avrà immediatamente col porre $a=0$ nel valore di T; e perciò sarà

$$\mathrm{T}'= \mathrm{P}.2\pi\left[m-\frac{m\sqrt{2\mathrm{R}m}}{\mathrm{R}}+\frac{2\mathrm{R}m\sqrt{2\mathrm{R}m}}{3\mathrm{R}^2}\right]$$

$$= \mathrm{P}.2\pi\left[m-\frac{1}{3}\,\frac{m\sqrt{2m}}{\sqrt{\mathrm{R}}}\right]$$

per avere T″, poniamo

$$\mathrm{AP}=x$$

$$\mathrm{PV}=y.$$

sarà

$$\mathrm{T}''=\mathrm{P}\int dx\int dy\,\frac{2\pi(a-x)y}{[(a-x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}},$$

essendo estese le integrazioni fra i limiti

$$y=0,\ y=\sqrt{x(2\mathrm{R}+2a-x)}$$

$$x=0,\ x=a$$

perciò

$$T'' = P.2\pi \int dx \left[-\frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}} + \text{cost.} \right]$$

$$= P.2\pi \int d \left[x \, 1 - \frac{(a-x)}{\sqrt{a^2-2ax+x^2+2Rx+2ax-x^2}} \right]$$

$$= P.2\pi \int dx \left[1 - \frac{(a-x)}{\sqrt{a^2+2Rx}} \right]$$

$$= P.2\pi \left[x - \frac{\sqrt{a^2+2Rx}}{R}(a-x) + \int dx \frac{(-1)}{R} \sqrt{a^2+2Rx} \right]$$

$$= P.2\pi \left[x - \frac{\sqrt{a^2+2Rx}(a-x)}{R} - \frac{1}{R} \frac{(a^2+2Rx)^{\frac{3}{2}}}{3R} + \text{cost.} \right]$$

$$= P.2\pi \left[a - \frac{1}{3R^2}(a^2+2Ra)^{\frac{3}{2}} + \frac{a^2}{R} + \frac{a^3}{3R^2} \right]$$

donde

$$Y = P.2\pi \left[m - \frac{m\sqrt{a^2+2Ra+2Rm}}{R} + \frac{(a^2+2Ra+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{3R^2} - \frac{(a^2+2Ra)^{\frac{3}{2}}}{3R^2} \right.$$

$$\left. - m + \frac{1}{3} \frac{m\sqrt{2m}}{\sqrt{R}} - a - \frac{a^2}{R} - \frac{a^3}{3R^2} + \frac{(a^2+2Ra)^{\frac{3}{2}}}{3R^2} \right]$$

$$= P.2\pi \left[-a - \frac{a^2}{R} - \frac{a^3}{3R^2} + \frac{1}{3} \frac{m\sqrt{2m}}{\sqrt{R}} - \frac{m\sqrt{a^2+2Ra+2Rm}}{R} \right.$$

$$\left. + \frac{(a^2+2Ra+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{3R^2} \right].$$

25. Lemma II. Quando la grossezza AB del solido testè considerato è estremamente piccola e affatto trascurabile in confronto del raggio BO, e la saetta BD è assai grande in confronto di essa grossezza AB, ma assai piccola in confronto di esso raggio BO, i due valori di X e Y sono prossimamente uguali.

Per dimostrarlo svolgiamo i valori di X e di Y in serie secondo le potenze crescenti della quantità a, la quale nel presente supposto è piccolissima in confronto di R, e anche

di m, continuando le serie in sino a che i resti sieno, nel detto supposto, minimi e trascurabili in confronto de' termini ottenuti dallo svolgimento suddetto.

Serviamoci a quest'uopo della formola di Lagrange

$$\varphi(a) = \varphi(0) + a.\varphi'(0) + \tfrac{1}{2} a^2.\varphi''(0) \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{a^{n-1}}{2.3\ldots n-1} \varphi^{(n-1)}(0) + \frac{a^n}{2.3\ldots n} \varphi^{(n)}(ka),$$

dove k è un numero convenientemente scelto fra 0 e 1; la quale formola, come avverte Cauchy (1), è sempre legittima quando col dare successivamente a k tutti i valori da 0 a 1, non si hanno mai per $\varphi^{n}(ka)$ nè valori infiniti, nè valori immaginarj, nè salti bruschi da una grandezza ad un' altra. Cominciando dal valore di X, poniamo

$$\varphi(a) = \frac{X}{P2\pi} = a - \frac{a^2}{a+R} + \frac{a^3}{3(a+R)^2} - \frac{\sqrt{2(a+m)}^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{a+R}} + \frac{(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{a+R}$$
$$- \frac{(a^2+2am+2mR)^{\frac{3}{2}}}{3(a+R)^2}$$

da cui

$$\varphi(0) = -\frac{m\sqrt{2.m}^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{R}} + \frac{m\sqrt{R}\sqrt{2m}}{R} - \frac{2Rm\sqrt{2m}\sqrt{R}}{3R^2} = -\frac{m\sqrt{2m}}{3\sqrt{R}} + \frac{m\sqrt{2m}}{\sqrt{R}}$$
$$- \frac{2}{3}\,\frac{m\sqrt{2m}}{\sqrt{R}} = 0$$

$$\varphi'(a) = 1 - \frac{2a}{a+R} + \frac{a^2}{(a+R)^2} + \frac{3a^2}{3(a+R)^2} - \frac{2a^3}{3(a+R)^3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{a+m}}{\sqrt{a+R}}$$
$$+ \frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{(a+m)^{\frac{3}{2}}}{(a+R)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{a+R}$$

(1) *Résumé des Leçons sur le Calcul infinitésimal,* T. 1. p. 143.

$$+\frac{(a+m)^2}{(a+R)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}-\frac{3(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{(a+R)^2}$$

$$+\frac{2}{3}\frac{(a^2+2am+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{(a+R)^3}-\frac{3(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{3(a+R)^2}$$

$$=1-\frac{2aR}{(a+R)^2}-\frac{2a^3}{3(a+R)^3}-\frac{\sqrt{a+m}}{\sqrt{2}\sqrt{a+R}}+\frac{\sqrt{2}}{6}\frac{(a+m)^{\frac{3}{2}}}{(a+R)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{a+R}$$

$$+\frac{(a+m)^2}{(a+R)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}-\frac{2(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{(a+R)^2}+\frac{2}{3}\frac{(a^2+2am+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{(a+R)^3}$$

da cui

$$\varphi'(0)=1-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}.\sqrt{R}}+\frac{\sqrt{2}}{6}\frac{m\sqrt{m}}{R\sqrt{R}}+\frac{\sqrt{2}.\sqrt{R}.\sqrt{m}}{\sqrt{R}}+\frac{m^2}{R\sqrt{2m}\sqrt{R}}$$

$$-\frac{2m\sqrt{R}.\sqrt{2m}}{R^2}+\frac{2}{3}\frac{2Rm.\sqrt{2m}\sqrt{R}}{R^3}$$

$$=1-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{R}}+\frac{m\sqrt{2m}}{6.R\sqrt{R}}+\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{R}}+\frac{m\sqrt{2m}}{2R\sqrt{R}}-\frac{2m\sqrt{2m}}{R\sqrt{R}}+\frac{4}{3}\frac{m\sqrt{2m}}{R\sqrt{R}}$$

$$=1+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{R}}$$

$$\varphi''(a)=-\frac{2R}{(a+R)^2}+\frac{4aR}{(a+R)^3}-\frac{6a^2}{3(a+R)^3}+\frac{6a^3}{3(a+R)^4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+m}\sqrt{a+R}}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{a+m}}{(a+R)^{\frac{3}{2}}}-\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{a+m}}{(a+R)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{(a+m)^{\frac{3}{2}}}{(a+R)^{\frac{5}{2}}}+\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{3}{2}$$

$$+\frac{(a+m)}{(a+R)\sqrt{a^2+2am+2mR}}-\frac{\sqrt{a^2+2am+2mR}}{(a+R)^2}+\frac{2(a+m)}{(a+R)\sqrt{a^2+2am+2mR}}$$

$$-\frac{(a+m)^2}{(a+R)\sqrt{a^2+2am+2Rm)}}-\frac{(a+m)^3}{(a+R)(a^2+2am+2mR)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2\sqrt{a^2+2am+2mR}}{(a+R)^2}$$

$$-\frac{2(a+m)^2}{(a+R)\sqrt{a^2+2am+2mR}}+\frac{4(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{(a+R)^3}+\frac{2(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{(a+R)^3}$$

$$-\frac{2(a^2+2am+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{(a+R)^4}=-\frac{2R}{(a+R)^2}+\frac{4aR}{(a+R)^3}-\frac{2a^2R}{(a+R)^4}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{a+m}\,.\sqrt{a+R}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{a+m}}{(a+R)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{(a+m)^{\frac{3}{2}}}{(a+R)^{\frac{5}{2}}}-\frac{3\sqrt{a^2+2am+2mR}}{(a+R)^2}$$

$$+\frac{6(a+m)\sqrt{a^2+2am+2Rm}}{(a+R)^3}+\frac{3(a+m)}{(a+R)\sqrt{a^2+2am+2mR}}-\frac{3(a+m)^2}{(a+R)^2\sqrt{a^2+2am+2Rm}}$$

$$-\frac{2(a^2+2am+2mR)^{\frac{3}{2}}}{(a+R)^3}-\frac{(a+m)^3}{(a+R)(a^2+2am+2mR)^{\frac{3}{2}}}.$$

Proviamo a vedere se basta all'uopo nostro, pel presente valore di X, lo avere la serie sotto la forma:

$$\varphi(a)=\varphi(0)+a\varphi'(0)+\frac{a^2}{2}\varphi''(ka).$$

Al qual fine osserviamo, se ponendo ka in luogo di a ne' diversi termini del valore di $\varphi''(a)$ e quindi moltiplicandoli per $\frac{a^2}{2}$, diventino tutti incomparabilmente minori della somma

$$\varphi(0)+a\varphi'(0)$$

ossia di

$$a\left[1+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{R}}\right];$$

ossia anche se essi termini, dopo sostituito semplicemente ka in luogo di a, riescano incomparabilmente minori di $\frac{1}{a}$.

Facendo questa sostituzione nel primo termine, avremo

$$-\frac{2R}{(ka+R)^2}=-\frac{2R^2}{R(ka+R)^2}=-\frac{2k'}{R},$$

dove k' è una quantità compresa fra o e 1, diversa da k. La legittimità della quale riduzione si riconosce considerando che $\frac{R^2}{(ka+R)^2}$ è minore di 1. Ora essendo a incomparabilmente minore di R, si ha anche $\frac{1}{R}$ incomparabilmente minore di $\frac{1}{a}$; e questo primo termine gode perciò del pregio che in esso si desidera. Proseguiamo, e indichiamo sempre con k' de' numeri compresi fra o e 1, e che possono essere diversi sì da k che fra se stessi. Avremo

$$\frac{4kaR}{(ka+R)^3} = \frac{4akR^3}{R^2(ka+R)^3} = \frac{k}{R} \cdot \frac{4a}{R} \cdot \left(\frac{R}{ka+R}\right)^3 = \frac{k'}{R}$$

dove l' ultimo secondo membro gode anch' esso del desiderato pregio.

$$-\frac{2k^2a^2R}{(ka+R)^4} = -\frac{2a^2.k^2.R^4}{R^3(ka+R)^4} = -\frac{k^2}{R} \cdot \frac{2a}{R} \cdot \frac{a}{R} \cdot \left(\frac{R}{(ka+R)}\right)^4 = -\frac{k'}{R},$$

dove si può dire lo stesso. Segue il termine

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{ka+m}\sqrt{ka+R}};$$

del quale però non si può dire la medesima cosa come degli altri, essendo la quantità $\frac{1}{\sqrt{mR}}$ assai più grande di $\frac{1}{R}$. Lo lasceremo perciò un momento da banda, per isvolgerlo di poi ulteriormente in serie. Passiamo agli altri; e sarà

$$+\frac{\sqrt{ka+m}}{\sqrt{2}.(ka+R)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(ka+m)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}.(ka+R)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{ka+m}\left(ka+R-\frac{ka}{2}-\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{2}.\sqrt{ka+R}.(ka+R)^2} = \frac{\sqrt{ka+m}\left(R+\frac{ka}{2}-\frac{m}{2}\right)R}{\sqrt{2}.\sqrt{ka+R}.(ka+R)(ka+R)} \cdot \frac{1}{R}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{k'}{R},$$

dove i due termini del primo membro si sono potuti sommare, per essere la k dello stesso valore in entrambi, siccome uguale a quella contenuta in $\varphi''(ka)$.

$$-\frac{3\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}{(ka+R)^2}=-\frac{3}{R}\cdot\frac{R}{(ka+R)}\cdot\frac{\sqrt{k^2a^2+2akm+2mR}}{(ka+R)}=-\frac{3k'}{R};$$

$$\frac{6(ka+m)\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}{(ka+R)^3}=\frac{6R.(ka+m).\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}{R.(ka+R)(ka+R)(ka+R)}=\frac{6k'}{R};$$

$$\frac{3(ka+m)}{(ka+R)\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}-\frac{3(ka+m)^2}{(ka+R)^2\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}$$

$$=\frac{3(ka+m)(ka+R-ka-m)}{(ka+m)^2\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}=\frac{3R.(R-m)(ka+m)}{R(ka+R)(ka+R)\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}=\frac{3k'}{R};$$

$$-\frac{2(k^2a^2+2kam+2mR)^{\frac{3}{2}}}{(ka+R)^4}=-\frac{2}{R}\cdot\frac{R}{ka+R}\cdot\left(\frac{\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}{ka+R}\right)=-\frac{2k'}{R};$$

$$-\frac{(ka+m)^3}{(ka+R)(k^2a^2+2kam+2mR)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{R}\cdot\frac{R}{ka+R}\cdot\left(\frac{ka+m}{\sqrt{k^2a^2+2kam+2mR}}\right)^3$$

$$=-\frac{k'}{R}.$$

Ed anche in queste sei ultime equazioni gli ultimi secondi membri godono della qualità che si desidera. Unendo tutto insieme si ha

$$\varphi''(ka)=-\frac{1}{R}(2k'+k'+3k'+2k'+k')+\frac{1}{R}(k'+\frac{k'}{\sqrt{2}}+6k'+3k')$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}.\sqrt{ka+m}\sqrt{ka+R}}=\frac{11.k'}{R}-\frac{9.k'}{R}-\frac{1}{2\sqrt{2}.\sqrt{ka+m}\sqrt{ka+R}}.$$

Svolgiamo ora in serie la quantità

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{ka+m}\sqrt{ka+R}}.$$

Ponendo $ka = b$, e indicando la detta quantità per $\psi(b)$, si potrà porre

$$\psi(b) = \psi(0) + b\psi'(k'b)$$

Ora

$$\psi(0) = -\frac{1}{2\sqrt{2mR}}$$

$$\psi'(b) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{2(b+m)^{\frac{3}{2}}\sqrt{b+R}}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{2\sqrt{b+m}\,(b+R)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\psi'(kb') = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1}{(k'b+m)^{\frac{3}{2}}\sqrt{k'b+R}}$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{k'b+m}(k'b+R)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{k''}{m} \cdot \frac{k''}{\sqrt{m}} \cdot \frac{k''}{\sqrt{R}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{k''}{\sqrt{m}} \cdot \frac{k''}{R} \cdot \frac{k''}{\sqrt{R}}$$

perciò

$$\psi(b) = -\frac{1}{2\sqrt{2mR}} + \frac{ka}{4\sqrt{2}}\left(\frac{k''}{m\sqrt{mR}} + \frac{k''}{R\sqrt{mR}}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2mR}} + \frac{k''}{4\sqrt{2}}\,\frac{a}{m\sqrt{mR}} + \frac{k''}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{R\sqrt{mR}}.$$

Ora nel secondo termine dell' ultimo membro la quantità $\frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt{mR}}$, che è già assai piccola in confronto di $\frac{1}{a}$, si trova moltiplicata per la quantità piccolissima $\frac{a}{m}$; sarà dunque esso termine di un valore piccolissimo, e potremo contentarcene senza pensare ad altri svolgimenti. Il terzo termine poi si può mettere sotto la forma $\frac{k'}{R}$.

Avremo perciò

$$\varphi''(ka)=\frac{11k''}{R}-\frac{9k'}{R}-\frac{1}{2\sqrt{2mR}}+\frac{k'a}{4m\sqrt{2mR}}+\frac{'k'}{R}$$

$$=\frac{12k'}{R}-\frac{9k'}{R}-\frac{1}{2\sqrt{2mR}}+\frac{k'a}{4m\sqrt{2mR}}$$

dove non si eseguisce la sottrazione ne' due primi termini del secondo membro, atteso il diverso valore che può in essi avere la k'. Raccogliendo adunque i valori di $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(ka)$ avremo

$$\varphi(a)=\varphi(0)+a\varphi'(0)+\frac{a^2}{2}\varphi''(ka)$$

$$=a\left(1+\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}}\right)+\frac{a^2}{2}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2mR}}+\frac{12k'}{R}-\frac{9k'}{R}+\frac{ak'}{4m\sqrt{2mR}}\right)$$

$$=a\left(1+\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}}\right)-\frac{a^2}{4\sqrt{2mR}}+\frac{6a^2k'}{R}-\frac{9a^2k'}{2R}+\frac{a^3k'}{8m\sqrt{2mR}},$$

da cui

$$X=P.2\pi.\varphi(a)$$

$$=P.2\pi a\left[1+\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}}-\frac{a}{4\sqrt{2mR}}+\frac{6ak}{R}-\frac{9a^2k}{2R}+\frac{a^2k}{8m\sqrt{2mR}}\right],$$

essendo tutte le k delle quantità fra 0 e $+1$, le quali possono essere diverse sì fra di se che con quella indicata precedentemente colla medesima lettera.

Veniamo ora alla Y. Poniamo

$$\chi(a)=-\frac{Y}{P.2\pi}=a+\frac{a^2}{R}+\frac{a^3}{3R^2}-\frac{m\sqrt{2m}}{3\sqrt{R}}+\frac{m\sqrt{a^2+2Ra+2Rm}}{R}$$

$$-\frac{(a^2+2Ra+2Rm)^{\frac{3}{2}}}{3R^2}.$$

Sarà

$$\chi(a)=\chi(0)+a\chi'(0)+\frac{a^2}{2}\chi''(ka),$$

essendo qui pure k una conveniente quantità fra o e $+1$; e si avrà

$$\chi(0) = -\frac{m\sqrt{2m}}{3\sqrt{R}} + \frac{m\sqrt{R}.\sqrt{2m}}{R} - \frac{2mR.\sqrt{2m}\sqrt{R}}{3RR}$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{m\sqrt{2m}}{\sqrt{R}} + \frac{m\sqrt{2m}}{\sqrt{R}} - \frac{2}{3}\frac{m\sqrt{2m}}{\sqrt{R}}$$

$$= 0$$

$$\chi'(a) = 1 + \frac{2a}{R} + \frac{a^2}{R^2} + \frac{m(a+R)}{R\sqrt{a^2+2Ra+2mR}} - \frac{3(a+R)\sqrt{a^2+2aR+2mR}}{3R^2},$$

$$\chi'(0) = 1 + \frac{m}{\sqrt{2mR}} - \frac{1}{R}\sqrt{2mR} = 1 + \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{R}} - \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{R}} = 1 - \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{R}},$$

$$\chi''(a) = \frac{2}{R} + \frac{2a}{R^2} + \frac{m}{R\sqrt{a^2+2aR+2mR}} - \frac{m(a+R)^2}{R(a^2+2aR+2Rm)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{(a+R)^2}{R^2\sqrt{a^2+2aR+2mR}} - \frac{\sqrt{a^2+2aR+2mR}}{R^2}$$

$$= \frac{2}{R} + \frac{2a}{R^2} + \frac{m}{R}\frac{(a^2+2aR+2mR-a^2-2aR-R^2)}{(a^2+2aR+2mR)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(a^2+2aR+R^2+a^2+2aR+2mR)}{R^2\sqrt{a^2+2aR+2mR}}$$

$$= \frac{2}{R} + \frac{2a}{R^2} + \frac{m(2m-R)}{(a^2+2aR+2mR)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(R^2+2mR+4aR+2a^2)}{R^2\sqrt{a^2+2aR+2mR}}$$

$$= \frac{2}{R} + \frac{2a}{R^2} + \frac{2m^2}{(a^2+2aR+2mR)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2a^2+4aR+2mR}{R^2\sqrt{a^2+2aR+2mR}} - \frac{Rm}{(a^2+2aR+2mR)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{a^2+2aR+2mR}};$$

$$\chi''(ka) = \frac{2}{R} + \frac{2ka}{R^2} + \frac{2m^2}{(kka^2+2kaR+2mR)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(2k^2a^2+4kaR+2mR)}{R^2\sqrt{k^2a^2+2kaR+2mR}}$$

$$- \frac{Rm}{(k^2a^2+2kaR+2mR)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{k^2a^2+2kaR+2mR}}.$$

Ora esaminando ad uno ad uno i termini del secondo membro, si ha

$$\frac{2ka}{R^2}=\frac{k}{R}\cdot\frac{2a}{R}=\frac{k'}{R}$$

$$\frac{2m^2}{\overline{k^2a^2+2kaR+2mR}^{\frac{3}{2}}}=\frac{2m.m}{(k^2a^2+2kaR+2mR)\sqrt{k^2a^2+2kaR+2mR}}=\frac{k'.2m}{2mR}\cdot\frac{mk'}{\sqrt{2mR}}$$

$$=\frac{k'}{R}\cdot\frac{\sqrt{m}.\sqrt{m}.k'}{\sqrt{2m}.\sqrt{R}}=\frac{k'}{R}$$

$$-\frac{(2k^2a^2+4ak.R+2mR)}{R^2\sqrt{k^2a^2+2kaR+2mR}}=-\frac{1}{R}\cdot\frac{\left(2m+4ka+\frac{2k^2a^2}{R}\right)}{\sqrt{k^2a^2+2kaR+2mR}}$$

$$=-\frac{k'}{R}\cdot\frac{\left(2m+4ka+\frac{2k^2a^2}{R}\right)}{\sqrt{2mR}}$$

$$=-\frac{k'}{R}\cdot\frac{2m\left(1+\frac{4ka}{2m}+\frac{2k^2a^2}{2mR}\right)}{\sqrt{2m}\sqrt{R}}$$

$$=-\frac{k'}{R}\cdot\sqrt{\frac{2m}{R}}\left(1+\frac{4ka}{2m}+\frac{2k^2a^2}{2mR}\right),$$

dove quantunque il terzo fattore dell'ultimo secondo membro sia >1, si ha però il secondo fattore tanto <1, che il loro prodotto si dee assolutamente avere per minore di 1. Quindi anche questa quantità possiamo farla

$$=-\frac{k'}{R}.$$

Non così possiamo dire degli ultimi due termini del valore di $\chi''(ka)$, pei quali è perciò necessario un ulteriore sviluppo. Poniamo adunque

$$-\frac{Rm}{(k^2a^2+2kaR+2mR)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{k^2a^2+2kaR+2mR}}$$

$$=V(ka)=V(b)=V(0)+bV'(k'b).$$

Sarà

$$V(b)=-\frac{Rm}{(b^2+2bR+2mR)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{b^2+2bR+2mR}}$$

$$V(0)=-\frac{Rm}{2mR\sqrt{2mR}}-\frac{1}{\sqrt{2mR}}=-\frac{1}{2\sqrt{2mR}}-\frac{1}{\sqrt{2mR}}=-\frac{3}{2\sqrt{2mR}};$$

$$V'(b)=\frac{Rm.3(b+R)}{(b^2+2bR+2mR)^{\frac{5}{2}}}+\frac{(b+R)}{(b^2+2bR+2mR)^{\frac{3}{2}}}$$

$$V'(k'b)=\frac{3Rm(k'b+R)}{(k'k'b^2+2k'bR+2mR)^{\frac{5}{2}}}+\frac{bk'+R}{(k'k'b^2+2k'bR+2mR)^{\frac{3}{2}}}.$$

E perciò

$$-\frac{Rm}{(k^2a^2+2kaR+2mR)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{k^2a^2+2kaR+2mR}}=V(ka)=V(0)+bV'(k'b)$$

$$=-\frac{3}{2\sqrt{2mR}}+\frac{3Rm(k'b+R)b}{(k'k'b^2+2k'bR+2mR)^{\frac{5}{2}}}+\frac{b(bk'+R)}{(k'k'b^2+2k'bR+2mR)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{3}{2\sqrt{2mR}}+\frac{3mRk''a^2}{(2mR)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3R^2mk''a}{(2mR)^{\frac{5}{2}}}+\frac{k''a^2}{(2Rm)^{\frac{3}{2}}}+\frac{k''aR}{(2mR)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{3}{2\sqrt{2mR}}+\frac{3.a.a.k''}{4.mR\sqrt{2mR}}+\frac{3}{4}\,\frac{a.k''}{m\sqrt{2mR}}+\frac{a^2k''}{2Rm\sqrt{2mR}}+\frac{ak''}{2m\sqrt{2mR}}$$

$$=-\frac{3}{2\sqrt{2mR}}+\frac{k''}{R}+\frac{3ak''}{4m\sqrt{2mR}}+\frac{k''}{R}+\frac{2ak'}{4m\sqrt{2mR}}$$

$$=-\frac{3}{2\sqrt{2mR}}+\frac{5ak''}{4m\sqrt{2mR}}+\frac{2k''}{R}.$$

Sarà perciò

$$\chi''(ka) = \frac{2}{R} + \frac{k'}{R} + \frac{k'}{R} - \frac{k'}{R} - \frac{3}{2\sqrt{2mR}} + \frac{5k''a}{4m\sqrt{2mR}} + \frac{2k''}{R}$$

$$= - \frac{3}{2\sqrt{2mR}} + \frac{6k''}{R} - \frac{k''}{R} + \frac{5ak''}{4m\sqrt{2mR}};$$

$$\chi(a) = \chi(0) + a\,\chi'(0) + \frac{a^2}{2}\,\chi''(ka)$$

$$= a\left(1 - \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{R}}\right) + \frac{a^2}{2}\left[- \frac{3}{2\sqrt{2mR}} + \frac{6k''}{R} - \frac{k''}{R} + \frac{5ak''}{4m\sqrt{2mR}}\right]$$

$$= a\left(1 - \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{R}}\right) - \frac{3a^2}{4\sqrt{2mR}} + \frac{3a^2k''}{R} - \frac{a^2k''}{2R} + \frac{5a^3k''}{8m\sqrt{2mR}}.$$

$$Y = - P2\pi.\chi(a)$$

$$= - P.2\pi\left[a\left(1 - \frac{\sqrt{2m}}{2\sqrt{R}}\right) - \frac{3a^2}{4\sqrt{2mR}} + \frac{3a^2k''}{R} - \frac{a^2k''}{2R} + \frac{5a^3k''}{8m\sqrt{2mR}}\right]$$

$$= - P.2\pi a\left[1 - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}} - \frac{3a}{4\sqrt{2mR}} + \frac{3ak}{R} - \frac{ak}{2R} + \frac{5a^2k}{8m\sqrt{2mR}}\right],$$

essendo tutte le k quantità fra 0 e $+1$, e che possono essere diverse sì fra se che da quelle indicate precedentemente colle stesse lettere.

Paragonando ora la X colla Y, noi veggiamo che entrambe differiscono pochissimo in grandezza dalla quantità $P.2\pi a$, e che sono rivolte in direzioni contrarie.

Sia per esempio

$$a = \frac{R}{(1000000)^2}$$

$$m = \frac{R}{1000000}$$

sarà

$$\sqrt{\frac{m}{2R}} = \sqrt{\frac{1}{2000000}} = \frac{1}{1414}$$

$$\frac{a}{\sqrt{2mR}} = \sqrt{\frac{a}{2m}} \cdot \frac{a}{R} = \frac{1}{1000000.1414}$$

$$X = P 2\pi a \left(1 + \frac{1}{1414}\right)$$

$$Y = -P 2\pi a \left(1 - \frac{1}{1414}\right),$$

trascurando in entrambi i secondi membri i termini ulteriori siccome minori di un milionesimo

26. Lemma III. Immaginiamo che lo strato indicato da HANMBI (fig. 7) sia formato da un grandissimo numero di unghie, ciascuna delle quali sia compresa: 1.° da due piani congiunti ad angolo acutissimo nella linea AB; 2.° da due triangoli sferici l'uno de' quali abbia un angolo in B e l'altro in A e le cui sfere abbiano un medesimo centro nel prolungamento della linea AB, variando però questo centro dall'un' unghia all'altra; 3.° da un piano perpendicolare alla linea AB, e condotto ad una distanza BC da B la quale sia grandissima in confronto di AB, ma piccolissima in confronto de' raggi delle sfere cui appartengono i triangoli sferici. Se la materia di cui è formato questo strato è d'una densità uniforme ed è dotata d'un' azione repulsiva operante in ragione inversa de' quadrati delle distanze, la forza con cui essa materia respinge il punto A è prossimamente uguale a quella con cui ella respinge il punto B.

Perciocchè se si chiama $\Delta\omega$ l'angolo acutissimo che fanno fra loro nella linea AB i due piani che comprendono una delle unghie, e si pone $AB = a$, $BC = m$, e si chiama R il raggio della sfera a cui appartiene il triangolo sferico più interno di essa unghia, le azioni che questa può esercitare sul punto A nella direzione BA, e sul punto B nella direzione AB, sono rispettivamente misurate dalle quantità

$$P\Delta\omega . a \left[1 + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}} - \frac{a}{4\sqrt{2mR}} + \frac{6ak}{R} - \frac{9ak}{2R} + \frac{a^2 k}{8m\sqrt{2mR}}\right],$$

$$P\Delta\omega . a \left[1 - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}} - \frac{3a}{4\sqrt{2mR}} + \frac{3ak}{R} - \frac{ak}{2R} + \frac{5a^2 k}{8m\sqrt{2mR}}\right],$$

le quali, pel Lemma II, sono prossimamente uguali.

27. *Osservazione* I. Chiamando h l' azione esercitata sul punto esterno A da tutto lo strato or ora considerato, e h' quella esercitata sul punto interno B, δ la densità della materia di esso strato, avremo

$$P = p\delta,$$

essendo p un altro coefficiente costante; e

$$h = \Sigma . p\delta\Delta\omega . a \left[1 + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}} - \frac{a}{4\sqrt{2mR}} + \frac{6ak}{R} - \frac{9ak}{2R} + \frac{a^2k}{8m\sqrt{2mR}} \right]$$

$$= p\delta a . \Sigma\Delta\omega \left[1 + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}} - \frac{a}{4\sqrt{2mR}} + \frac{6ak}{R} - \frac{9ak}{2R} + \frac{a^2k}{8m\sqrt{2mR}} \right]$$

$$h' = p\delta a . \Sigma . \Delta\omega \left[1 - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}} - \frac{3a}{4\sqrt{2mR}} + \frac{3ak}{R} - \frac{ak}{2R} + \frac{5a^2k}{8m\sqrt{2mR}} \right]$$

il che mostra che h ed h' sono sensibilmente proporzionali al prodotto della grossezza per la densità dello strato, senza dipendere sensibilmente dalla sua figura, nè dalla altezza AC.

28. *Osservazione* II. Se lo strato non è di densità uniforme, h e h' sono allora sensibilmente proporzionali al prodotto della sua grossezza per la sua media densità.

Suppongasi infatti che la densità dello strato cresca dall' interno all' esterno, ossia da B ad A. Noi possiamo riguardare esso strato siccome formato da una moltitudine di strati insieme conpenetrantisi, alcuni più grossi ed alcuni più sottili, aventi tutti la medesima superficie esterna, e dotati ciascuno di uniforme densità. E in questo caso l' azione h dell'aggregato di tutti questi strati verso il punto esterno A sarà data sensibilmente dal prodotto della quantità

$$\Sigma . p . \Delta\omega \left(1 + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}} \right),$$

comune a tutti gli strati parziali, per la somma di tutti i valori che ha la quantità δa ne' diversi strati. Ora questa somma si ha altresì dall' immaginar divisa in un grandissimo numero

di parti la grossezza totale a dello strato totale o complessivo, dal moltiplicare ciascuna minima parte per la somma della densità di quegli strati parziali a cui essa parte corrisponde, e dal sommare tutti questi prodotti; la quale operazione somministra appunto il prodotto della densità media dello strato totale per la grossezza a. Ed è a riflettere che è affatto minimo l' errore nascente dall' ammettere uguali i valori di m e quelli di R dell' espressione

$$\Sigma p.\Delta\omega\left(1+\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}}\right),$$

per tutti gli strati parziali.

Se la densità crescesse dall'esterno, all'interno si avrebbe il valore di h immaginando che da uno strato avente l'intera grossezza a ed avente la più grande delle densità, venissero sottratti moltissimi altri strati di minor grossezza, aventi comune con quello la superficie esterna, e dotati ciascuno di densità uniforme. E si avrebbe ancora l'h misurata sensibilmente da

$$\Sigma p.\Delta\omega.\left[1+\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2R}}\right],$$

moltiplicata pel prodotto della grossezza a per la media densità dello strato. È facile sarebbe lo estendere la dimostrazione a qualunque maniera di variazione della densità dello strato stesso.

Per l' azione h' esercitata sul punto B, conviene immaginare che lo strato considerato risulti dalla somma o dalla differenza di un grandissimo numero di strati parziali, aventi la stessa superficie interna, e dotati ciascuno di densità uniforme. E la conclusione è sempre la stessa.

29. Veniamo dopo tutto ciò alla Proposizione che ci siamo prefissi di dimostrare. Sia PQRS.... (fig. 8) lo strato del fluido sovrabbondante in un conduttore elettrizzato in più. Si scelga nelle superficie esterne di cotale strato un punto

A; si segni B quel punto della superficie interna pel quale passa la normale condotta da A verso l' interno; e si immagini che con un piano HN perpendicolare ad AB venga tagliato in questo strato un piccolissimo segmento IBMNAH, la cui altezza AC sia bensì moltissimo maggiore della grossezza AB dello strato medesimo, ma però moltissimo minore del più piccolo de' raggi di curvatura che ha in A l'esteriore superficie di esso strato, ossia la superficie del corpo. Con che tutta la massa dell'elettrico sovrabbondante verrà distinta in due porzioni, delle quali l'una sarà quella del detto segmento, e l'altra sarà tutta la parte rimanente. Si chiamino h, H le due azioni ripulsive esercitate rispettivamente da queste due porzioni su di una molecola d' elettrico collocata in A; h', H' le due azioni pur ripulsive esercitate dalle medesime due porzioni verso una molecola d'elettrico situata in B.

Siccome la molecola esistente in B si trova in equilibrio, essendo al di dentro di uno strato d' elettrico equilibrato (§. 22), così sono eguali in grandezza ed opposte in direzione le due azioni H', h' su di essa operanti. In quanto alle due azioni operanti sulla molecola collocata in A, noi avremo prossimamente la H uguale alla H' sì in grandezza che in direzione attesa la vicinanza di luogo de' punti A e B. Così pure si avrà prossimamente la h uguale in grandezza alla h', come si ha dal calcolare queste due azioni nel supposto che il segmento sia formato da un grandissimo numero di unghie comprese fra triangoli sferici, e le quali concorrano co' loro spigoli nella linea AB, nel modo che si è veduto nel Lemma III; colla qual forma, quando le unghie sieno numerosissime e i triangoli sferici opportunamente scelti, il considerato segmento quasi affatto coincide. La grandezza assoluta poi sì di h che di h', è porporzionale al prodotto della grossezza AB dello strato per la densità media di esso nella linea AB, vale a dire all' intensità dell' elettricità nel punto A, come si è testè veduto al § 28; nè dipende sensibilmente dalla forma del corpo, quando sia data quella grossezza e densità media, come neppure

dalla distanza AC del piano che separa i due segmenti, purchè questa distanza abbia le condizioni precedentemente espresse. Le direzioni in fine di esse azioni sui punti A e B sono prossimamente perpendicolari al piano HN, e volte in versi contrarj. Perciocchè se dal punto A vengono descritte sulla superficie esterna dello strato due linee dirette in versi contrarii ed esistenti in uno stesso piano passante per AB, hanno in A queste due linee la stessa curvatura; epperò ognuna delle unghie che abbiamo considerato, è accompagnata da un' altra diametralmente opposta, uguale di grandezza e di forma. Per conseguenza la molecola d' elettrico situata in A sarà sollecitata da due forze h, H pressochè con correnti, danti una risultante uguale prossimamente a $2h$ e operante verso l' infuori in una direzione prossimamente parallela alla linea BA.

A questa risultante si può dimostrare vicinissima in grandezza e in direzione anche l' azione che verrebbe esercitata sulle molecole d' elettrico che si trovassero prossime ad A nel prolungamento della BA. Infatti una calotta sferica nata dalla rotazione dell'arco AH (fig. 9) intorno alla retta MAC che prolungata passa pel centro O, esercita su di un punto esterno M preso nella detta retta MAC un'azione la quale, chiamata P l' azione esercitata alla distanza 1 da una massa uguale a quella che si troverebbe distribuita colla densità della calotta sulla superficie 1, e posto

$$\mathrm{MA} = b$$

$$\mathrm{AE} = x$$

$$\mathrm{EF} = y$$

$$\mathrm{AO} = \mathrm{R}$$

$$\mathrm{AC} = \mathrm{senov.AH} = m.$$

e data dall' espressione

$$P\int dx.\left(\frac{ds}{dx}\right)\frac{2\pi y(b+x)}{[(b+x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}},$$

essendo l' integrale esteso da $x=0$ ad $x=m$; e però, avendosi

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)=\frac{R}{y};\ y^2=x(2R-x),$$

essa azione sarà

$$=P2\pi\int dx.\frac{R(b+x)}{[(b+x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=P2\pi R\int dx\frac{(b+x)}{[(b+x)^2+x(2R-x)]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=P2\pi R\int dx\frac{b+x}{[b^2+2bx+2Rx]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=P2\pi.R\left[-\frac{(b+x)}{(b^2+2bx+2Rx)^{\frac{1}{2}}(b+R)}+\int dx.\frac{1}{(b+R)\sqrt{b^2+2bx+2Rx}}\right]$$

$$=P2\pi.R\left[-\frac{(b+x)}{(b+R)(b^2+2bx+2Rx)^{\frac{1}{2}}}+\frac{\sqrt{b^2+2bx+2Rx}}{(b+R)^2}+\text{cost.}\right]$$

$$=P2\pi.R\left[\frac{-(b+x)(b+R)+b^2+2bx+2Rx}{(b+R)^2\sqrt{b^2+2bx+2Rx}}+\text{cost.}\right]$$

$$=P2\pi.R\left[\frac{-bR+bx+Rx}{(b+R)^2\sqrt{b^2+2bx+2Rx}}+\text{cost.}\right]$$

$$=P2\pi.R\left[\frac{-bR+bm+Rm}{(b+R)^2\sqrt{b^2+2bm+2Rm}}+\frac{R}{(b+R)^2}\right]$$

la quale quantità, quando $b=0$, è uguale a

$$P2\pi.\left[\frac{m}{\sqrt{2Rm}}+1\right],$$

e differisce pochissimo da questo valore quando b è piccolissimo. L' azione pertanto esercitata da cotale calotta verso il punto M diversifica pochissimo dall'esserle questo punto collocato a contatto o soltanto vicinissimo. E lo stesso può dirsi di una moltitudine di siffatte calotte, ossia di uno strato compreso fra due superficie di cotal forma; come anche di uno strato formato da una moltitudine di unghie quali abbiamo supposte nel Lemma III: come in fine dello strato elettrico IBMNAH della *fig.* 8. E siccome per questo piccolo cangiamento di luogo del punto su cui l' azione è esercitata, varia pochissimo anche l' azione del rimanente strato elettrico che riveste il corpo, cangiandosi pochissimo l' azione spettante a ciascun punto di questo rimanente strato; così l' azione che verrebbe sofferta dalle molecole d' elettrico che si trovassero prossime ad A nel prolungamento della BA, differisce pochissimo dall' azione che verrebbe sofferta da una molecola collocata in A; come avevamo asserito.

Quanto si è fin quì detto, noi possiamo applicarlo anche all' attrazione esercitata dallo strato deficiente di un corpo elettrizzato in meno verso il fluido naturale delle molecole d' aria contigue. Quest' attrazione cioè è proporzionale al prodotto della grossezza di esso strato deficiente per la densità che ivi aveva il fluido sottratto, senza che sia d' uopo aver riguardo alla figura o ad altre circostanze.

Questa dimostrazione, dovuta in origine a Laplace, si trova riferita da Poisson, con qualche sua aggiunta, nelle Memorie dell' Istituto di Francia per l' anno 1811 (*). Io l' ho sviluppata e modificata alquanto e adattata all' ipotesi Frankliniana.

Dopo una tale dimostrazione, Poisson cerca altresì di provare che la forza con cui tutto l' elettrico esistente nella linea AB (*fig.* 8) è spinto verso l'infuori, è in ragione dupli-

---

(*) *Classe matematica e fisica,* parte I, p. 6 e 30.

cata del prodotto della grossezza AB dello strato per la media densità dell'elettrico lungo essa linea AB, ossia, adattando le sue conclusioni al linguaggio frankliniano, in ragione duplicata dell' intensità dell' elettricità sovrabbondante o positiva nel punto A. E infatti nella serie delle molecole d' elettrico distribuite lungo la linea AB, le più interne sono spinte all' infuori con forza minore e le più esterne con forza maggiore; essendo la forza con cui è spinta ciascuna, in ragione del numero di quelle che ella ha più internamente. Ond'è che la somma di queste forze è proporzionale al prodotto del numero delle molecole distribuite in AB, per la media delle forze dalle quali esse sono sollecitate una per una, la qual forza media è anch' essa proporzionale al detto numero. Supponendo adunque che le molecole d' elettrico situate in AB si premano l' una l' altra a modo degli ordinarj fluidi pesanti, ed esercitino contro l' aria uno sforzo puramente meccanico uguale alla somma di tutte le forze onde esse sono sollecitate, questo sforzo sarà in ragione del quadrato del numero di esse molecole disposte in AB. Poisson non parla esplicitamente di questo vicendevole premersi delle molecole; ma a me pare che egli lo sottintenda, nè veggo come si possa senz' esso arrivare alla menzionata conclusione.

Questa conseguenza, ricevuta in generale dai fisici francesi, viene da essi ammessa non solo per l' elettricità vitrea o positiva, ma anche per la resinosa o negativa, la quale essi fanno dipendere con Symmer da un altro fluido che similmente si accumuli alla superficie de' conduttori. Io temo però che in questi ragionamenti di Poisson sieno portate troppo oltre le analogie dell' elettricità co' fluidi ordinarj: il che io stimo pericoloso, fintantochè è sì poco nota l'intima natura dell'elettricità, e che è persino incerto se veramente ella dipenda da qualche sostanza esistente da se.

PROPOSIZIONE XIII.

30. Se dentro ad una superficie convessa in tutti i versi e non avente nè angoli solidi nè spigoli nè variazioni repentine nella curvatura, si trova contenuto un fluido incompressibile le cui parti si respingano in ragione inversa de' quadrati delle distanze, non può esservi per questo che un'unica distribuzione colla quale esso non eserciti alcuna azione verso i punti a lui interni.

Chiamo *convessa* una superficie *in tutti i versi*, allorquando condotto per qualsivoglia di lei punto un piano tangente, questo piano non ha comune con essa che quell' unico punto, e la lascia sempre tutta da una sola banda, senza mai segarla. Tali sono per un esempio le superficie elissoidiche.

Per dimostrare la enunciata Proposizione cerchiamo di far vedere come la supposizione contraria conduca all'assurdo. Supponiamo adunque che dentro alla superficie CC (*fig.* 10) convessa in tutti i versi, possano esservi due maniere di distribuzione colle quali una data massa dell'indicato fluido repulsivo non eserciti azione alcuna all'interno; le quali due maniere formino due strati le cui interne superficie sieno indicate l'una dalla linea punteggiata DD, e l'altra dalla linea continua EE; le quali due superficie si segheranno in diversi luoghi, rimanendo in alcune parti più interna la prima, e in alcune la seconda. E immaginiamo che data al fluido la distribuzione limitata dalla superficie DD, e ritenuto immobile esso fluido con una siffatta distribuzione, talchè esso non cangi di luogo per pressioni che venga a soffrire internamente, immaginiamo, dico, che al di dentro gli si aggiunga dell'altro fluido della stessa natura a piccole successive dosi, lasciando che questo pigli a ciascuna volta la distribuzione di equilibrio, e così si continui in fino a che da ultimo la interna superficie del fluido aggiunto, indicata dalla linea FF fatta a brevi lineette, riesca

tutta al di dentro della EE, toccando però questa in uno o più punti. Dalle cose dette al §. 19 è chiaro che nè questo fluido novellamente aggiunto nè quello limitato dalla superficie DD eserciteranno azione alcuna verso i punti situati al di dentro di FF. Immaginiamo reso immobile anche il fluido aggiunto, e che dall' aggregato de' due strati immobili, ossia dal fluido immobile collocato al di fuori della superficie FF venga levata la parte situata al di fuori della superficie EE. Siccome anche questa parte non esercita, nella nostra ipotesi, azione alcuna verso i punti dentro lei contenuti, così nella detta ipotesi non ne dee nemmeno esercitare la parte compresa fra EE ed FF, che ha in uno o più punti una grossezza nulla. Dimostriamo come sia assurda questa mancanza d' azione di cotale parte di fluido verso i punti ad essa interni.

Immaginiamo che dal punto o da uno de' punti ove la distanza fra EE ed FF è nulla, punto che noi indicheremo con A (*fig.* 11), venga condotta una retta AO normale alla superficie EE, la quale EE nel supposto che lo strato di fluido fra EE e CC sia dappertutto assai sottile, sarà anch' essa convessa per tutti i versi; come anche, in un supposto simile per lo strato fra CC ed FF, sarà convessa per tutti i versi la FF. E immaginiamo che per un punto B di questa AO, preso vicinissimo ad A, sia condotto un piano KK', perpendicolare ad essa AO; col quale piano verrà lasciata dalla banda di A una porzione dello strato EEFF di fluido repulsivo, di una grossezza nulla nel punto A ma gradatamente crescente coll'allontanarsi da A secondo tutte le direzioni; e dalla banda contraria a quella di A verrà lasciata tutta la rimanente porzione dello strato medesimo. Determiniamo approssimatamente l' azione della prima porzione.

Questa porzione di strato si può con grande approssimazione riguardare come una calotta compresa fra il piano KK' e due superficie elissoidiche toccantisi in A; o come l'aggregato di un grandissimo numero di unghie, ciascuna delle quali sia parte di una calotta sferica compresa fra il piano KK' e due superficie sferiche di diverso raggio toccantisi in A.

Cominceremo perciò a determinare l'azione di una intera calotta sferica di questa specie; ossia la differenza d'azione di due segmenti di sfera nati dalla rotazione intorno ad AB di due triangoli mistilinei AKB, AkB (*fig.* 12) essendo AK, Ak due archi circolari normali ad AB. Chiamando R, R' i raggi delle due sfere, cioè R il maggiore, R' il minore; a la AB; P il coefficiente costante già adoperato nel §. 24, le azioni di essi due segmenti verso il punto B saranno, come si ha dal valore di T'' del §. 24,

$$\mathrm{P}.2\pi\left[a+\frac{a^2}{\mathrm{R}}+\frac{a^3}{3\mathrm{R}^2}-\frac{1}{3\mathrm{R}^2}(a^2+2a\mathrm{R})^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\mathrm{P}.2\pi\left[a+\frac{a^2}{\mathrm{R}'}+\frac{a^3}{3\mathrm{R}'\mathrm{R}'}-\frac{1}{3\mathrm{R}'\mathrm{R}'}(a^2+2a\mathrm{R}')^{\frac{3}{2}}\right];$$

e l'azione della calotta che ne è la differenza, sarà

$$\mathrm{P}.2\pi\left[\frac{a^2}{\mathrm{R}}+\frac{a^3}{3\mathrm{R}^2}-\frac{a^{\frac{3}{2}}(a+2\mathrm{R})^{\frac{3}{2}}}{3\mathrm{R}^2}-\frac{a^2}{\mathrm{R}'}-\frac{a^3}{3\mathrm{R}'\mathrm{R}'}+\frac{a^{\frac{3}{2}}(a+2\mathrm{R}')^{\frac{3}{2}}}{3\mathrm{R}'\mathrm{R}'}\right].$$

E prese di questa calotta due unghie contrapposte al vertice, comprese ciascuna fra due piani formanti un sottilissimo spigolo $\Delta\varpi$ lungo la retta AB, l'azione esercitata su B dall'aggregato di queste due unghie sarà

$$\mathrm{P}.2\Delta\varpi\left[\frac{a^2}{\mathrm{R}}+\frac{a^3}{3\mathrm{R}^2}-\frac{a^{\frac{3}{2}}(a+\mathrm{R})^{\frac{3}{2}}}{3\mathrm{R}^2}-\frac{a^2}{\mathrm{R}'}-\frac{a^3}{3\mathrm{R}'\mathrm{R}'}+\frac{a^{\frac{3}{2}}(a+2\mathrm{R}')^{\frac{3}{2}}}{3\mathrm{R}'\mathrm{R}'}\right].$$

E però l'azione della calotta elissoidica della *fig.* 11 sarà prossimamente misurata da

$$\Sigma.\mathrm{P}2\Delta\varpi\left[\frac{a^2}{\mathrm{R}}+\frac{a^3}{3\mathrm{R}^2}-\frac{a^{\frac{3}{2}}(a+2\mathrm{R})^{\frac{3}{2}}}{3\mathrm{R}^2}-\frac{a^2}{\mathrm{R}'}-\frac{a^3}{3\mathrm{R}'\mathrm{R}'}+\frac{a^{\frac{3}{2}}(a+2\mathrm{R}')^{\frac{3}{2}}}{3\mathrm{R}'\mathrm{R}'}\right]$$

presa la somma da $\varpi=0$, ad $\varpi=\pi$, e ritenendo variabili la R e la R' col variare di ϖ.

Ora essendo quest' ultima quantità tutta moltiplicata per $a^{\frac{3}{2}}$, è facile vedere che col diminuire di a il valore di essa quantità va gradatamente diminuendo, in modo da poter divenir minore di ogni quantità assegnata col diminuire sufficientemente di essa a. Laddove non si può dire lo stesso per riguardo all'altra porzione dello strato repulsivo EEFF, esistente, rispetto al piano KK', dalla banda più lontana da A; l'azione della quale altra porzione non può divenire piccolissima col successivo impicciolimento di a; come si scorge evidentemente prendendo anche soltanto una piccola porzione di questo strato esistente all' intorno del prolungamento della retta AO. Non è adunque possibile che con questa forma di strato vi sia equilibrio fra le azioni esercitate sul punto B per tutte le posizioni di questo punto. E però è assurda la supposizione fatta dapprincipio, che si possano dare due distribuzioni capaci tutte e due di non esercitare azione alcuna sui punti interni.

31. La conclusione regge anche nel caso che la superficie interna FF dello strato residuo sia affatto diversa da quella che abbiamo immaginata, perchè quella esterna EE sia convessa per tutti i versi, e abbia in A un punto comune colla interna. Perocchè condotta da A la normale AO (*fig.* 11), e per un punto B vicinissimo ad A guidato il piano KkBk'K' perpendicolare ad AO; e divisa la calotta KAK'k'Ak in tante unghie per mezzo di tanti piani segantisi in AO ad un angolo acutissimo $\Delta\omega$, l' azione esercitata sul punto B da una qualsivoglia di queste unghie nella direzione AO sarà misurata dalla quantità

$$P.\Delta\omega\left[a+\frac{a^2}{R}+\frac{a^3}{3R^2}-\frac{a^{\frac{3}{2}}(2R+a)^{\frac{3}{2}}}{3R^2}\right]$$

diminuita dell' azione del solido abbracciato dal piano KK', dalla superficie kAk' e dai due piani segantisi in AO e comprendenti la data unghia; ossia sarà essa azione espressa da

$$P.\Delta\omega.\lambda\left[a+\frac{a^2}{R}+\frac{a^3}{3R^2}-\frac{a^{\frac{3}{2}}(2R+a)^{\frac{3}{2}}}{3R^2}\right],$$

essendo λ una quantità positiva minore di 1. E la totale azione esercitata da tutta la calotta verso il punto B nella direzione AO sarà misurata da

$$\Sigma P.\Delta\omega.\lambda\left[a+\frac{a^2}{R}+\frac{a^3}{3R^2}-\frac{a^{\frac{3}{2}}(2R+a)^{\frac{3}{2}}}{3R^2}\right]$$

dove la R varierà da un' unghia all' altra, e così pure la λ, rimanendo però quest' ultima sempre compresa fra 0 e $+1$.

Ora il valore di questa espressione, atteso il comune fattore a, col diminuire della a può divenir minore di ogni quantità data; cosa che non si può dire dell'azione esercitata sul medesimo punto B, nella contraria direzione OA, da quella porzione del medesimo residuo strato la quale esiste dall'opposta banda del piano KK'. Perciò non può sussistere l'equilibrio per tutte le posizioni del punto B; ed è in conseguenza assurda la supposizione della possibilità delle due maniere di distribuzione.

32. Ciò vale qualunque sia la densità e la grossezza dello strato di fluido repulsivo disposto sotto la superficie CC. Dal che si può arguire che la conclusione vale anche pel caso di una distribuzione meramente superficiale, qual è quella considerata al §. 12. Eccone nulladimeno una dimostrazione.

Immaginiamo per un momento che sieno possibili due distribuzioni meramente superficiali, colle quali un fluido repulsivo disposto nella superficie convessa CC ed operante in ragione inversa de' quadrati delle distanze, possa non esercitare azione alcuna verso nessun punto dello spazio interno. E supponiamo disposta in CC una data quantità M di un siffatto fluido repulsivo con una di queste due maniere di distribuzione, la quale noi chiameremo la *prima* maniera. E quindi immaginiamo levate successivamente delle piccole por-

zioni di questa quantità M disposte tutte all'altra maniera che noi diremo la *seconda*, continuando queste sottrazioni in fino a che in qualche punto della superficie CC arrivi il fluido residuo ad avere una densità *zero*. Il che dovrà necessariamente avvenire prima che tutta la quantità M sia levata; poichè in alcuni punti di CC, a pari quantità totale di fluido repulsivo, dee aversi una maggiore densità colla seconda maniera che non colla prima; e perciò dee bastare per questi punti una quantità minore di M disposta alla seconda maniera, per avere la stessa densità come disponendo tutta la M alla prima maniera. Ottenuta che siasi in qualche punto A una densità nulla, immaginiamo che si cessi da ulteriori sottrazioni; e condotta da esso punto A una retta AO normalmente e internamente alla superficie CC, e per un punto B della AO vicinissimo ad A menato un piano KK' perpendicolare ad AO, consideriamo l'azione esercitata su B dalla porzione di fluido che, dopo fatte le dette sottrazioni, esisterà nella calotta KAK'. Avrà questa porzione di fluido un minimo di densità nel punto A, e andando lungi da questo punto la densità andrà crescendo progressivamente da tutte le bande. E se immagineremo la calotta KAK' divisa in tante minime unghie superficiali, col mezzo di tanti piani segantisi in AO ad angoli acutissimi, ciascuna di queste unghie si potrà considerare come piegata ad arco circolare, colla densità del fluido dispostovi crescente successivamente coll' allontanamento da A.

Chiamiamo $\Delta\omega$ l' angolo fatto da due piani segantisi in AO e comprendenti una di esse unghie,

δ la densità massima del fluido disposto in essa unghia,

R il raggio di curvatura in A dell'arco che divide per mezzo quest' unghia,

a la comune altezza AB di tutte le unghie,

P l' azione che verrebbe esercitata su B da una massa del considerato fluido, contenuta nell' estensione superficiale 1 colla densità 1, e supposta concentrata in un punto alla distanza 1.

ΔX l' azione esercitata dalla considerata unghia verso il punto B nella direzione AO. Posta (*fig.* 13)

$$AE = x, \quad EF = y,$$

si avrà

$$\Delta X = P\int_0^a dx\left(\frac{ds}{dx}\right)\Delta\omega . y . \lambda\delta . \frac{(a-x)}{[(a-x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}},$$

essendo λ una quantità compresa fra 0 e $+1$, e variabile con x; ossia, avendosi $y\left(\frac{ds}{dx}\right) = R$, $y^2 = 2Rx - x^2$,

$$\Delta X = P . \Delta\omega . \lambda'\delta R\int_0^a dx \frac{(a-x)}{(a^2+2Rx-2ax)^{\frac{3}{2}}},$$

dove λ' ha una grandezza intermedia fra il massimo e il minimo valore di λ, ossia è anch' essa una quantità compresa fra 0 e $+1$. Ed eseguendo le integrazioni sarà

$$\Delta X = PR\Delta\omega . \lambda'\delta . \left[\frac{(a-x)(a^2+2Rx-2ax)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}(2R-2a)} - \int\frac{dx . (a^2+2Rx-2ax)^{-\frac{1}{2}}(-1)}{-(R-a)}\right]$$

$$= PR\Delta\omega . \lambda'\delta . \left[\frac{(a-x)(a^2+2Rx-2ax)^{-\frac{1}{2}}}{-(R-a)} - \frac{1}{R-a}\frac{(a^2+2Rx-2ax)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(2R-2a)} + \text{cost.}\right]$$

$$= PR\Delta\omega . \lambda'\delta . \left[\frac{-(a-x)(a^2+2Rx-2ax)^{-\frac{1}{2}}}{(R-a)} - \frac{\sqrt{a^2+2Rx-2ax}}{(R-a)^2} + \text{cost.}\right];$$

ed estendendo l' integrale fra i suoi limiti 0 ed a,

$$\Delta X = PR\Delta\omega . \lambda'\delta\left[\frac{a}{R-a}\, a^{-1} - \frac{\sqrt{2Ra-a^2}}{(R-a)^2} + \frac{a}{(R-a)^2}\right]$$

$$= PR\Delta\omega . \lambda'\delta\left[\frac{R-a}{(R-a)^2} + \frac{a}{(R-a)^2} - \frac{\sqrt{2Ra-a^2}}{(R-a)^2}\right]$$

$$= PR\Delta\omega . \lambda'\delta\left[\frac{R-\sqrt{2Ra-a^2}}{(R-a)^2}\right].$$

Ma prendendo il punto B gradatamente più vicino ad A, la densità δ si rende successivamente più piccola sino a poter divenir minore di ogni quantità data; perciò con questo impiccolimento di AB, anche il valore di ΔX decresce sino a potersi rendere più piccolo di ogni dato. E lo stesso è dell' azione di qualsivoglia altra unghia. Dimaniera che coll' impiccolire la AB, l' azione che il fluido esistente nella calotta KAK' dopo le indicate sottrazioni, esercita verso B nella direzione AB, può divenir minore di ogni quantità assegnata. Ma ciò non può avvenire della parte di fluido repulsivo esistente, dopo le indicate sottrazioni, dall' altra banda del piano KK'. È quindi impossibile che il fluido rimasto nella superficie CC dopo le già dette sottrazioni non eserciti azione alcuna sul punto B, per tutte le posizioni di questo. Dunque è assurda la supposizione che vi possano essere due modi di distribuzione dell' indicato fluido repulsivo nella superficie CC, dotate entrambe della proprietà di non esercitare azione alcuna verso i punti contenuti al di dentro.

33. Pel caso che il fluido sia compressibile non ne saprei ancor dare dimostrazione rigorosa. Trattandosi però del fluido elettrico, il quale si distribuisce sensibilmente alla sola supeficie, possiamo ritenere che la conclusione valga anche per lui.

Quello poi che sarebbe più importante, sarebbe di estendere cotali dimostrazioni alle superficie qualunque.

ARTICOLO SECONDO.

Della distribuzione dell'elettrico in un conduttore isolato soggetto all' azione di un corpo elettrizzato esterno.

34. È noto ai Fisici che se dinanzi a un còrpo conduttore isolato A, elettrizzato in più o in meno o anche allo stato naturale, noi presentiamo un qualsivoglia corpo elettrizzato B, si altera sempre nel primo la distribuzione dell' elet-

trico; e ciò di tale maniera che se il corpo B è elettrizzato in più, una porzione di fluido elettrico abbandona le parti anteriori di A ossia le più vicine a B, per recarsi nelle posteriori; e all' incontro, se il corpo B è elettrizzato in meno, una porzione del fluido elettrico di A proveniente dalle parti posteriori viene a portarsi nelle parti anteriori. Io intendo ne' paragrafi seguenti di dimostrare che questi smovimenti hanno luogo unicamente alla superficie del corpo A.

Per brevità di linguaggio, il corpo presentato B verrà chiamato *corpo attuante*, ed il corpo A in cui si considera lo smovimento, *corpo attuato*.

LEMMA I.

35. *L'azione esercitata su qualsivoglia corpo* ABCD (*fig.* 14) *da una massa* MN *di materia ripulsiva situata all' esterno di esso ed operante in ragione inversa de' quadrati delle distanze, può essere compiutamente equilibrata e distrutta dall' azione di un' altra massa convenientemente disposta della stessa materia ripulsiva.*

Immaginiamo che tutto all' intorno del corpo ABCD esista un grosso inviluppo di materia ripulsiva, del quale la massa MN faccia parte; e immaginiamo determinato in questo inviluppo uno strato PQRSNM comprendente la stessa massa MN, e affatto privo di azione verso i punti interni (§ 18). Egli è chiaro che l' azione della parte PQRS distruggerà compiutamente l' azione della parte MN.

Le due masse MN e PQRS noi le chiameremo *complementarie*.

36. *Osservazione* I. Nella massa PQRS sono lasciate a nostro arbitrio la figura della superficie interna, la legge della densità e la grossezza; ma determinate queste riesce altresì determinata la figura della superficie esterna.

37. *Osservazione* II. Supponiamo distribuita nel luogo PQRS or ora considerato una quantità di materia attrattiva la quale saturi o riduca *indifferente* la materia ripulsiva ivi esistente. Sarà l' azione di questa materia attrattiva sul corpo ABCD equivalente all'azione della massa ripulsiva MN; giacchè tanto l' una quanto l' altra distruggono l' azione della massa ripulsiva PQRS. Possiamo da ciò concludere che l' azione di una data massa ripulsiva verso un dato corpo ABCD può essere compiutamente supplita dall' azione di una massa attrattiva convenientemente disposta.

38. *Osservazione* III. Viceversa, una massa di materia attrattiva può essere compiutamente supplita da una di materia ripulsiva convenientemente determinata.

LEMMA II.

39. Richiamiamo la *fig.* 3 e la dimostrazione data al §. 11 e seg. Si abbia cioè ancora una qualunque superficie chiusa ABCD; si immagini condotta dentro a questa la superficie pur chiusa *abcd*. Però non siavi più la materia ripulsiva concentrata e uniformemente distribuita nella superficie sferica FGHI; ma in luogo di questa ve ne sia dell'altra distribuita in uno spazio qualunque MN, il quale non inchiuda entro di se la superficie ABCD, rimanendo ferma la supposizione che l' azione di questa materia ripulsiva varii in ragione inversa dei quadrati delle distanze.

Immaginiamo dopo ciò diviso lo spazio MN in tante parti di minime dimensioni, e ciascuna delle porzioncelle di materia appartenenti a queste parti supponiamola dapprima concentrata nel rispettivo centro di massa, e poscia diffusa e uniformemente distribuita in una superficie sferica descritta intorno a un tale centro e toccante la superficie *abcd*; con che una porzione della considerata massa MN passerà nell' intervallo ABCD*abcd*, e un' altra rimarrà all' esterno della superficie ABCD. Immaginiamo ripetuta una tale operazione

su quest' ultima porzione rimasta all' esterno di ABCD; con che un' altra porzione della massa MN passerà nel detto intervallo. Sulla porzione che rimane ancora all'esterno di ABCD immaginiamo ripetuta la stessa operazione una terza volta; e così si faccia ulteriormente, procedendo nello stessissimo modo, e colle stessissime avvertenze come nel già citato § 11. Ne verremo in fine a conchiudere che nell' intervallo ABCD*abcd* potrà essere distribuita per tal modo una porzione della massa MN da esercitaro verso i punti compresi dentro la *abcd* quella stessissima azione che veniva esercitata su essi dapprincipio da cotale massa MN. E potendosi prendere questo intervallo di quella sottigliezza che più piace, se ne potrà altresì conchiudere che *nella superficie* ABCD *può distribuirsi per tal modo una opportuna porzione della massa ripulsiva* MN *da esercitare verso i punti contenuti dentro essa* ABCD *quella stessa azione che viene su essi esercitata dalla intera massa* MN *colla sua distribuzione iniziale.*

40. *Osservazione.* La materia ripulsiva distribuita nella superficie ABCD nel modo or ora indicato, dee dalla banda più vicina ad MN essere più addensata e dalla banda opposta essere meno addensata di quello che porterebbe la sua distribuzione di equilibrio senza la presenza di MN. Così infatti è d' uopo che sia, se essa materia dee tendere ad allontanare da MN le molecole di simile materia contenuta dentro ad ABCD, nel modo stesso come la massa MN.

LEMMA III.

41. *Immaginiamo che all' intorno della superficie* ABCD *si trovi un ampio inviluppo formato della materia ripulsiva superiormente considerata, distribuita con qualsivoglia legge di densità. Si può sempre determinare in questo inviluppo uno strato contiguo ad* ABCD, *il quale eserciti verso i punti interni un' azione uguale a quella esercitata dalla massa ripulsiva* MN (*fig.* 3.)

Si concepisca divisa la massa MN, col mezzo, p. e., di tanti piani paralleli, in tante minime parti mn, $m'n'$, $m''n''$ ec., e si concepisca distribuita nella superficie ABCD una porzione di materia ripulsiva equivalente alla mn nell' azione verso i punti interni, supponendo che questa porzione venga formata dalle molecole più prossime dell' inviluppo immaginato, mossesi all' indentro normalmente alla ABCD medesima. Verrà con ciò l' inviluppo ad avere internamente un' altra superficie A'B'C'D', nella quale pure si immagini disposta un' altra piccola porzione di materia ripulsiva formata similmente dalle molecole ad essa A'B'C'D' più prossime, mossesi normalmente a questa, e l'azione della qual porzione verso i punti interni ad essa A'B'C'D' equivalga a quella della parte $m'n'$. E così si continui sino a che sieno esaurite le parti mn, $m'n'$ $m''n''$ ec. Si avrà in fine una serie di superficie ABCD, A'B'C'D', A''B''C''D''ec., nelle quali si troverà distribuita una quantità di materia ripulsiva la cui azione verso i punti collocati al di dentro della superficie più interna equivarrà a quella della massa MN. Si supponga ora soppressa la rimanente materia dell'inviluppo, e restituita alle proprie sedi quella che si era recata nelle dette superficie ABCD, A'B'C'D', A''B''C''D'' ec. Ne avremo uno strato il quale eserciterà verso i punti a lui interni un' azione quasi equivalente a quella della massa MN, con una differenza che potrà gradatamente impicciolirsi col diminuire più e più le grandezze delle parti mn, $m'n'$ ec. Il che ci guida a conchiudere che all' esterno della superficie ABCD si può determinare uno strato di materia ripulsiva il quale eserciti verso i punti dentro lui contenuti quella stessissima azione che viene esercitata dalla massa MN, nel quale strato la legge della densità sia affatto arbitraria, ma la superficie esterna venga determinata a norma di questa legge.

42. *Osservazione* I. Sopra l' esterna superficie di questo strato, il quale noi chiameremo S, immaginiamo determinato un altro qualunque strato S' fatto anch' esso della materia ripulsiva del già supposto inviluppo, e anch' esso privo di

azione verso i punti contenuti dentro di lui; e immaginiamo aggiunto questo strato all' S. Così pure immaginiamo determinato al di sotto della detta esterna superficie dello strato S un altro strato S″ fatto della stessa materia ripulsiva, e privo similmente di azione verso i punti interni, ma la cui grossezza non superi in nessun luogo quella di S; e concepiamo sottratto questo nuovo strato dall' S medesimo. Noi avremo tanto la somma S+S′, quanto la differenza S—S″, equivalenti ad MN nell'azione verso i punti interni. E perciò vi potranno essere all' intorno di ABCD infiniti strati equivalenti alla massa MN nell' azione verso i punti interni suddetti, de' quali strati però uno sarà il più piccolo di tutti, e sarà quello che in qualche suo punto avrà una grossezza nulla.

43. *Osservazione* II. Si può immaginare esistente anche al di dentro di ABCD della simile materia ripulsiva disposta con qualunque legge di densità, e determinare anche in essa uno strato contiguo ad ABCD il quale sia equivalente ad MN nell' azione verso i punti interni.

Si può ripetere per provarlo la stessa dimostrazione adoperatasi nel §. 41, colla sola differenza che la materia ripulsiva da distribuirsi nella superficie ABCD sia presa al di dentro di questa, e che perciò la superficie A′B′C′D′ riesca dentro ad ABCD; e che lo stesso sia della materia da distribuirsi in A′B′C′D′, e della superficie A″B″C″D″, rispetto ad A′B′C′D′; e così di seguito. E anche quì lo strato equivalente ad MN può avere una grossezza qualunque, cominciando da un limite in cui cotale grossezza sia in qualche luogo nulla, sino al punto in cui esso strato venga ad esaurire tutta la materia ripulsiva contenuta dentro ABCD.

44. *Osservazione* III. Se nella materia ripulsiva che poc' anzi abbiamo supposta esistente al di fuori o al di dentro di ABCD, si volesse determinare uno strato la cui azione all'interno fosse uguale ed opposta a quella della massa pur ripulsiva MN, si comincerebbe a determinare una massa complementaria ad MN (§. 35), e si cercherebbe poscia uno strato

equivalente a questa massa complementaria, nel modo indicato a' §. 41 e 43.

45. *Osservazione* IV. Se divenisse attrattiva tanto la materia di cui è formata la massa MN, quanto quella che compone lo strato sovrapposto o sottoposto alla superficie ABCD e determinato in uno de' modi precedenti, conservando però nelle singole loro parti la stessa forza verso tutti i punti come quando erano ripulsive, continuerebbero un tale strato e una tale massa MN ad essere o equivalenti nell'azione verso i punti interni, ovvero di azioni uguali ed opposte, come erano dapprima.

46. *Osservazione* V. Se divenisse attrattiva la sola materia MN, ovvero quella sola dello strato sovrapposto o sottoposto alla superficie ABCD, sempre conservando in tutte le sue parti la stessa energia di prima; in tal caso l'azione di questo strato verso i punti dentro lui contenuti diverrebbe uguale ed opposta a quella della massa MN, se prima le era equivalente, e diverrebbe equivalente se prima le era eguale ed opposta.

LEMMA IV.

47. *Sia* PQRS*pqrs* (*fig.* 15) *uno strato chiuso di materia repulsiva la cui azione verso i punti internamente contenuti sia uguale ed opposta a quella della massa pur repulsiva* MN *o a quella della massa attrattiva* M'N'. *Si desidera conoscere l'azione esercitata da questo strato, in concorso coll' una o coll' altra delle due masse* MN, M'N', *sopra un punto preso alla superficie o dentro la grossezza dello strato stesso.*

Sia PQRSP'Q'R'S' un altro strato di materia ripulsiva distribuita con qualunque legge di densità, il quale si trovi sovrapposto alla superficie PQRS ed equivalga ad MN o ad M'N' nell' azione verso i punti a lui interni. Noi possiamo immaginare sostituito ad MN o ad M'N' questo strato, senza che punto si cangino le azioni dentro la superfice PQRS, e quindi senza che nasca azione alcuna dentro *pqrs*. E perciò sarà P'Q'R'S'*pqrs* uno strato privo d'azione verso i punti contenuti al di dentro di lui.

Prendendo ora a considerare un punto fisico collocato o alla superficie PQRS qual è il punto *m*, o dentro la grossezza dello strato PQRS*pqrs* qual è il punto *n*, si immagini condotta per esso punto una superficie chiusa la quale distingua il detto strato in due parti S, S' delle quali la più esterna S' sia priva di azione verso i punti ad essa interni, e sia perciò tale anche la più interna S verso i punti interni a essa. Il detto punto non soffrirà altra azione che quella spingente all'infuori dipendente dalla parte più interna S. L' azione pertanto sofferta da un tale punto e che da noi si ricerca, si avrà immaginando disposta intorno a PQRS dell' altra materia ripulsiva con una legge qualunque, e concependo condotta per esso punto una superficie che lasci fra se e la *pqrs* uno strato privo di azione verso i punti interni.

48. *Osservazione* I. Volendo la grandezza di quest'azione nel caso che il punto *m* o l' *n* fosse vicinissimo alla superficie *pqrs*, si farebbe uso de' calcoli esposti nella Proposizione XII.

49. *Osservazione* II. L' azione sul punto considerato sarebbe ancora la stessa se dopo aggiunta la nuova materia intorno alla superficie PQRS, si conducesse, non già pel detto punto, ma più all' esterno, una superficie che lasciasse fra se e la *pqrs* uno strato privo d' azione verso i punti interni.

50. *Osservazione* III. Tutto quello che or ora si è detto può essere eziandio applicato al caso che lo strato PQRS*pqrs* sia di materia attrattiva, essendo pure attrattiva la massa MN, e ripulsiva in vece la M'N'.

PROPOSIZIONE XIV.

51. *Avendosi un corpo conduttore* ABCD (*fig.* 16) *allo stato naturale, si vuole lo smovimento prodotto nel suo fluido naturale dalla presenza di un corpo* MN *elettrizzato in più.*

Immagineremo levato tutto all'intorno del corpo uno strato ABCD*abc*D di fluido naturale equivalente al corpo MN

nell' azione verso lo spazio interno, prendendo questo strato della minima grandezza possibile, cioè tale che in qualche luogo la sua grossezza sia nulla; e supposto immobile il fluido rimanente, concepiremo restituito il fluido levato, lasciandogli prendere quella disposizione che verrà determinata e dalla sua attrazione verso la materia rimasta deficiente e dalla sua ripulsione fra le proprie parti e verso il corpo MN e dalla compressibilità di cui per avventura egli fosse dotato. Questo elettrico così restituito formerà uno strato privo di azione verso l'interno; e con esso si avrà la distribuzione d'equilibrio pel caso presente, ossia lo smovimento che si ricerca.

Sia infatti *abc*D la superficie della parte del corpo ABCD, la quale rimane allo stato naturale dopo fatta la indicata sottrazione; e immaginiamo che il fluido stato levato venga restituito a varie piccole successive dosi nella maniera seguente. Cioè immaginiamo prima distribuita nella superficie *abc*D una piccola quantità P′ di fluido, in modo tale da non esercitare azione alcuna verso i punti interni; e quindi concepiamo che questa quantità P′ si rigonfii con movimenti normali alla *abc*D, movendosi verso l' interno le porzioni di esso situate in que' luoghi ove la superficie *abc*D fosse in contatto colla ABCD, e disponendosi per ora queste porzioni al di dentro di *abc*D secondo una legge di densità scelta anticipatamente a piacere per tutti i punti situati entro ABCD; e le porzioni situate negli altri luoghi movendosi all'infuori, e saturando per via tutta la materia deficiente che viene incontrata, e così continuando sino a che il fluido venga in qualche luogo esaurito prima di arrivare alla superficie ABCD, e in qualche luogo arrivi a cotal superficie; e la quantità che di esso avanza in questi ultimi luoghi dopo raggiunta la ABCD e dopo saturata la materia deficiente incontrata, immaginiamo che retroceda lungo le normali già percorse, disponendosi colla già detta legge di densità scelta anticipatamente. E si chiami Q′ lo strato nato da un tale rigonfiamento. Dopo ciò si immagini che nella superficie libera di Q′, cioè in quella superficie ove vennero a ter-

minare i movimenti del fluido P', si distribuisca un'altra piccola quantità P'' del fluido medesimo, in modo da non esercitare azione alcuna dentro di se. E di poi per mezzo di movimenti normali alla suddetta superficie di Q' si immagini rigonfiata questa quantità P'' nel modo stesso della P', vale a dire con movimenti rivolti interamente all'indentro in que' luoghi ove la superficie ABCD era già stata occupata o raggiunta precedentemente, disponendosi quì pure secondo la già menzionata legge anticipatamente scelta; e negli altri luoghi con movimenti verso l'infuori, saturando la materia deficiente che s' incontra, e proseguendo innanzi o in sino a che il fluido venga esaurito prima di arrivare alla superficie ABCD, o in sino a che sia raggiunta questa superficie, venendo in questo ultimo caso il fluido che sopravvanza a retrocedere lungo le normali già percorse e a disporsi secondo la già scelta legge. E si chiami Q'' lo strato ottenuto dopo questo secondo rigonfiamento. Nella superficie libera di Q'' si immagini disposta un'altra piccola porzione P''' del medesimo fluido da restituirsi, sempre in guisa da non avere azione sui punti interni, e la si immagini quindi rigonfiata in un modo affatto simile a quello della quantità P'', in uno strato che diremo Q'''. E così si continui sino a che venga tutto esaurito il fluido da restituirsi.

La somma degli strati Q', Q'', Q''' ec. eserciterà all'interno di se una qualche piccola azione nata dai diversi rigonfiamenti, la quale però sarà tanto minore quanto più numerosi saranno questi strati, e potrà ridursi minore di ogni minima quantità assegnata col prendere cotali strati in un numero abbastanza grande. Perciò qualunque legge di densità siasi scelta pei punti ove il fluido restituito riesce sovrabbondante, lo strato totale potrà avere una siffatta disposizione da non esercitare azione sui punti interni. Supponiamogli data una tale disposizione, e tratteniamoci un momento a farvi alcune considerazioni.

Ciascuno degli strati Q', Q'', Q''' ec. sarà formato di due distinte parti, come mostra quello compreso fra la superficie

indicata dalla linea continua AB'CcaA e la superficie indicata dalla linea punteggiata $\alpha\beta\gamma\alpha$; delle quali parti l'una simile alla aAB'C$\gamma\beta\alpha$ si troverà all' esterno degli strati restituiti precedentemente, avrà la densità del fluido naturale, e saturerà una corrispondente quantità di materia deficiente esistente nello stesso spazio; l'altra parte analoga alla αAacC$\gamma\alpha$ sarà formata di fluido sovrabbondante, disposto colla più volte nominata legge di densità scelta anticipatamente, e si troverà collocata al di dentro della parte di fluido sovrabbondante spettante agli strati già restituiti, appoggiandosi però per poco tratto nel contorno, come si scorge in Aα, Cγ, alla superficie ABCD. E di queste due parti andrà la prima diminuendo continuamente di estensione superficiale dall'uno strato al successivo, e la seconda in vece andrà continuamente crescendo. E la somma di tutti i detti strati restituiti Q', Q'', Q''' ecc. formerà un inviluppo consistente similmente in due parti, cioè in una di fluido naturale limitata internamente dalla superficie abcD ed esternamente dalla superficie AB'CDA; e in una di fluido sovrabbondante disposta nel menisco ADCcaA, colla legge già scelta e tante volte menzionata.

Cerchiamo ora di determinare questa legge di densità del menisco ADCcaA nel modo più conveniente per l'equilibrio. Immaginiamo condotta attraverso al detto menisco una normale Sτ alla superficie ABCD, e consideriamo l'azione sofferta dalle varie molecole d'elettrico situate in siffatta normale. Sia pertanto una di queste molecole situata nel punto p, fra gli strati Q', Q''. . . . $Q^{(m)}$ collocati più infuori, e gli strati $Q^{(m+1)}$, $Q^{(m+2)}$ ecc. collocati più indentro; i quali strati si suppongano quì stati suddivisi ciascuno in un grandissimo numero di altri, e dotati di quella distribuzione a cui continuamente si avvicinano con tali suddivisioni, di maniera che separatamente considerati non abbiano azione alcuna verso l'interno. Non sentirà una tale molecola nessuna azione dai primi, trovandosi questi all' esterno di essa, ma verrà spinta all'infuori

dai secondi, con una forza tanto più grande quanto più essa si troverà all' esterno. E lo stesso avverrà di tutte le altre molecole esistenti nella retta $S\tau$, sì appartenenti al fluido naturale che al sovrabbondante. Ond' è che quando si ammetta essere l' elettrico un fluido compressibile e formato di molecole prementisi vicendevolmente come quelle de' fluidi ordinarii, tutte quelle fra esse molecole le quali si troveranno nella retta $p\tau$ premeranno quelle esistenti nella pS; e la pressione verrà resistita compiutamente, quando in p vi sia una densità opportuna; in caso diverso ella troverà una reazione o più o meno grande di se, e con cui non potrà fare equilibrio. Converrà adunque osservare se la densità ne' varii punti della normale $S\tau$ sarà adattata pel preciso equilibrio, cioè per resistere appieno ma non essere superiore alla pressione esercitata dalla colonna delle molecole situate più internamente; e se lo stesso avrà luogo per tutte le altre normali. Quando ciò sia, la legge di densità sceltasi sarà quella conveniente. Nel caso contrario converrà cercarne un' altra più adattata. Il che, nel supposto che si possano esaminare in tutte le loro particolarità le forze operanti, riescirà facile a ottenersi dopo avere incominciato a disporre il fluido con una legge anche presa a caso; poichè dopo ciò si saprà presso a poco quanto elettrico sovrabbondante si dee trovare in qualsivoglia sottilissimo prisma normale alla superficie ABCD e che attraversi il menisco ADCcaA, e perciò quale densità giovi assegnare a ciascuno de' punti di esso prisma. Stabilita poi a questo modo una legge più conveniente, si tornerà di nuovo a disporre con essa tutto il fluido restituito. E non trovandosi ancora pienamente adattata per l' equilibrio la nuova legge assuntasi, vi si andrà ancora più vicino con una terza operazione. Con che si andrà gradatamente verso un limite, il quale sarà la distribuzione conveniente al perfetto equilibrio e da adottarsi definitivamente.

52. Mostriamo ora come effettivamente con una siffatta distribuzione tutte le molecole d' elettrico del corpo ABCD si debbano trovare in equilibrio.

La cosa è affatto chiara per quelle molecole che vengono a trovarsi al di dentro dello strato restituito, trovandosi esse in equilibrio prima della restituzione, e non soffrendo azione alcuna da un siffatto strato restituito.

Per riguardo alle altre molecole, supponiamo presi nello strato restituito considerato a parte, diversi punti m, n, q, (*fig.* 17) situati in diversi luoghi; e indichiamo con m', n', q', i punti corrispondenti del corpo ABCD supposto privato di nuovo di un tale strato. E cerchiamo quale azione soffrirebbe una molecola d' elettrico collocata in ciascuno di cotali punti.

Cominciamo dal punto m situato fuori del menisco CDAacC. Una molecola esistente in questo punto, supponendo ch' ella si trovi fra gli strati Q', Q'', ... $Q^{(k)}$, e gli strati $Q^{(k+1)}$, $Q^{(k+2)}$ ecc. non sentirà azione alcuna dai secondi, e sarà spinta dai primi all'infuori con una forza determinata e dalla distanza fra esso punto m e la superficie abcD, e dalla densità del fluido naturale interposto fra questo punto e una tale superficie (§. 29). E una molecola situata in m', per la combinata azione del corpo MN e dello strato deficiente ABCDabcD (*fig.* 18.) sarà attirata all' indentro colla stessa forza come se all' intorno della superficie ABCD si ponesse uno strato indefinito ABCDPQRS di materia deficiente, si conducesse per m' una superficie che lasciasse fra se e la abcD uno strato privo di azione verso l'interno, e si considerasse unicamente l'attrazione di questo strato verso la m' (§. 47 e seg.); e questa forza sarebbe determinata dalla distanza fra m' ed abcD, e dalla densità della materia deficiente collocata in questo intervallo; e sarebbe perciò uguale alla forza con cui la molecola m viene spinta in direzione contraria. Applicato perciò al corpo ABCD lo strato abcDAB'CD, e unite in una sola le molecole m, m', sarà quest' unica molecola tanto attirata all'indentro dal corpo ABCD spogliato come sopra d'elettrico ma con insieme l' MN, quanto è spinta all' infuori dallo strato restituito, e si troverà perciò in equilibrio.

Si può opporre che la conclusione trovata al §. 29 non è che approssimata, e che potrebbe essere soltanto approssimato anche l' equilibrio di cui si tratta. Io credo però ch'esso abbia luogo rigorosamente. Infatti sotto l'azione combinata del corpo MN, della materia deficiente *abc*DABCD (*fig.* 16) e dello strato restituito, tutte le molecole del fluido naturale situate dentro la superficie *abca* si trovano in perfetto equilibrio, ed esse si troverebbero in questo stato anche quando si levasse il corpo MN, la materia ABCB'A rimasta deficiente e il menisco sovrabbondante ADC*ca*A; giacchè dopo questa sottrazione non avanzerebbe che della materia allo stato naturale incapace di esercitare alcuna azione nè dentro lo spazio *abca* nè altrove. Adunque un siffatto menisco sovrabbondante e una siffatta materia deficiente formano col corpo MN un sistema il quale, tanto lasciato sussistere quanto levato, lascia le molecole contenute dentro *abca* in equilibrio, e non esercita perciò azione dentro a questo spazio. Ma un tale sistema chiude insieme coll' *abca* anche lo spazio *a*AB'C*cba*, e anche a questo è da credere che si debba estendere la detta nullità d'azione; poichè se noi fingiamo che una molecola d' elettrico si muova dentro lo spazio totale chiuso dentro questo sistema, passando con moto continuo da un punto preso entro *abca* ad un punto qualsivoglia preso entro *a*AB'C*cba*, le azioni che, soffrirà essa molecola dai diversi punti fisici del detto sistema varieranno tutte secondo la legge di continuità per tutto il movimento di essa molecola, e tanto esse azioni quanto tutte le successive derivate de' loro valori algebraici, non essendovi in tutto questo movimento circostanza alcuna in forza della quale essa legge di continuità possa essere interrotta. E però è da credere che una tal legge debba valere anche per l'azione totale esercitata dall'intero sistema; e se questo esercita invariabilmente un' azione nulla per tutte le posizioni della molecola dentro lo spazio *abca*, è affatto credibile che l'azione debba mantenersi nulla anche passando essa molecola entro allo spazio *a*AB'C*cba*. Ma in questo spazio vi ha nullità di azione quando

manca il sistema summenzionato; dunque è credibilissimo che questa nullità debba sussistere anche quando esso sistema vi sia; vale a dire, che debbe la molecola *mm'*, dopo la restituzione del fluido levato, trovarsi in perfetto equilibrio. Non ho però ancora potuto trovare di ciò una dimostrazione veramente rigorosa.

Passiamo ora al punto *n* (*fig.* 17) situato dentro al menisco A*ac*CDA, ma al di fuori della superficie *abc*D. Questo punto avrà al di dentro di se alcuni de' primi fra gli strati Q', Q'', Q''' ecc., i quali primi strati noi indicheremo con Q', Q''.... $Q^{(h)}$ ed alcuni degli ultimi, che noi indicheremo con $Q^{(h+1)}$, $Q^{(h+2)}$ ecc. ma avrà al di fuori alcuni degli intermedii, cioè gli strati $Q^{(h+1)}$, $Q^{(h+2)}$..... $Q^{(h)}$. Ora questi strati intermedii non eserciteranno azione alcuna su d'una molecola d'elettrico situata in *n*, ma tanto i primi quanto gli ultimi ne eserciteranno una diretta all' infuori, cioè i primi una determinata dalla distanza fra *n* e *abc*D e dalla densità del fluido naturale interposto; e gli ultimi, una determinata dalla grossezza e densità media dello strato di fluido sovrabbondante esistente fra *n* e la superficie interna C*ca*A del menisco. E una molecola situata in *n'*, per l'azione de' corpi ABCD ed MN sarà attirata all'indentro con una forza determinata dalla grossezza e dalla densità dello strato deficiente interposto fra *n'* ed *abc*D, forza che sarà uguale e contraria a quella esercitata su *n* dagli strati Q', Q''..... $Q^{(k)}$ già menzionati. La quale uguaglianza non sarà già approssimata, io credo ma bensì rigorosa. Poichè dopo restituiti gli strati Q', Q''...$Q^{(k)}$ e qualcuno degli intermedii, il punto *n* si trova nella stessa condizione in cui è il punto *m* dopo la restituzione di tutti quanti questi strati; talchè dopo restituita quella porzione è da credere che il punto *nn'* si debba trovare in perfetto equilibrio fra l'azione di ABCD e di MN, e l'azione degli strati restituiti. E la restituzione degli altri strati fa che esso punto *n* venga spinto all'infuori come se sopra di esso operassero soltanto gli ultimi $Q^{(k+1)}$,

$Q^{(k+2)}$ ecc.; e però con una forza determinata dalla grossezza e dalla densità media del fluido sovrabbondante interposto fra nn' ed $AacC$ ed appartenente a questi ultimi strati. E una tale tendenza all' infuori con insieme quella di tutte le altre molecole situate più internamente nella stessa normale ad ABCD, sì appartenenti al fluido naturale che al sovrabbondante, si troverà pienamente resistita dalla reazione del fluido più esteriore, esistente nella stessa normale, essendosi appunto scelta pel menisco $AacCDA$ una legge di densità a ciò conveniente.

Una molecola finalmente situata in q nella parte di menisco collocata al di dentro di $abcD$ è spinta all' infuori dal solo fluido sovrabbondante collocato più internamente ed appartenente ad alcun degli ultimi fra gli strati Q', Q'', Q''' ec., e questa è la sola forza che opererà sulla molecola qq' dopo l' applicazione dello strato totale al corpo ABCD; e anche questa forza con insieme quella operante su tutte le altre molecole situate più internamente, cioè fra il punto qq' e la superficie $AacC$, sarà pienamente resistita dalla reazione del fluido collocato fra qq' e la superficie ABCD.

Pertanto, quando il fluido restituito sia disposto nel modo indicato al §. 51.

1.° Tutte le molecole situate nello spazio occupato da questo fluido si troveranno in equilibrio;

2.° Tutte quelle collocate al di dentro si troveranno pure in equilibrio.

OSSERVAZIONI.

53. *Osservazione* I. Il fluido sovrabbondante appartenente al menisco $AacCDA$ (*fig.* 16) ha in ciascuna delle normali condotte alla superficie ABCD quella stessa, o prossimamente quella stessa disposizione, come se levato il corpo attuante MN, si elettrizzasse in più il corpo ABCD a tal segno da avere, sotto una data minima porzioncella di superficie collocata in-

torno alla base di quella normale, la stessa quantità d' elettrico che si ha ora colla presenza del corpo MN.

54. *Osservazione* II. Se il corpo MN fosse elettrizzato in meno, si avrà l' effetto della sua azione attuante sul corpo ABCD, sostituendo ad esso MN un corpo elettrizzato in più convenientemente disposto; il che è sempre possibile per quello che si è detto al §. 37.

55. *Osservazione* III. Avendosi molti corpi attuanti, altri elettrizzati in più, ed altri in meno, ed essendo l'attuato sempre dotato della dose naturale d' elettrico, l'azione di tutti i corpi attuanti si può ridurre a quello di un sistema di corpi tutti elettrizzati in più; e questo sistema si può riguardare come un unico corpo elettrizzato in più.

56. *Osservazione* IV. Supponiamo ora che il corpo attuato ABCD, oltre all' essere esposto all'azione di uno o più corpi elettrizzati, abbia un' elettricità sua propria, e primieramente ch' esso sia elettrizzato in più. In questo caso cominceremo a ridurre l' azione attuante, quando nol sia, a quella di un unico corpo elettrizzato in più. Quindi immagineremo levata ad ABCD la quantità d' elettrico sovrabbondante, e ridotto dappertutto esso ABCD allo stato naturale, e poscia, come al §. 51, immaginiamo a lui tolto uno strato ABCD*abcd* di fluido naturale equivalente all' azione del corpo attuante; e in fine concepiremo restituita a piccole dosi, nel modo veduto al §. 51 medesimo, tanto quest' ultima quantità d'elettrico quanto quella sovrabbondante levata prima. Con che si avrà o un menisco elettrizzato in più maggiore di quello considerato precedentemente, o una sovrabbondanza d' elettrico in tutta la superficie del corpo ABCD. Ma si avrà sempre l' equilibrio sì in tutto lo spazio occupato dal fluido restituito, come in tutto lo spazio da esso abbracciato. Il che si può dimostrare ripetendo quello che s'è detto al §. 52.

57. *Osservazione* V. Abbia in vece il corpo attuato una quantità d' elettrico minore della dose naturale. In questo caso dopo trovata la distribuzione d' equilibrio che avrebbe luogo

se il corpo avesse la dose naturale d'elettrico e fosse soggetto alla stessa azione attuante, si concepirà tolto ad esso corpo del fluido elettrico cominciando a detrarre gli ultimi degli strati Q', Q'', Q''' ecc. e venendo per ordine ai precedenti, e se tutti questi non bastano, venendo in fine a levare una sufficiente porzione del fluido naturale contenuto sotto la superficie *abc*D, togliendone uno strato superficiale privo d'azione verso i punti interni. E questa sarà la distribuzione d'equilibrio pel caso presente; il che si può dimostrare nel modo del §. 52, quando rimangono superstiti alcuni degli strati Q', Q'', ecc., ed è ancora più facile a vedersi, quando convenga altresì levare del fluido naturale sotto la superficie *abc*D.

58. *Osservazione* VI. In tutti questi casi, stabilito che siasi l'equilibrio, il corpo ABCD è formato da una quantità di materia allo stato naturale, abbracciata o da uno strato superficiale sovrabbondante, o da uno strato superficiale deficiente, o da uno strato sovrabbondante in una parte della superficie e deficiente nell'altra. E ne' luoghi ove è sovrabbondante si può ripetere quanto abbiam detto al §. 53.

Consideriamo ora di nuovo i diversi casi particolari già esaminati, guardandoli da altri aspetti. E cominciamo dal caso d'un corpo dotato della dose naturale d'elettrico e sottoposto all'azione attuante di un corpo elettrizzato in più.

59. *Osservazione* VII. In un siffatto corpo, se la materia deficiente e il fluido sovrabbondante che dopo stabilito l'equilibrio si trovano adjacenti da bande opposte alla superficie ABCD, venissero projettati e condensati su questa per mezzo di movimenti ad essa normali, pochissima azione nascerebbe con ciò verso i punti interni, attesa la piccolezza de' movimenti operatisi; e pochissimo cangiamento si esigerebbe nella distribuzione di esso elettrico e di essa materia deficiente, mantenuti in questa superficie, perchè si riavesse l'esatto equilibrio.

Si otterrebbe poi una distribuzione superficiale veramente equilibrata immaginando disposta nella superficie ABCD una quantità di materia deficiente distribuita in modo da compensare l'azione del corpo MN verso i punti interni ad essa ABCD, e una quantità di fluido sovrabbondante che basti, per riguardo alla massa, a saturare questa materia e sia disposta in modo da non esercitare azione alcuna verso i punti interni. E anche questa distribuzione ipotetica sarebbe pochissimo diversa dalla distribuzion reale che prende l'elettrico nel corpo ABCD alla presenza di MN: le diverse porzioni cioè della superficie ABCD conterrebbero con questa distribuzione ipotetica prossimamente quella stessa quantità di materia deficiente o di fluido sovrabbondante le quali si trovano loro rispettivamente sottoposte colla distribuzione reale. Perocchè nella distribuzione reale la materia deficiente e il fluido sovrabbondante formano sempre, sotto la superficie de' corpi, degli strati estremamente sottili.

Ne' prossimi paragrafi 60, 61, 62, 63, 64 si espongono de' risultamenti che si verificherebbero appuntino nel caso che la distribuzione delle due elettricità fosse puramente superficiale, che e hanno luogo soltanto per approssimazione, ma approssimazione grandissima, nel caso reale di una distribuzione che occupi qualche minima grossezza.

60. *Osservazione* VIII. Se l' elettricità positiva del corpo MN si cangiasse in negativa conservando la medesima intensità, in tutti i punti della superficie ABCD verrebbesi ad avere uno stato contrario al precedente ed ugualmente intenso. Infatti così avvenendo, si equilibrerebbero ancora fra loro le azioni esercitate su ciascuna molecola del fluido interno sì per parte del corpo MN che delle elettricità superficiali del corpo ABCD.

61. *Osservazione* IX. Trovandosi a fronte del corpo ABCD parecchi corpi attuanti, elettrizzati alcuni in più ed altri in meno, lo smovimento prodotto in esso corpo ABCD si avrà col determinare le distribuzioni che verrebbero separatamente in esso cagionate dalla presenza de' diversi corpi attuanti, e

coll' immaginare quindi sovrapposte e compenetrate tutte le distribuzioni separate; di maniera che in un punto qualsivoglia della superficie del corpo attuato si avrà quella specie e quella intensità di elettricità che risulta dal sommare insieme tutte le intensità positive relative a quel punto, e tutte le intensità negative, e dal sottrarre l' una somma dall'altra. Con questa distribuzione in fatti si equilibreranno a vicenda tutte le azioni operanti su ciascuna molecola d' elettrico esistente nell' interno del corpo.

A questo caso si riduce evidentemente quello in cui si ha un unico corpo attuante elettrizzato in alcune sue parti in più e in altre in meno.

62. *Osservazione* X. Se il corpo attuato, oltre all' esser soggetto all' azione di uno o più corpi attuanti, ha altresì un' elettricità propria, la distribuzione che dee in esso avere l' elettrico si può determinare cercando separatamente la distribuzione dell' elettricità propria, e le distribuzioni che verrebbero separatamente cagionate in esso, supposto allo stato naturale, da ciascuno de' corpi attuanti, e quindi immaginando compenetrate insieme tutte queste distribuzioni.

63. *Osservazione* XI. Se il corpo attuato è in comunicazione col terreno, si ha la distribuzione dell'elettricità in esso corpo, riguardando questo siccome formante una massa unica col globo terrestre. Donde si ricava che anche in questo caso la distribuzione è meramente superficiale; e che essendo parecchi i corpi attuanti, ella si può ancora dterminare coll'immaginar compenetrate insieme quelle separate relative a ciascuno di essi.

64. *Osservazione* XII. Allorquando son più d' uno anche i corpi attuati, la distribuzione dell' elettricità in ciascuno di essi, separatamente considerato, si ha riguardando lui solo come attuato e tutti gli altri come attuanti. Ond' è che anche in questo caso l' elettricità de' detti corpi attuanti è tutta superficiale.

65. *Osservazione* XIII. A compimento delle cose precedentemente esposte richiamerò il caso contemplato al §. 17, cioè di un corpo il quale, levandogli successivamente degli strati di materia repulsiva privi di azione verso i punti interni, si venga in fine a ridurre a più parti discontinue. In qual modo potrassi dopo ciò continuar ancora tale sottrazione?

Noi possiamo distinguere in cotale questione tre casi. Sia infatti PQ (*fig.* 19) un corpo formato di una materia ripulsiva respingentesi al solito in ragione inversa de' quadrati delle distanze; e levati da esso diversi strati privi di azione verso l' interno, siasi egli ridotto alle due parti A e B toccantisi in un unico punto C:

1.° Si potrà in primo luogo supporre cessata di esistere una delle due parti, p. e. la parte B, e continuar a levare all' altra A degli strati privi d' azione verso l' interno, come se questa parte A fosse sola.

2.° Si potrà in secondo luogo considerare la parte B come sussistente per intero; e immaginare levati alla sola A degli strati per tal maniera da essere nulla l'azione dentro di essi, avuto riguardo anche all' azione attuante della B. E in questo caso il primo strato da levarsi dovrebbe esser tale da compensare, per rispetto ai punti a lui interni, l'azione della parte B; essendo poi gli strati successivi mancanti d' azione verso l' interno considerati da se soli.

3.° Si potranno in terzo luogo determinare tanto in A quanto in B degli strati di materia ripulsiva per tal maniera, che riesca nulla l' azione sì dentro a quelli di A che dentro a que' di B. In questo caso saranno arbitrarie, dentro certi limiti, le quantità da prendersi in A e in B; e assegnate ch' esse sieno, si comincerà a dare una figura a piacimento alla interna superficie della quantità *b* che si vuol prendere in B, e si determinerà la figura che dee darsi all'interna superficie della quantità *a* che si vuol levare da A, affinchè riesca nulla l' azione all' interno di essa *a*, avuto riguardo anche all'azione attuante di *b* (le esterne superficie di *a* e di *b* sono quelle

stesse di A e di B). Di poi, lasciata in questo stato la materia *a*, si aggiusterà la *b* in guisa, che computata l'azione di *a* riesca nullo l'effetto nell' interno di *b*. In appresso, siccome con quest' ultima operazione verrà a sconcertarsi l'azione al di dentro di *a*, converrà aggiustare di nuovo la materia di questa *a*. Poi si aggiusterà nuovamente quella di *b*; e così di seguito. Con che si andrà sempre più presso a due limiti, nei quali non vi sarebbe più azione nè all'interno di *a* nè all'interno di *b*. È però d' uopo, per la possibilità della soluzione, che assegnata, p. e., la quantità *a*, non sia la *b* più piccola di un certo limite, e nemmeno più grande di un altro limite, essendo però essa a nostro pieno arbitrio dentro cotali due limiti; i quali si verranno a conoscere nel tentare l' operazione. È questo un caso identico con quello di due corpi vicendevolmente attuantisi.

ARTICOLO TERZO.

Della distribuzione dell' elettricità negli inviluppi conduttori racchiudenti de' corpi elettrizzati.

66. Se un corpo elettrizzato si trova collocato al di dentro di un inviluppo conduttore chiuso tutto all' intorno e comunicante col terreno, rimanendo il corpo rinchiuso perfettamente isolato da cotale inviluppo, si stabilisce nell' interna superficie di quest' ultimo un' elettricità contraria a quella del detto corpo racchiuso, rimanendo però allo stato naturale tutta la grossezza dell' inviluppo medesimo e tutta la superficie esterna. Il quale effetto, allorquando il corpo rinchiuso è elettrizzato in più, nasce da ripulsione del fluido sovrabbondante di quest' ultimo verso il fluido naturale dell' inviluppo; e quando esso corpo rinchiuso è elettrizzato in meno, nasce da attrazione della materia deficiente di un tal corpo verso il fluido naturale de' corpi circostanti. Io esporrò nelle Proposizioni seguenti alcune particolarità di questa elettricità dell'in-

viluppo; e primieramente dell' esser ella unicamente disposta alla superficie interna.

PROPOSIZIONE XV.

67. *Sia* ABCD (*fig.* 20) *la superficie interna di un inviluppo, dentro al quale si contenga una determinata quantità di una materia ripulsiva, distribuita comunque nello spazio* MN, *e la cui ripulsione operi in ragione inversa dei quadrati delle distanze. Si asserisce che una tale quantità di materia ripulsiva può essere distribuita e condensata per tal modo nella superficie* ABCD, *da esercitare verso lo spazio esterno la stessa azione come quando si trova ancora distribuita in* MN.

Si immagini descritta all' esterno di ABCD un' altra superficie chiusa *abcd*, che non tocchi la prima in nessun punto. Si concepisca divisa la materia ripulsiva distribuita in MN in un grandissimo numero di parti di minime dimensioni, e ciascuna di queste parti si supponga prima concentrata nel suo rispettivo centro di massa, e poscia diffusa e uniformemente distribuita in una superficie sferica descritta intorno a cotal centro e toccante la superficie *abcd*; con che una porzione di siffatta materia ripulsiva passerà nell'intervallo ABCD*abcd*. Sull' altra porzione che rimane ancor compresa al di dentro di ABCD supponiamo eseguita un' operazione simile a quella indicata or ora, con che sia fatta passare una nuova quantità di detta materia ripulsiva nel medesimo intervallo. Immaginiamo replicata la stessa operazione sulla parte di materia ripulsiva che rimane ancora dentro ABCD; e così proseguiamo fino a che entro ad ABCD non ne resti più che una quantità piccolissima. Noi avremo alla fine la massima parte della materia ripulsiva proposta ridotta nell' intervallo anzidetto, con un cangiamento estremamente piccolo nell'azione di essa materia verso i punti collocati all' esterno di *abcd*. E questo cangiamento, come anche la quantità di materia lasciata dentro ABCD si potranno rendere minori di ogni quantità

assegnata, quando si continuino a sufficienza le operazioni, e si prendano di dimensioni sufficientemente piccole le parti in cui si viene ciascuna volta a dividere la materia ripulsiva che era rimasta dentro ABCD. Dal che possiamo conchiudere che alla materia ripulsiva disposta primitivamente nello spazio MN può essere data una tale disposizione entro l'intervallo ABCD*abcd* da esercitare ancora la medesima azione verso i punti collocati all' esterno di *abcd*. E siccome la superficie *abcd* si può prendere vicina quanto si vuole alla ABCD, senza che cessi la verità di questa Proposizione, così, col metodo usato al §. 13, possiamo altresì conchiudere che tutta la suddetta materia ripulsiva si può immaginare per tal modo condensata e distribuita nella superficie ABCD, da esercitare ancora la medesima azione di prima verso i punti collocati all' esterno di questa superficie.

PROPOSIZIONE XVI.

68. *All' esterno della superficie* ABCD *precedentemente menzionata, si trovi disposta secondo una qualsivoglia legge di densità una quantità indefinita di una materia ripulsiva simile a quella contenuta nello spazio* MN. *Si asserisce potersi determinare all' esterno di* ABCD *una tale altra superficie che lo strato di materia ripulsiva compreso nell' intervallo frapposto eserciti all' esterno la medesima azione, come la materia disposta in* MN.

Si supponga divisa questa materia disposta in MN in tante minime porzioni p, p', p'', ec. Si immagini condensata e distribuita in ABCD una porzione della menzionata materia esterna, uguale in quantità alla p, ed equivalente a questa per riguardo agli effetti esercitati all' esterno, e formata da molecole dell' inviluppo vicinissime alla superficie ABCD e venute su quest' ultima per mezzo di movimenti ad essa normali. Verrà con ciò la residua materia del detto inviluppo ad avere un' altra superficie interna, la quale chiameremo A'B'C'D'.

Immaginiamo distribuita in questa un' altra porzione della medesima materia dell' inviluppo, uguale in quantità a p', equivalente a questa nelle azioni verso l' esterno, e formata da molecole dell' inviluppo vicinissime ad A'B'C'D' mossesi dai proprii luoghi in direzioni normali ad essa A'B'C'D'. Nella nuova superficie interna dell' inviluppo, la quale noi diremo A''B''C''D'', s' immagini condensata in modo simile una quantità di materia ripulsiva uguale a p''. E così si prosegua finchè siansi tutte esaurite le parti p, p', p'', ec. E dopo tutto ciò si suppongano restituite alle proprie sedi le molecole di materia ripulsiva state trasportate nelle suddette superficie ABCD, A'B'C'D', A''B''C''D'' ecc. Si avrà con ciò uno strato di materia ripulsiva, formato da una porzione della materia dell'inviluppo collocata ancora a proprio luogo, il quale strato uguaglierà in massa la quantità di materia distribuita in MN, ed avrà un' azione verso i punti esterni pochissimo diversa da quella esercitata da essa materia di MN, e tanto meno diversa quanto più piccole e più numerose saranno le parti p, p', p'', ecc., ossia quanto più vicine saranno le dette superficie vicendevolmente includentisi. Dal che si può conchiudere potersi un tale strato terminare esternamente in siffatto modo da avere verso i punti esteriori un' azione perfettamente equivalente a quella della materia distribuita in MN.

69. *Osservazione*. I varii movimenti che si sono supposti nella materia repulsiva distribuita in MN, nella Proposizione xv, non cangiano per nulla il luogo del centro di massa di questa materia; di manierachè dopo essersi questa condensata e distribuita nella superficie ABCD, un siffatto centro di massa è ancora nello stesso luogo di prima. Nella xvi Proposizione poi il comun centro di massa delle porzioni di materia repulsiva distribuite nelle varie superficie ABCD, A'B'C'D', ecc. è lo stesso di quello della materia distribuita in MN. Si può perciò conchiudere che quest' ultimo coincide altresì con quello dello strato di materia determinato intorno ad ABCD nella Proposizione xvi medesima.

PROPOSIZIONE XVII ED ULTIMA.

70. Sia MN un corpo elettrizzato in più dove l'elettrico abbia una distribuzione qualunque; e all' esterno abbia esso un inviluppo conduttore, la cui interna superficie ABCD sia di una forma qualunque. Determiniamo in quest' inviluppo uno strato contiguo ad ABCD, tale che il suo fluido naturale sia uguale in quantità ed equivalente nelle azioni verso l'esterno, al fluido sovrabbondante di MN; e quindi immaginiamo levato tutto l' elettrico di un tale strato. Verranno con ciò le molecole d' elettrico esteriori allo strato deficiente, per l' azione combinata della materia lasciata deficiente e del fluido sovrabbondaute di MN, a trovarsi perfettamente in equilibrio. E perciò la distribuzione di equilibrio nell' inviluppo suddetto, supposto comunicante col suolo, sarà quella di avere contiguo all' interna superficie l' anzidetto strato deficiente, essendo nel rimanente tutto allo stato naturale.

Sia invece MN un corpo elettrizzato in meno; e si supponga distribuito nella superficie ABCD uno strato di fluido sovrabbondante uguale in quantità al fluido che manca in MN, ed equivalente a questo nelle azioni verso l'esterno, essendo allo stato naturale tutto il resto dell' inviluppo. Anche questa sarà una distribuzione in cui tutte le molecole d' elettrico esteriori alla superficie ABCD si troveranno equilibrate; e sarà essa perciò la distribuzione che avrà luogo nell'inviluppo medesimo quando sia messo in comunicazione col terreno. Veramente, nel caso reale, l' elettricità indotta dell' inviluppo consisterà in uno strato di qualche piccola grossezza. Ma riferendo tutte le molecole d'elettrico sovrabbondanti ai punti normalmente sottoposti della superficie ABCD, si avrà una distribuzione pochissimo differente da quella considerata al §. 67.

Da quanto poi abbiamo veduto al §. 69 possiamo dedurre che il centro di massa dello strato d' elettrico che manca o

che sovrabbonda sopra la superficie ABCD, coincide col centro di massa dell' elettrico che viceversa sovrabbonda o manca nel corpo elettrizzato MN.

71. *Osservazione* I. Supposta in MN prima una sovrabbondanza e poscia una deficienza, uguali in grandezza e simili nella distribuzione, si avranno similissime le maniere di distribuzione delle elettricità indotte nella superficie ABCD; giacchè la diversa sottigliezza degli strati elettrizzati non può arrecare che una differenza impercettibile.

72. *Osservazione* II. L'accumulamento dell'elettricità indotta, sia positiva, sia negativa, nella superficie ABCD, è maggiore in quelle parti di questa che sono più sporgenti verso il vano interno, minore in quelle meno sporgenti, e minima nelle parti cave o rivolte verso l' esterno; tutto al contrario di quanto avverrebbe se ABCD fosse la superficie esterna di un corpo elettrizzato di elettricità propria, e non soggetto ad alcuna azione straniera.

73. *Osservazione* III. Se dentro alla superficie ABCD si trovassero contenuti parecchii corpi MN, M'N', M''N'', ecc. elettrizzati alcuni in più ed altri in meno, si avrebbe per induzione nella ABCD una distribuzione d'elettrico equivalente a una compenetrazione di tutte le distribuzioni corrispondenti ai diversi separati corpi interni (1).

---

(1) In questa Proposizione io sono stato prevenuto dal celebre Poisson, il quale nella sua prima Memoria intorno al magnetismo, inserita fra quelle dell' Accademia di Parigi per gli anni 1821 e 1822, dimostra che in un corpo magnetico di qualunque figura e magnetizzato comunque, purchè di uniforme natura e di temperatura uniforme (le quali due ultime condizioni però io trovo superflue), al magnetismo reale distribuito nelle diverse parti esterne ed interne si può sostituire un magnetismo ipotetico puramente superficiale opportunamente disposto, senza che venga minimamente alterata l' azione magnetica verso i corpi esterni. (Vedi le suddette Memorie di Parigi p. 261). A una simile conclusione arrivò posteriormente altresì Gauss (*Ann. Chim. Phys.* T. 57. p. 16). E qui è da notare che anche le azioni magnetiche variano in ragione inversa de' quadrati delle distanze.

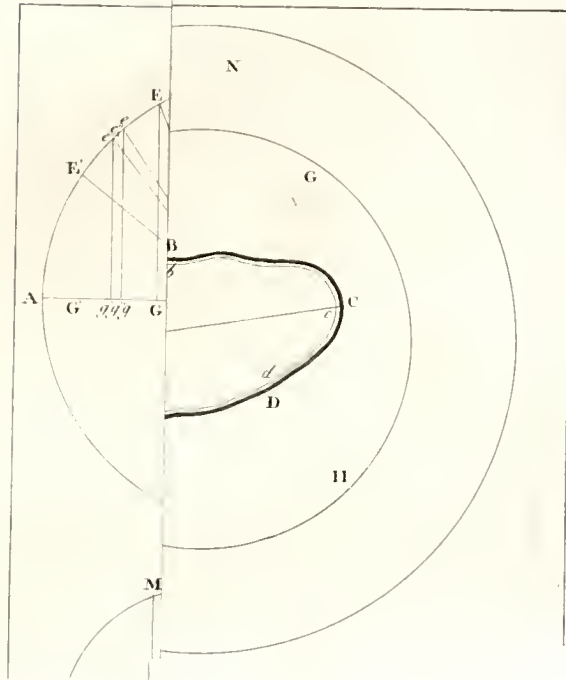
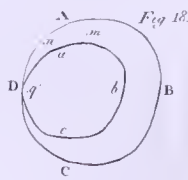
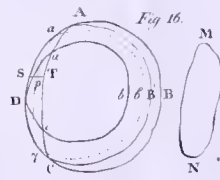
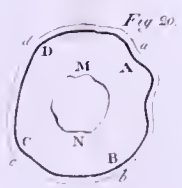
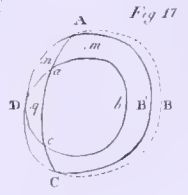
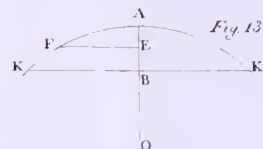
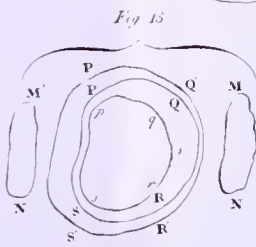
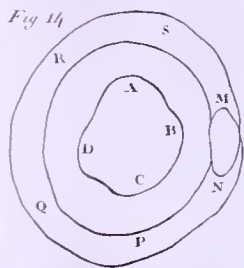
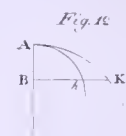
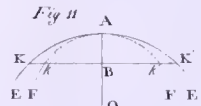
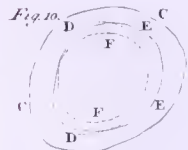
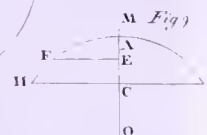
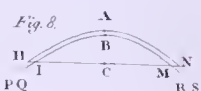
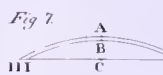
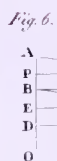
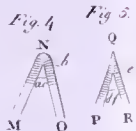
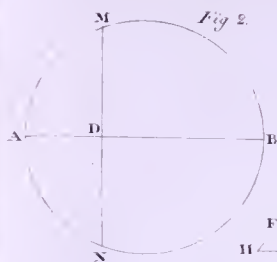
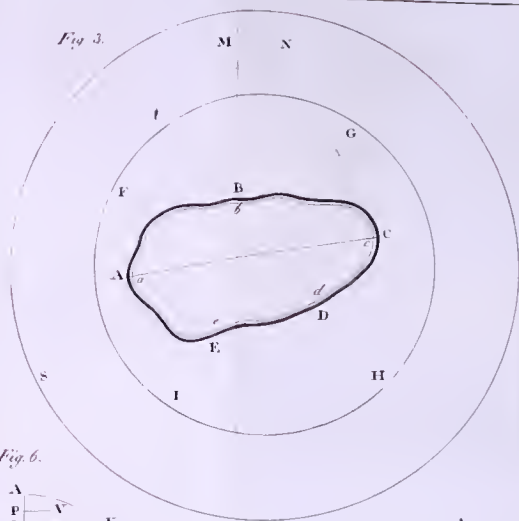
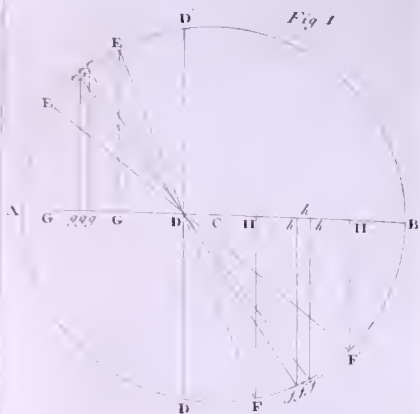
74. *Osservazione* IV. Se oltre alla elettricità indotta di cui si è parlato poc'anzi, venisse comunicata all'inviluppo, dopo averlo isolato dal terreno, un' altra elettricità o positiva o negativa, questa si distribuirebbe alla superficie esterna di esso inviluppo con quella stessa legge come se nell' interno non vi fosse nè il corpo elettrizzato racchiuso nè la contraria elettricità indotta, ma quella superficie appartenesse a un corpo pieno, tutto allo stato naturale. Talchè se si mettesse in comunicazione il corpo rinchiuso colla interna superficie dell'inviluppo, e l' elettrico potesse liberamente tragittare fra l'uno e l'altra, si ridurrebbero questa e quello allo stato naturale, senza che alla superficie esteriore avvenisse mutamento alcuno.

E se l' inviluppo, essendo isolato e contenendo il corpo elettrizzato, avesse tutta la sua natural dose d'elettrico, esso nella superficie interna si troverebbe elettrizzato di elettricità indotta precisamente allo stesso modo come se si trovasse in comunicazione col terreno; e alla superficie esterna presenterebbe una elettricità attuata uguale in quantità e simile di natura a quella del corpo racchiuso e disposta allo stesso modo, come se questa superficie esterna fosse la superficie di un corpo pieno, avente prima lo stato naturale, e arricchito di poi ovvero privato di quella quantità d' elettrico.

75. *Osservazione*. V. Dalle cose dette nel secondo e in questo terzo articolo noi possiamo conchiudere che un inviluppo conduttore il quale circondi un corpo, impedisce sempre che questo corpo soffra le azioni elettriche esteriori; e se esso inviluppo è in comunicazione col suolo, impedisce altresì ai corpi esterni le azioni elettriche esercitate dal corpo contenuto.

76. *Osservazione* VI. Non espongo in questa Memoria risultamenti particolari riguardanti la distribuzione dell' elettrico in uno o in altro corpo, in una od in altra circostanza. Su di che, quando si tratti di conduttori elettrizzati non soggetti ad azioni attuanti straniere, o di conduttori soggetti all'azione di corpi attuanti esterni, possono vedersi trattati alcuni casi in due

Mem di

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20

belle memorie di Poisson (1), delle quali la presente si potrebbe riguardare come una Prefazione. Per rispetto ai corpi elettrizzati collocati nell'interno di inviluppi conduttori, sarebbe degno d'essere trattato il caso di un punto elettrizzato collocato dentro un inviluppo limitato internamente da una superficie sferica, pel quale caso si ha una legge di distribuzione elegantissima (2). Ma lo riserbo ad altra occasione.

---

(1) Sono esse quelle citate nel §. 1. di questa mia Memoria.

(2) Viene cioè determinata nella detta superficie un' elettricità contraria la cui intensità è in ragione inversa de' cubi delle distanze dal punto attuante. V. il mio *Corso di Fisica* T. III. p. 180.

ESPERIENZE E CONGETTURE

SULLA FORZA MAGNETICA

DEL P. GIO. BATTISTA PIANCIANI

Ricevute adì 6 Marzo 1840.

PARTE PRIMA.

In una Memoria pubblicata già da quattro anni (*a*) esposi alcune sperienze sulla virtù magnetica osservata in certe leghe metalliche. Alcune sperienze relative allo stesso argomento e alcune congetture fanno il soggetto della presente, destinata ad estendere la prima e ancora a confermarla in parte e in parte a riformarla.

In quella, recando non pochi fatti, feci vedere che l'ottone, e così pure il bronzo, assai spesso danno indizii di magnetismo e molto più forti e agevoli a osservare che non nei metalli componenti; che questo magnetismo non è soltanto il magnetismo passivo e fuggitivo, già da altri più volte nell' ottone osservato, e simile a quello del ferro dolce, quale può facilmente spiegarsi con particolette di ferro disseminate per la lega metallica e non combinate con essa; ma facilmente si ottiene permanente, e i due poli non si stabiliscono quasi mai, come nell' acciaio, alle estremità della lunghezza; ma ordinatamente sopra e sotto un ago romboidale o altro simil corpo allungato; ossia la linea che congiunge i poli misura la spessezza del pezzo cioè la minor dimensione. Accennai pure qualche fatto che pareami render probabile che una vernice di gomma lacca aumentasse la, così detta, *forza coercitiva*, ossia disponesse la sostanza metallica a ricevere il magnetismo permanente o a ritenerlo più a lungo. Riferii varie

(*a*) *Giorn. Arcad.* T. LXI.

riflessioni e sperienze fisiche e chimiche destinate a ricercare se questa virtù magnetica si debba a particolette di ferro; e quantunque non osassi recar su ciò sicuro giudizio, mi parve non lievemente probabile che tal virtù non si dovesse tutta e sempre tribuire al ferro, o almeno che piccolissima porzione di ferro bastasse a rendere magnetiche quelle leghe.

Tornando di tanto in tanto a speculare ed a sperimentare su quest' argomento, ho confermato (benchè non ve ne fosse bisogno) la singolare distribuzione del magnetismo in tai corpi, e l' ho veduta anche in alcuni cilindri di ottone e di bronzo. Con un polo della calamita ho fatto delle strisciate sopra una superficie d' una lastrina di serpentino nobile, nella quale sono senza dubbio delle molecole d'ossido di ferro, forse misto al cromo : ha acquistato i due poli permanenti alle due opposte superficie. Lo stesso con pari facilità ho ottenuto in altra simile lastrina, come pure in varie lastre rettangolari di serpentina di Germania e d' Italia : in una di queste con pari agevolezza fissai due coppie di simili poli (sopra e sotto) opposta una all' altra, ne' due lati maggiori del rettangolo. Dopo un mese e più questo magnetismo non è distrutto. Non posso dopo ciò dubitare che anche in tali sostanze pietrose, allorchè in virtù di un poco di materia magnetica mostrano il magnetismo passivo, si stabiliscano agevolmente i poli magnetici (almeno quando le lastre non hanno molta spessezza), ma questi si trovano collocati alle estremità non della maggior dimensione o della lunghezza, ma bensì della minore o della spessezza, cioè uno nella superficie superiore e l' altro nella inferiore della lastra. Così qualche nuovo fatto m' ha reso più verisimile la virtù coercitiva della vernice di gomma lacca, comechè non pretenda di dare la cosa per dimostrata, e brami che altri si occupi in questa indagine, che non è per avventura senza importanza nella teoria magnetica. Ma qui m' è duopo avvertire che io non dico nè mai ho pensato, che l' ottone o altro corpo, allorchè non ha azione sull'ago calamitato, acquisti tal virtù dalla gomma lacca; nè ho detto o pensato

che essa susciti la forza coercitiva ove questa è nulla, ma senza più m' è sembrato che almeno in certi casi alquanto accresca tal forza.

Principalmente, non appieno soddisfatto de' miei cimenti, che sembravano mostrare l'indicata virtù magnetica dell'ottone indipendente dal ferro, ho di nuovo a questo punto rivolta la mia attenzione. Tanto più m' è paruto ciò convenire, dacchè vidi che valenti fisici inclinano all' opposta sentenza, e il cel. Faraday ha dedotto dalle sue indagini che, tratto il ferro e il nikel, niun altro metallo, nè pure il cobalto, gode della virtù magnetica. Mi sono procurato del rame, dello zinco e dello stagno assai puri: niuna azione mostravano sull' ago calamitato (non so, nè era necessario al mio scopo, cercare se alcuna, almeno assai piccola, ne avrebbero mostrata esplorati con mezzi squisitissimi), e l'ottone e il bronzo fatti con que' metalli non mostrarono azione maggiore di quella de' loro elementi. Ciò mi dispose ad ammettere che qualche poco di ferro fosse necessario a questi effetti. Volli assicurarmi dell'esistenza o più tosto della quantità relativa di ferro esistente in qualche pezzo d' ottone ordinario del commercio abbastanza atto a queste sperienze. Dico piuttosto della quantità del ferro che della sua esistenza, perocchè è assai noto che qualche poco di ferro suol trovarsi nell' ordinario ottone, come nel rame, nello zinco e in altri corpi moltissimi. Pregai però il ch. sig. Professor Peretti, esperto chimico e professore di farmacia in questa Università di Roma, a volersi compiacere di sottomettere a chimico esame un pezzo d'ottone che facilmente aveva ricevuto i poli magnetici onde riconoscere se contenesse ferro, e determinarne la quantità; del che esso cortesemente mi compiacque.

Studiando i metodi proposti da' chimici, s' era egli avveduto essere difficilissimo riconoscere le piccole quantità di ferro, che è ordinariamente unito alle leghe metalliche: nondimeno, profittando de' lumi della scienza, si propose di usare due metodi, uno per riconoscere l' esistenza, l'altro per determinarne la quantità. Udiamoli da lui stesso.

“ Cento grani d' ottone ben divisi furono posti in un matracio di vetro e trattati coll'acido azotico (nitrico) depurato, il residuo non isciolto da questo acido fu posto nell' acido cloroidico parimente depurato, ove si sciolse perfettamente. La soluzione acida fu neutralizzata col carbonato di calce puro e separato il fluido da poco carbonato di calce non decomposto per mezzo di un filtro, fu diviso in due bicchieri: versai in uno alcune gocce di cianoidro-ferrato di potassa e formossi dell' azzurro di Prussia: versai nell' altro dell' acido gallico in soluzione, e si produsse dell' inchiostro. Riconosciuta la presenza del ferro, cercai di determinarne la quantità. „

“ Sapendo che l'acido azotico ha la proprietà di sciogliere il rame e lo zinco e che il ferro passando per mezzo di esso acido allo stato di perossido non è più attaccato dal medesimo, ho trattato altri cento grani dello stesso ottone col detto acido e rinvenni un residuo non del tutto composto di perossido di ferro, ma bensì d' un miscuglio di tal perossido e d'un precipitato bianco il quale sembra non possa appartenere agli altri metalli che costituiscono l' ottone: questo residuo fu di nuovo sciolto nell' acido cloroidrico, come nella precedente operazione; fu anche saturato l'eccesso d'acido col carbonato di calce: indi sopra il fluido filtrato si versò a poco a poco dell' acido gallico, che formò un precipitato azzurro: ma siccome si era alcun poco ecceduto nell' acido gallico, il precipitato si tornò a sciogliere. Fu allora saturato l' eccesso dell' acido coll' ammoniaca e ricomparve l'intorbidamento colorato. Lasciato il tutto in riposo per più giorni , e separato il precipitato, fu questo poi diseccato in una capsula di platino reso rovente. Il residuo fu di nuovo trattato coll'acido azotico, quindi diligentemente lavato ed asciugato a un forte calore. Pesata la capsula dopo tale operazione, e ripesata appresso, dopo che fu tolto tutto il residuo per mezzo dell'acqua, il peso si trovò diminuito di 0,6 di grano. Detto residuo aveva i caratteri di perossido di ferro. „ Fin quì il lodato

sig. Prof. Peretti in un foglio che ha lasciato in mia mano. Secondo Berzelius il perossido di ferro, detto pure *ossido ferrico*, è composto di 69, 34 parti di ferro e 30, 67 d'ossigene (*a*): dunque il ferro trovato in quell' ottone non è 2 in 3 decimi di grano, ossia 2 in 3 millesimi della massa dell'ottone. Una virtù magnetica, la quale non fosse più che la metà o un terzo di quella di quest' ottone, sarebbe pure sensibile eziandio esplorata con mezzo di non estrema delicatezza, dal che sembra potersi dedurre che un millesimo di ferro al più basta a render l' ottone capace di *stabile magnetismo* ciò che non accade al rame nè allo zinco. Bensì, come insegna Berzelius (*b*), la combinazione del rame col ferro è magnetica allora eziandio che non contiene più che 1/10 di ferro. Che dedurremo da ciò? che il magnetismo dell' ottone è indipendente dal ferro? non già: bensì che la virtù magnetica del ferro può essere accresciuta dalla unione, non solo di qualche altro metallo per se non magnetico, ma ancora di qualche lega, i cui elementi non sono atti ad ajutare il ferro ugualmente. In vero, come si è osservato nella costruzione de' reometri o galvanometri, e come attestano vari fisici (*c*), sembra essere cosa difficilissima procurarsi de' fili di rame non magnetici, cioè privi al tutto di azione sull' ago astatico leggerissimo, e che lo stesso a un dipresso si debba dire dell' argento. Ma esplorando parecchi pezzi di ottone capaci di permanente magnetismo, ed altri di rame presi così alla ventura (e però questi come quelli contenenti qualche poco di ferro) può ognuno accertarsi della notabilissima differenza che è tra i primi e i secondi. Horner faceva osservare in una memoria pubblicata l' anno 1822, che nelle bussole nautiche convien guardarsi dal magnetismo, che le particolette di ferro

(*a*) *Traité de Chimie*. T. III. p. 254.

(*b*) l. c. p. 230.

(*c*) Peclet, *sur une nouveau galvanometre*. Comptes rendus de l'Acad. des sciences. 1839. Sem. I. p. 298. Peltier *Observations sur les multiplicateurs*... p. 5-7.

comunicano all' ottone, e però scaldar questo quasi a rosso, e lasciarlo poi raffreddar lentamente; ed aggiungeva. *ogni precauzione può risparmiarsi facendo le bussole di rame o d'argento*. Il magnetismo del rame e dell' argento, di cui parlano i fisici accennati, è cosa minima, e non permanente. Non parlo dell' azione scoperta del sig. Arago, che hanno i vari corpi, e in particolare il rame, d' impedire alquanto le oscillazioni dell' ago calamitato, azione che si spiega assai ragionevolmente colle correnti elettriche d' induzione, e nulla ha di commune col magnetismo permanente. Quella azione si è trovata da Seebeck maggiore, e dai fisici italiani Nobili e Bacelli (*a*) quasi quattro volte maggiore nel rame che nell' ottone.

Ma qual' è egli il soccorso che dà l'ottone alla virtù magnetica del ferro? in primo luogo sembra che le molecole del ferro racchiuso fra quelle dell' ottone (o del bronzo) acquistino una *forza coercitiva* che non avevano. Così gliela danno o gliel' accrescono, purchè non abbondino soverchiamente, l' ossigeno, il carbonato, il fosforo, e lo stagno. Si dirà che queste sostanze si uniscono chimicamente al ferro, e non già l' ottone e il bronzo. Tanto meglio. "Il ferro, non essendo combinato col nikel, diceva Haüy, il magnetismo di questo dovrebbe essere fuggitivo, come quello del ferro ordinario, e non durerebbe per parecchi anni.„ Lo stesso dirò io dell'ottone e del bronzo, senza per altro conchiudere che queste leghe sieno per se stesse magnetiche, ma solo ch'esse danno al ferro, se punto veggo, il poter conservare quel magnetismo che altrimenti perderebbe, subito che cessa l' influenza che lo destava. Se il cobalto perfettamente purificato non è magnetico, come assicura Faraday, convien dire che il magnetismo debole ma permanente che s' è osservato nel cobalto supposto puro, derivava da minime quantità di ferro o di

---

(*a*) *Del magnetismo del rame e di altre sostanze*. V. Nobili *Mem* T. 1. p. 16.

nikel sfuggito alle indagini de' chimici. E queste da chi mai ricevono la *forza coercitiva*, se non dal cobalto?

Ma sarà solo questo l'uffizio delle molte particelle di cobalto che involgono quelle pochissime di ferro o di nikel? Una piccolissima quantità di ferro basta a rendere magnetici il bismuto e il manganese (*a*). Lo stesso dee avvenire al cromo, dacchè qualche chimico lo aveva creduto dotato di qualche debole virtù magnetica, benchè ora tal opinione sia contradetta dalle indagini di Faraday. Forse il medesimo è a dire del titanio, cui pure s'è da taluno attribuita una debol forza magnetica. Sarà egli impossibile che il cromo, il manganese, il bismuto, il cobalto, il titanio, e l'ottone, e il bronzo non sentano direttamente ed immediatamente l'azione della calamita ma bensì mediante l'azione di molecule di ferro in esse racchiuse? che sieno cioè non magnetiche per se, se non forse in grado affatto minimo, ma si magnetizzabili da tal interno agente, allorchè egli ha ricevuto co' metodi ordinarj il magnetismo? Che di tal proprietà partecipi qualche altra sostanza metallica, e. g. il rame, in grado inferiore? Almeno è certo che il ferro in così piccola quantità non acquista i poli permanenti se è misto a materie affatto inerti non metalliche. Il sig. dottore De Haldat (*b*) ha osservato, che riempiendo un tubo di limatura di ferro o ancora di particelle di questo metallo ridotto in polvere finissima, pestata, tritata, passata per setaccio di tessuto assai stretto, questa prende e conserva i suoi poli nè più nè meno che un cilindro di ferro battuto d'eguali dimensioni. Mescendo alle particelle di ferro un

---

(*a*) Berzelius loc. cit. p. 290, 295.

(*b*) *Sur la force coercitive et la polarité des aimants sans cohesion. Mem. de la Soc. R. de Nancy*, 1836, p. 74. Il P. Kircher aveva osservato che empiendo di finissima limatura di ferro un tubo di penna da scrivere, premendola in esso, chiudendola e ponendola sur un pezzetto di sughero notante sull'acqua, il tubo seguiva la calamita, e dopo qualche tempo si dirigeva come l'ago calamitato. *Magnes*. Ed. 3.ª 1654. Roma p. 76.

volume eguale d'arena di fiume, e in successive sperienze aumentando questa, finchè il ferro non fu che $\frac{1}{6}$ del volume totale, vedeva sempre i poli permanenti, ma però nell'ultimo caso erano estremamente indeboliti. Se il mentovato Fisico sperimentò, com'è assai probabile, quantità relativamente minori di ferro, non ebbe più tal'effetto: dalla polarità estremamente indebolita alla polarità insensibile non è che un passo. Mi pare possibile che, come alcune sostanze hanno, dirò così, una virtù antimagnetica, e.g. l'arsenico e anche più l'antimonio, che tolgono al ferro il suo potere magnetico; così altre per contrario possano ricevere dal ferro cui sono congiunte una partecipazione della sua virtù, e forse insieme mantener questa in attività, reagendo sulle particelle del ferro; a un di presso come dalla calamita è communicata all'ancora di ferro dolce la sua virtù, e la reazione di questa mantiene il potere alla calamita. Come alcune sostanze mostrano tal potere solo per essere state sottomesse all'influenza della calamita, ed altre allora soltanto che attualmente la toccano o sono assai avvicinate, così (qualunque sistema si adotti rispetto al magnetismo) non è, se mal non m'appongo, contrario alla ragione o all'analogia il pensare che altre non mostrino tal potere, almeno in grado sensibile, salvo se soffrano l'azione di particelle di ferro magnetizzate e in esse racchiuse.

Forse dall'essere le molecule di ferro assai disseminate fra le molecule di un corpo capace di sentir l'influenza magnetica di quelle, dipende la disposizione a prendere i poli secondo la minor dimensione? A questa interrogazione non saprei rispondere cosa che vaglia, e per avventura prima di tentar di rispondere converrebbe conoscer bene la natura della forza magnetica.

PARTE SECONDA.

Sulla natura appunto della forza magnetica m'è caduto in mente di esporre qualche mio pensiero. Fra i varj sistemi, co' quali si sono spiegati i fenomeni magnetici, se mal non m'avviso, non può dubitarsi che meriti la preferenza quello delle correnti moleculari dovuto ad Ampère, chi non voglia negare una teorica che discende spontanea da' fatti, comechè non dimostrata a rigore, doversi la preferenza sulla ipotesi di chi immagina nuove sostanze, e le dota delle proprietà che trova opportune per l' interpretazione de' fatti. Ora che i fenomeni tutti della calamita s' imitano perfettamente colle correnti elettriche, ora che fra queste e quelle si osserva non somiglianza ma identità di effetti, che più dobbiamo aspettare per dedurre identità di cagione? non sarà dunque più vero il principio logico, che quella schiera d' effetti che abbiamo veduto nascere solo da una cagione, conviene ogni qualvolta ci si presenti, attribuirla a quella cagione medesima? questo principio non ci guida ad infallibile certezza, ma bensì al sommo della probabilità, ed è, specialmente in pratica, da tutti approvato e seguito. Nel caso nostro non so qual cosa sia ancor da aspettare, salvo se pretendasi l' impossibile, cioè o che si ponga sotto gli occhi l' invisibile, o si dimostri a *priori* matematicamente una dottrina meramente fisica o contingente. Se la medesimezza degli effetti, e l' operar della calamita sopra un cilindro elettrodinamico appunto come sopra un'altra calamita, e per converso, se ciò non basta a sufficientemente stabilire unità di cagione, non vedo come possiamo tenere per indubitata l' identità dell' elettricità comune colla galvanica o voltiana, o coll' atmosferica, o con quella di cui si armano i pesci elettrici o con quella de' circuiti termelettrici. Mi pare che l' identità dell' agente ne' fenomeni della macchina elettrica e ne' cristalli termelettrici, della quale niuno dubita, sia per avventura meno provata di quella di cui parliamo.

Niuno che ben conosca questo ramo di fisica, pretenderà che a ben provare il sistema, secondo il quale la virtù magnetica dipende da circuiti elettrici moleculari, debba mostrarci o la scintilla inmediatamente prodotta dalla calamita, o in questa le attrazioni e repulsioni elettrostatiche. Si pretenderebbe che solo allora il sistema d'Ampère dovesse abbracciarsi quando fosse trovato falso, perciocchè la corrente elettrica aggirantesi per circuiti tutti metallici non può produrre scintille. E qualora fosse possibile aprire questi circuiti moleculari e vedere qualche scintilluzza, sarebbe questa un' analogia di più fra l'agente elettrico e il magnetismo, come sono una nuova e bellissima analogia i fenomeni dal Faraday chiamati d' induzione volta-elettrica e magneto-elettrica: ma chi di questa analogia non è soddisfatto, potrebbe, secondo ch' io penso, non esserlo neppure di quella.

Nulladimeno questo sistema sembra ad alcuni appoggiarsi ad ipotesi assai lontane dalla certezza. Si suppone ogni particella magnetizzabile cinta da una corrente elettrica che si muove senza posa attorno ad essa in un piano determinato ma variabile; e nei corpi non magnetizzati tai correnti elementari suppongonsi avere tutte le direzioni possibili e però non produrre alcun fenomeno esterno. Non s' intende come ogni particella di questi o di tutti i corpi, sia quasi un minimo elettromotore voltiano, nè come, s' è tale, sì agevolmente la corrente cangi direzione, senza che le molecule soffrano sensibile alterazione. Ovvero si suppone che le calamite e le correnti elettriche destino quelle correntine moleculari ne' corpi magnetizzabili, ora durevoli quanto l'esterno eccitamento, ora permanenti, benchè l' analogìa non favorisca tal supposizione; poichè le calamite e le correnti elettriche inducono soltanto correnti brevissime e passeggiere, e queste nell'atto dell'avvicinamento contrario alla corrente induttrice, non già correnti conformi a questa e durevoli quanto l' azione di questa, e molto meno permanenti dopo il cessare della cagione. Si è aggiunto che si suppongono queste correnti, comechè numerosissime, non

produrre calor sensibile per quanto altri si studii di accrescerne l'energìa. A quest' ultima difficoltà ho cercato rispondere in altro scritto (*a*).

Ma non potrebbesi esporre la dottrina di Ampère in modo che prevenisse al tutto queste difficoltà, e a un tempo congiungesse fra loro con più stretto vincolo i grandi agenti della natura, e questa ravvicinasse alcun poco a quella massima semplicità ed unità, la quale com' è la forma del bello, così è pure non lieve indizio di verità? Premetto che non è punto impossibile, anzi se alquanto sottilmente si osservi, si trova simile al vero, la materia imponderabile o eterea diffusa per ogni dove, di cui sembrano due diverse modificazioni la luce e i raggi calorifici, non differire dalla materia imponderabile o elettrica, essa pure da per tutto diffusa almeno nella terra e nell' atmosfera. Se ciò non è, convien dire che l'etere, il quale vibrando produce sì cospicui effetti, niuno sensibile ne produca quando ne' corpi soprabbonda o scarseggia, nè allorchè corre per essi, ovvero che mai non sia ne' corpi nè in eccesso nè in difetto, nè mai corra per essi. Come l' aria vibra se passa da ampio luogo in angusto, così l' elettrico allorquando entra in un conduttore troppo angusto o non assai deferente. Il calorico che è ne' corpi e ne costituisce la temperatura, non è al tutto una cosa medesima col calorico radiante, pur nondimeno dacchè quello genera il calorico radiante e da questo è prodotto, debbe aver con esso grande analogia. Il moto non genera se non moto; onde pare che il calorico de' corpi sia principalmente un'agitazione delle particelle o la somma delle vibrazioni moleculari; ma l' azione delle molecule pesanti non esclude il movimento vibratorio dell' etere a quelle intermisto, il qual moto anzi di ragione dall' altro conseguita. Ora questi tremori eterei nell' interno de' corpi non è punto necessario che sieno rettilinei, e molto

---

(*a*) *Saggio sui fenomeni d' induzione magnetelettrica.* Giorn. Arcad. T. LXIX.

meno che sieno tali in tutti i corpi ; possono (come con buone ragioni si crede che sieno assai spesso le vibrazioni luminose) essere circolari o elittici, o in generale descrivere, almeno in alcune sostanze, delle curve chiuse. Queste curve non potrebbero essere i circuiti moleculari che ora si attribuiscono ai corpi capaci di magnetismo, e che molto rassomigliano a' piccoli vortici immaginati nelle calamite da qualche cartesiano? Questi tremori dell' etere racchiuso ne' corpi pare che seguano tutte le direzioni, e così quelli delle particelle pesanti d' essi corpi. La proprietà conosciuta delle correnti elettriche di porre parallele a se delle simili correnti basta a spiegare come i conduttori voltiani o le calamite dieno una stessa direzione a questi piccoli circuiti e in certo modo li *polarizzino*, a un dipresso come tanti corpi polarizzano i raggi luminosi o calorifici che trasmettono o riflettono. Sarebbe questa in certo modo una *polarizzazione statica* delle vibrazioni calorifiche esistenti nel ferro, analoga alla *polarizzazione dinamica* de' raggi calorifici. È possibile che quella polarizzazione talvolta produca questa? voglio dire che le vibrazioni calorifiche della calamita generino raggi calorifici almeno in parte polarizzati? Sarebbe assurdo tentare su ciò qualche esperimento? esempi grazia sperimentare il raggiamento d' una calamita sopra una pila termo-elettrica assai raffreddata? ovvero il raggiamento d' una calamita temporaria eccitata dalle correnti voltiane e riscaldata nell' olio caldo o altrimente?

Comunque siasi, possono talvolta questi circuiti disporsi, parte in una direzione, parte in altra ortogonale alla prima, e allora la loro polarizzazione sarà anche più analoga a quella de' raggi. L'egregio Fisico sig. Prof. Belli richiesto da me del suo parere rispetto alle mie osservazioni sulla polarità dell'ottone e del bronzo, tentò di dare i poli secondo la minor dimensione ossia secondo la spessezza, e secondo la larghezza a delle lastrine d' acciaio. Applicava a' poli di una calamita a ferro di cavallo due pezzetti di ferro dolce internamente terminati in acuti spigoli, e tra questi stringeva la lastrina secondo la spes-

sezza o secondo la larghezza e la faceva strisciare più volte fra essi spigoli. Non gli venne fatto di calamitarli nel primo modo come neppure a me, ma riuscì a far prendere ad una lastrina i poli diffusi ne' due spigoli laterali, ciò che poi anche a me riuscì agevole. Ebbe la bontà di inviarmi una lastrina così calamitata, la quale, come osservai, conservò almeno per alcuni mesi, questa polarità. Torno adesso dopo quattro anni ad esplorarla, e trovo ch' essa ha acquistato, forse per contatto di qualche ferro calamitato, i poli alla maniera ordinaria, ma insieme ha ritenuto la straordinaria polarità comunicatagli nel modo indicato, ond' è che le correntine moleculari possono dirsi polarizzate in due direzioni ortogonali. Così un ago romboidale d' ottone (contenente, come voglio supporre, qualche molecula di ferro), che aveva i poli secondo la spessezza, fu da me fatto tagliare e ridurre alla lunghezza di 13^{mm}, con alcune strisciate di una calamita acquistò i poli secondo la lunghezza, ma mostrò per altro ancora vestigi della prima polarità.

Sicuramente non è agevole a determinare perchè in certi corpi questi circuiti moleculari sieno così restii a lasciarsi polarizzare; altri per contrario sieno a ciò assai facili, ma cessata a pena la forza induttrice perdano la polarità; ed altri la conservino benchè cessata la cagione. Per determinar ciò ed innumerabili altre cose, sarìa duopo per avventura penetrare collo sguardo fra gli atomi de' corpi e conoscerli assai meglio che non ci è concesso. Possiamo dire per altro che, ogni circuito moleculare avendo una direzione, v' è pure una cagione per cui ha quella piuttosto che altra: che essa cagione ora validamente a tal mutazione resista, ora ceda ma solo a tempo ed ora stabilmente, non pare più mirabile che il vedere la coesione resistere fortemente ne' corpi duri alle forze che tendono a cangiare la collocazion rispettiva delle molecule, cedere agevolmente ma solo a tempo negli elastici, e stabilmente ne' molli.

Se lo stato magnetico non si fa consistere in correnti elettriche giranti attorno alle molecole metalliche, ma nel girar di esse molecule magnetiche come ad altri è piaciuto (*a*), non solo niun nocumento ne viene alla nostra congettura, ma forse unità più perfetta si supporrà tra ciò che costituisce il calorico de' corpi ed il magnetismo.

Non so se sia qui opportuno il rammentare che certa relazione sembra esistere tra il calor della terra e il magnetismo terrestre. Hansteen raccolse de' fatti, da' quali consegue che la temperatura è molto minore in vicinanza de' poli magnetici della terra, che in altre contrade poste alle medesime latitudini (*b*).

Non credo che vorrà giudicarsi contrario a questa supposizione il fatto non ignoto ai vecchi fisici (*c*) che l'alta temperatura diminuisce, e arrivata a certo segno distrugge la virtù delle calamite, fatto diligentemente studiato a' nostri giorni da' parecchi scienziati stranieri e in Italia dal sig. Matteucci. Non si propone di considerare il magnetismo come dipendente dalla temperatura e proporzionale ad essa, ma come dipendente dalla più o men perfetta polarizzazione; nè a ciò si oppone che il dilatarsi de' corpi e il diminuirsi della coesione sia contrario a questa polarizzazione e alla forza coercitiva. Se il calore non sia eccessivo, a questa soltanto è contrario. Faraday vide che il ferro calamitato alla temperatura dell'ebollizione dell'olio di mandorla, perdeva quasi a un tratto i poli, ma operava sulla calamita come il ferro dolce, e bisognava alzarla al calor *arancio* per privarla eziandio di questo potere. Il P. Kircher (*d*) scrisse che il ferro infocato è tirato dalla calamita non meno che il freddo, ma avendo posteriormente Newton scritto il contrario, la cosa ri-

---

(*a*) *Sopra varj punti di magneto-elettricismo de' signori L. Nobili e V. Antinori:* V. Nobili. *Mem.* T. I. p. 273.

(*b*) *Bibb. Univ.* 1833 Decemb. p. 422, 23.

(*c*) Kircheri *Magnes.* p. 70.

(*d*) L. c. p. 97.

maneva in dubbio. Tiberio Cavallo osservò che l' apparente contraddizione nasceva dall' essersi fatte le osservazioni a temperature diverse, e che il ferro rosso opera sulla calamita meglio del ferro freddo e meno s'è rosso-banco. Altri Fisici si sono occupati in questa indagine, in ispecie Barlow, dalle cui ricerche risulta che il calore accresce la forza del ferro e dell' acciajo non calamitato sulla calamita, finchè quello non giunga al punto in cui troppo diminuisce la coesione delle molecole, e si rende impossibile la polarità. In conclusione non può dedursi da queste indagini che l' elevazione della temperatura sia assolutamente contraria al magnetismo. Se così fosse, non crescerebbe colla temperatura fino a un certo termine la forza magnetica del ferro sottoposto all'azione o della terra o della calamita.

Sembra più tosto che l' elevata temperatura *per se* accresca la virtù magnetica. Ma i metalli non si riscaldano senza rarefarsi e avvicinarsi più o meno allo stato di liquidità, stato affatto contrario al magnetismo: allorchè il metallo a questo avvicinasi (prima o poi secondo la qualità del ferro o dell' acciajo) perde la forza coercitiva e, viepplù ad esso avvicinato, ogni azione magnetica, la qualè sembra esigere assai perfetta solidità. Possono farsi *calamite senza coesione*, cioè di limatura o di polveri, ma non già di atomi così disgiunti un dall' altro che abbiano perduto lo stato solido o si avvicinino a perderlo. Comunque sia, se l' esperienze accennate non confermano la nostra ipotesi, nè pure in esse veggo ragione da dover rifiutarla.

Ma questa alla fine non è che una ipotesi: senza dubbio. Ma che è se non ipotesi ciò che si dice finora per dichiarare la natura del magnetismo? Solo può cercarsi quale ipotesi sia più semplice, più verisimile, meno ipotetica, ossia esiga meno e meno arbitrarie supposizioni. Sarà tale, per avventura, quella, che dividendo ciò che è congiunto in natura, considera come due distinti principii quello del magnetismo e quello delle correnti elettriche, e crea un nuovo fluido magnetico o

anche due (*a*), de' quali niun altro fenomeno fa sospettar l'esistenza? Sarà tale quella che, a spiegare effetti identici a quelli dell' elettrico in moto, ricorre all'elettrico in quiete, ma all' elettrico in certi particolari modi latente? sarà tale quella che ammettendo i circuiti elettrici moleculari non sa assegnarne plausibil cagione? o quella che li fa generare contro l' analogìa dalle calamite, o dalle correnti elettriche di giusta estensione?

Saria cosa folle lo sperare che la mia dovesse essere generalmente adottata: la pongo innanzi al tribunale degli Scienziati, acciocchè la mostrino falsa se ella è, o, se diritta, la confermino e l' approvino. Sarò assai pago, se qualche valente Fisico, considerandola come non altro che ipotesi, non isdegnerà di porvi pensiero, e a riguardo di essa arricchirà la scienza di alcun nuovo fatto, tentando qualche sperienza che o quella confermi o la distrugga.

(*a*) « I pretesi fluidi magnetici mai non ebbero partigiani così numerosi e zelanti, come i fluidi elettrici.... Procedendo le scoperte, si trovò tra le azioni elettriche e magnetiche connessione sì stretta, che nacque spontanea la persuasione che ambedue fossero effetti diversi d' una sola cagione. Dopo queste scoperte niun filosofo vorrà sognare che i fluidi elettrici e magnetici sieno due distinti agenti materiali. » Whewell. *Istoria delle scienze d' induzione*. L. XII. C. II.

SOPRA

I DUE NUOVI GENERI DI PIANTE

SYNCARPIA E DONZELLIA

MEMORIA

DEL PROFESSORE MICHELE TENORE

SOCIO ATTUALE

Ricevuta adì 16 Aprile 1840.

Comunque per la sempre crescente copia delle botaniche pubblicazioni, la più scrupulosa riserbatezza uopo sia praticare prima di dar fuori le proprie lucubrazioni, tuttavia parmi di averne le più severe norme osservate nel caso attuale. Perocchè le due piante che mi propongo illustrare colla presente scrittura, essendo da parecchi anni coltivate nel nostro Orto botanico, e trovandosi sottoposte alle assidue osservazioni che han potuto portarvi quanti sono cultori di questa scienza nazionali e stranieri che lo frequentano, per tutti han formato mai sempre il più particolare oggetto di studio, senza che dalle loro indagini altro mai abbia potuto raccogliere che la precisa confessione di non poterne alcun che pronunziare di definito. Mi sono perciò determinato ad illustrarne e divulgarne la notizia, affinchè portate queste due piante alla conoscenza dell' universale si possa intorno alla loro classificazione pronunziare più certo ed adequato giudizio.

§. I.°

DELLA SINCARPIA.

Sono ormai circa due lustri dacchè insieme ad altre piante ricevute dal sig. Burdin di Torino fu introdotto nel nostro Orto botanico un alberetto di forme non dispregevoli, cui tro-

vavasi appiccato il nome di *Pittosporum hirtum*. Annunziavasi egli qual pianta sempre verde, e dalla figura delle sue foglie, nonchè dalla irsuzie dei suoi picciuoli sembrava potersi ragionevolmente riferire a tal determinata specie. Frattanto i primi anni trascorrevano senza che ne mettesse fiori, e così ne rimaneva collo stesso ricevuto nome nelle nostre serie coltivata. Prosperandovi perfettamente, comunque ritenuta nel vase per poterla guarentire dai rigori invernali, non mancava di crescere e svilupparsi a talchè nella state del 1836 ne comparivano le vestigia della prossima fioritura. Impazienti ne attendevamo lo svolgimento, allorquando invece dei fiori del *Pittosporo*, altra tale singolar foggia di fiori ci si offrirono da colmarne insieme di stupore e d' imbarazzo. Un glomero di fiori era quello che ci si presentava raccolto su di un solo peduncolo, ma questo glomero non era nè un fascetto formato di fiori semplici, nè un fiore veramente aggregato, o composto; ma una tal foggia di riunione di fiori, di cui una lontana somiglianza trovar potrebbesi ne' fiori di alcune bromeliacee. Per farsene un' idea basterà prendere sette fiori di un Metrosidero qualunque, stringerli ed innestarli insieme pei loro ovarii, cosicchè se ne facci un globo restandovi liberi ed isolati in ciascun fiore il calice e la corolla, gli stami e gli stili. Quel globo rappresenterà la riunione prima de' fiori e poi dei frutti della nostra pianta. Frattanto nello scorgere quella non solo somiglianza ma identità di ciascuno elemento di quel glomero di fiori coll' anzidetto fiore del Metrosidero, un fondato dubbio potrebbe elevarsi che in quella riunione altro novello esempio di naturale congiungimento potesse riconoscersi, di cui tante moltiplici forme hanno studiate i moderni, ma per abbandonarne il pensiero, gioverà riflettere che comunque ognuno di quei fiori convenga nella struttura con quelli del Metrosidero, il glomero che dalla loro riunione risulta se ne allontana essenzialmente; da poichè invece di trovarsi sessili affatto ed incastrati nel legno del ramo col quale si confondono e vi restano consolidati, il glomero dei fiori anzidetti tutto

si raccoglie in cima di un distinto ben lungo peduncolo, e così ne rimangono i frutti che vieppiù tra loro confondonsi, e di sostanza affatto legnosa composti nel loro insieme si appalesano. Così considerati ed ingrossati gli ovarii, aperti ne rimangono gli orifici corrispondenti alla parte superiore del fiore, componendo una specie di stella a 7 raggi tronchi e dippiù uno rilevato nel centro. In questo stato, se ne verrà segato l' insieme nel suo senso orizzontale, ad ogni raggio della stella si troverà corrispondere la cavità seminifera triloculare polisperma. Una fioritura ed una fruttificazione cotanto straordinaria ben doveva ispirare la più severa circospezione prima di pronunziar giudizio intorno al genere della nostra pianta, che per ciò ne attendevamo come di ragione il vederle ripetersi inalterate negli anni successivi. La qual cosa non essendo mancata di avvenire, colla più scrupolosa esattezza e regolarità, ci siamo perciò decisi a riconoscerla qual tipo di un genere delle *mirtacee*, cui per tutte le caratteristiche della fioritura istessa non meno che per l'abito e per la qualità aromatica e perennante delle sue foglie puossi fondatamente riferire.

DESCRIZIONE.

L' alberetto di circa 16 anni coltivato nel vase ha 12 palmi di altezza, il tronco di 2 pollici di diametro, e sta diviso in numerosi rami opposti cilindrici quasi forcellati, patenti o divergenti, colla scorza liscia cenerognola, ed i ramuscelli tinti di rosso. Le foglie hanno grande somiglianza con quelle del Lauro. Esse sono perennanti opposte coriacee bislungo-lanciolate, lunghe da 3 in 5 pollici e larghe 10 a 18 linee, intatte, ristrette in ambi gli estremi alquanto ondeggianti, alternamente o leggermente venose, di color verde mirto, liscie, lucide di sopra, glauche ed appena feltrate di sotto, dove dippiù, guardate colla lente, miransi provviste di glandolette trasparenti oleifere, di cui avvene una nel centro di ogni areola del tessuto reticolare fibroso.

I picciuoli sono incurvati, e giallo-rossastri, lunghi da 6 a 12 linee, e stanno sparsi di peli patenti articolati.

Fiori. Riuniti in un sol corpo ne stanno sette ordinariamente, e formano un solo globo legnosetto del diametro di 6 linee. Ogni fiore si compone di un grosso ovario, nudo, inferiore, aperto superiormente, ed ivi munito di una cresta circolare divisa in 4 grossi denti che figurano da calice superiore. La corolla si compone di 4 piccioli petali, bianco-rosei simili a quello del *Lepto spermum*, inseriti nei seni del calice. Stami al numero di 20 incirca, inseriti nella faccia interna del lembo istesso del calice; filamenti lunghi 3 in 4 linee; antere minutissime biloculari. Un pistillo coll' ovario inferiore, le cui pareti formano un solo corpo con quelle del contiguo, e se ne distacca pel suo lembo che figura da calice. Uno stilo filiforme della lunghezza degli stami; stimma semplice. Pericarpio formato dagli ovarii raccolti a forma di stella a raggi tronchi, ed uno centrale in ogni ovario; chiuso superiormente da tre squame irsute che alternano con tre rime concentriche che corrispondono ai tre loculamenti interni, nei quali sta diviso l' ovario medesimo. Semi numerosi minutissimi di colore leonino.

Epoche della vegetazione, qualità ed usi.

Coltivato all' Orto botanico questo alberetto fiorisce nel Giugno, e perfeziona i frutti in Ottobre. Nulla di certo potrebbe dirsi intorno la di lui patria; ma volendone proporre qualche plausibile congettura, derivandola dalle analogie ed affinità di esso con i Metrosideri, con i Leptospermi ed altre mirtacee, ne potrebbe cadere il sospetto sulla nuova Olanda, ovvero sul Capo di Buona Speranza, ma più probabilmente sulla prima di queste due regioni. Abbonda questa pianta di principio aromatico, che può desumersi dall' odore grato, che ne spargono le parti di essa col soffregarle nonche dal sapore piccante delle medesime, dalla copia delle glandole oleifere,

di cui stanno fornite le foglie, e dai globetti di sostanza résinosa pellucida, colore di oro, che trasuda dai suoi frutti. Per questi principi non sarebbe fuor di proposito sperimentarne l'uso in concorso delle altre droghe vegetabili di simili qualità fornite, e che riuscir sogliono toniche nervine, diaforetiche, emmenagoghe, calmanti.

SYNCARPIAE LAURIFOLIAE DESCRIPTIO

Character essentialis genericus.

Syncarpia. Flores connati in globulum lignescentem. Singulus flos ermaphroditus perigynus, icosandrus monogynus. Calyx e limbo ovarii, quatridentatus, in fructu perennans. Corolla rosacea, petala quatuor ad limbi calycis faciem internam inserta. Pericarpium ex ovariis in globulum concretis, trilocularibus polyspermis.

CLASSIS ICOSANDRIA: ORDO MONOGYNIA.

Familia mirtacearum.

Nomen ex *συν cum*, et *καρπος fructus*: nempe ex fructuum coalitione desumptum.

Character naturalis.

Arbuscula (*in olla culta*) 10-12 pedalis. Truncus bipollicaris diametro. Rami oppositi brachiati quandoque subdichotomi teretes, patentes vel divergentes cinerei; juniores luteo-rufescentes; folia perennantia opposita coriacea, oblongo-lanceolata (3-5 poll. long. 10-18 lin. lat.) integerrima utrinque attenuata subrepanda, alterne-parallele venosa, supra laete virentia, laevia, nitida, subtus glaucescentia subtomentosa, glandulisque oleiferis (lente vitrea inspecta) punctata.

Petioli teretes incurvi, pilis patentibus articulatis hirti, luteo-rufescentes (6-12 lin. long.)

Flores concreti in globulum lignescentem plerumque septem. *Singulus flos-Calyx* superus ovario adhaerens urceolatus globosus, limbo quadridentato in fructu perennans. *Corolla* rosacea perigyna tetrapetala, petalis exiguis orbiculatis albo-roseis, ad calycis limbi sinus insertis. *Stamina* numerosa (circiter 20) ad limbi calycis faciem internam inserta. *Pistillum* unicum cum tubo calycis concretum, triloculare, stylus filiformis longitudine staminum; stigma simplex *Pericarpium* ex ovariis in globulum concretum (7-8 lin. diamet.) singulum ovarium triloculare apice lineis tribus radiatim dehiscens. *Semina* numerosa minima linearia luteo-rufa.

Locus natalis, tempus florendi, et vigendi, qualitas, usus.

E Nova Hollandia vel e Capite Bonae Spei probabiliter allata, in hortis colitur sub nomine *Pittospori hirti.*

Floret Junio, fructus perficit Octobri. Arbor qualitate gaudet aromatica. Usus ad hortos exornandos. Usus medicus vero cum affinibus stimulantibus, nervinis tonicisque aemulatur.

Tabulae explicatio.

A. Ramulus syncarpiae laurifoliae floribus fructibusque onustus.

B. Flos unicus magnitudine acutus.

§. II.

DELLA DONZELLIA

Partita da Buenos Ayres nel Giugno 1832, sul cadere dello stesso anno giungeva in Napoli una ricca collezione di semi, che il celebre Bonpland, col favore dell' illustre nostro

concittadino colà stabilito Cav. D. Pietro De Angelis, inviava al nostro Real Orto Botanico. Delle principali cose onde quell' invio componevasi fu per noi reso conto negli annali civili del Regno, e siccome parecchie di quelle semenze mancavano di determinata classificazione, così col coltivarne le piante che ne germogliavano, potevamo a mano a mano studiarle e riferirle alle loro rispettive famiglie. Per tal modo nelle progressive pubblicazioni dell'Orto suddetto sono stati descritti il *Melilotus Bonplandii*, il *Chenopodium bonariense*, il *Thymus bonariensis*, la *Dioscorea bonariensis*; piante erbacee tutte che col loro più rapido sviluppo han potuto agevolmente definirsi. Molte ne rimanevano indefinite delle legnose, tra le quali figurano un *Amiridea*, testè annunziata nel catalogo del 1839 col nome di *Amyris terebinthifolia*, cui probabilmente riferir debbesi lo *Schinus terebinthifolius* del Raddi, e l'alberetto di cui ci proponiamo tener breve ragionamento.

Dall' aspetto dell' intera pianta e dalla sua qualità spinosa, nonche dal fogliame lucido e permanente, questo americano cespuglio ben si appalesa per una ramnea, o per una terebintacea : il quale giudizio confermato ne viene dallo studio delle parti del fiore, e del frutto. Tali caratteristiche ne offriva egli la prima volta che nel 1836 ne fioriva e ne fruttificava; cosicchè nel rifermarne la sessuale classificazione alla speciale qualità del suo frutto deferendo, più alle terebintacee che alle ramnee ritenevamo potersi riferire; quindi nei loro diversi periodi ritrarre ne facevamo le parti curiosissime dei fiori e dei frutti, i primi cioè che colla pianta verdeggiante ne offriva a pien' aria per tutta la state, e gli altri che colla pianta quasi affatto spogliata dalle sue foglie ne maturava nel susseguente inverno nelle stufe.

DESCRIZIONE.

Un sol fusto legnoso che nelle piante coltivate da 8 anni dentro vasi ha acquistato il diametro di un pollice e l'altezza

di 8 palmi: molti rami ne partono per tutti i versi, e sono tortuosi e rigidi colla scorza liscia e bruna, che dividonsi e suddividonsi confusamente, crescendo in denso cespuglio. Da per tutto sparsi veggonsi i rami suddetti di spine dritte rigide puntute estrascellari.

Le foglie stanno in cima dei rami giovani, e comunque dir non si possano decidue, pure nell'inverno la maggior parte ne cade, ed i rami fruttiferi ne restano affatto spogliati. Esse sono alterne coriacee, glabre e lucide in ambe le faccie, ovate a base obliqua, talora con piccoli e rimoti denti glandulosi nel contorno. Sono lunghe 12-18 linee, e larghe 10 a 12, han picciuoli corti due linee, e rossi. Le spine nascono al lato esterno delle ascelle delle foglie, e sono rossastre lunghe circa un pollice sottili ed aguzze. Dalle stesse ascelle delle foglie spuntano le piccole gemme che si aprono progressivamente in diversi tempi. I fiori sono minutissimi ed appena discernibili, vengono in cima dei ramuscelli annuali, e sono ermafroditi, ovvero unisessuali. Hanno un calice inferiore composto di 6 squame semiorbiculari di sostanza fogliacea verdastra semipellucida, cinque o sei stami inseriti su di un disco carnoso nei fiori maschi, ed un pistillo con un ovario ovato nei femminei e negli ermafroditi. Il pistillo è di color verde privo di stilo, e sta terminato da uno stimma carnoso glanduloso di color giallo, intaccato in molti lati bifidi. Il frutto è un pomo globoso della grossezza di una ciriegia, di color rosso di sangue; sta coronato dagli stimmi persistenti a forma di stella di molti raggi. I loculamenti variano da 6 a 8, ed in ognuno stanno allogati due o tre ossicini colla semenza rossa, e la mandorla ovata con pelle giallastra ed embrione a due cotiledoni senza perisperma.

Epoche della vegetazione epatica.

Dalla indicazione trasmessamene dal sig. Bonpland raccogliamo doversi la Donzellia ritenere nativa di Buenos Ayres;

niente altro avendone aggiunto il lodato viaggiatore intorno alle precise condizioni di ciò che i botanici dicono l' *habitat* di una pianta. Irregolare e variabile è stata nel nostro giardino la fioritura della Donzellia. La prima volta vi fiorì nel Febbrajo, mentre ritenevasi nella stufa; successivamente ha fiorito nella State, stando all' aria libera. I frutti mettono uno intero anno a maturare. La pianta dimostra dover formare un piccolo albero.

Ragione del nome.

Tra i benemeriti cultori della botanica, la storia patria vanta un Tommaso Donzelli, figlio di Giuseppe, di cui abbiamo un' applaudita opera farmaceutica. Fu il Tommaso medico distinto e specialmente dedito allo studio delle piante napolitane, e diversi viaggi avea a tal uopo fatti nel regno, e segnatamente al Pollino, ed al Matese. Venuto in fama di perito botanico gli amministratori dell' ospedale dell'Annunziata nel 1682 gli affidarono la direzione di un orto di semplici, che piantar fecero nella collina della Montagnuola, e che il Donzelli arricchì non meno delle piante nostrali raccolte nei suoi viaggi, che delle straniere che gli provenivano dalle sue corrispondenze. (*)

Ad onorare la memoria di tale un nome doppiamente illustre ne ho fregiato il mio nuovo genere.

DONZELLIAE SPINOSAE DESCRIPTIO

Character essentialis genericus.

DONZELLIA. Polygama. *Flos hermaphroditus* terminalis exiguus. Cal. inferus ex squamis sex semiorbicularibus; stamina

---

(*) Vedi Bulifon letture memorabili tom. 3. p. 196 ed Annali Civili del Regno delle Due Sicilie: fascicolo 18. (1830) tom. IX, pag. 146.

quinque vel sex, pistillum unicum: stigma glanduloso-carnosum sexlobatum, lobis bifidis. Pomum globosum depressum stigmatibus coronatum sexloculare; loculis 2-3 spermis; semina rugoso-nuculenacea. *Flos foemineus.* Omnia ut in hermaphrodito demptis staminibus.

Classis Polygamia-Ordo Androgyna.

Familia. Inter therebintaceas et rhamneas ambigit.

Nomen. Dixi in honorem Thomae Donzelli medici et botanici neapolitani clarissimi, qui simplicium horti Divae Annuntiatae Domus, anno 1682, praefectus renuntiatus est.

Character naturalis.

Donzellia spinosa. Arbuscula in olla culta (a 1833 ad 1840) 6 pedalis. Truncus pollicaris diametri. Rami multiplices sparsi tortuosi, fusco-rufi, spinosi. Folia semper viventia subcoriacea alterna ovata basi sub obliqua, lucida glabro obiter remote dentata, dentibus glandulosis; (12-18 lin. long. 10-12 lata). Petioli bilineares rubri. Spinae extraxillares rufae graciles cuspidatae, pollicaris longitudinis. Gemmae anomalae exiguae. Flores minutissimi in extremitate ramulorum juniorum. Flos. *hermaphroditus* —Viridis; calyx inferior ex squamis sex semiorbicularibus viridi-lutescentibus, ovarium amplexantibus: *stamina*; 5 vel 6 filamenta alba, calice duplo longiora; anthèrae globosae albidae. *Pistillum* unicum; ovarium ovatum viride; stylus nullus; stigma patelliforme lutescens, glanduloso-carnosum sexlobatum, lobis bifidis, crispatis. *Pomum* globosum depressum rubro-purpureum, stigmatibus coronatum, sex ad octoloculare, loculis 2-3 spermis. Semina rugoso-nuculenacea; dicotyledonea; perisperma nullum. *Flos foemineus.* — Omnia ut in hermaphrodito, demptis staminibus. Floret a Februario ad totam aestatem, fructus perficit hieme proximi anni; Arbor.

Habitat in Bonaria.

Tabulae explicatio.

A Ramulus *Donzelliae spinosae*, foliis floreque onustus
b Flos hermaphroditus, dempto pistillo, et magnitudine auctus
c Flos foemineus magnitudine auctus
d Ramulus fructiferus
e Fructus transverse dissectus
f Corona stigmatum persistentium magnitudine aucta, et seorsum exhibita.
g Coronae radius unicus denuo auctus
h Nuculenium magnitudine auctum
i Semen, idem
l Semen tegumento destitutum, idem
k Tegumenti dimidia pars magnitudine aucta
m Embrio, cotyledones et plantula ; idem.

Tav. I

Syncarpia Laurifolia

Mem

Tav. II

spinosa B

Tav. II
m
k
i
i
h
b
c
e
e
f
g
A
D
Donzellia Spinosa
Donzellia Spinosa B

SU LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO DI UNA CORDA ATTORTA E DI UNA VERGA ELASTICA SOTTILE LEGGIERMENTE PIEGATA

MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE

DOTTOR GASPARE MAINARDI

Ricevuta adì 9 Maggio 1840.

SU LA BILANCIA DI TORSIONE.

Le importanti scoperte che vennero fatte mediante la bilancia di torsione da Cavendisk, da Coulomb, e più recentemente dal celebre sig. Gauss sembrano richiamare una teoria geometrica dell' importante strumento. I Fisici ammettono, che il momento della forza torcente sia proporzionato all' angolo di torsione, ed il cel. geometra di Brunswick dichiarò (*) essere verosimile che il coefficiente della ragione consti di due parti, una delle quali proporzionale al peso che tende la fune, l'altra proporzionale e al numero dei fili semplici componenti la corda composta, ed alla resistenza di cui ciascuno di quei fili è capace: ma per quanto io sappia nessuna teoria appoggia queste leggi, e dimostra quando e con quali limitazioni debbano essere adottate, onde mi parve utile consacrare queste poche pagine all' esame dell' importante argomento.

Considero una corda come un corpo costituito nella seguente maniera. Immagino un cilindro retto, di cui rappresento

(*) Sulla intensità del Magnetismo terrestre. Memoria del Sig. Gauss.

la lunghezza colla lettera A, ed il raggio della base con r: Suppongo divisa la circonferenza $2\pi r$ in un numero m di parti eguali, e descritti i circoletti che hanno i centri nei punti di divisione ed i raggi eguali alle metà delle corde sottese a ciascuna parte $\frac{2\pi r}{m}$, immagino tutte le spire le quali hanno origine nei centri di quei circoletti, ed incontrano i lati del cilindro sotto un angolo che indico con b. Fingiamo che ogni piccol circolo scorra col centro lungo la spira che lo incontra, conservando il proprio piano parallello a se stesso. Quei circoli genereranno dei piccoli cilindretti doppiamente inflessi, che noi considereremo come funi semplici costituenti la corda composta.

Un' estremità della corda venga trattenuta immobile; dall' altra estremità penda un peso che indico con P, e mediante un braccio orizzontale sporgente dall'estremità medesima si finga attorta la corda con una potenza, della quale il momento rispetto all' asse del cilindro sia indicato con F.

In virtù di queste azioni la corda assuma la forma di un tronco di cono retto: la sezione superiore sia la primitiva inalterata: la inferiore sia un cerchio di raggio $r-\rho$: l'altezza del tronco si indichi con $A+a$, essendo ρ ed a quantità estremamente piccole. Gli assi delle corde semplici siano tutt' ora configurati a foggia di spirali. La linea GM (*fig.* 1) rappresenti una spira nello stato primitivo della corda, gm la spirale conica in cui quella linea si trasforma. Siano GFPD, $fgnd$ le basi libere della corda; E, e i loro centri; $EF=r$, $ef=r-\rho$ due raggi paralleli, e siano l'arco circolare $GP=r\varphi$, l' ordinata del cilindro $MP=r\varphi \text{tang}.b$, l'arco $GM=\frac{r\varphi}{\cos.b}$, e l' angolo di torsione, quale è compreso fra i due raggi EG, eg si rappresenti con θ.

Indicato con V il vertice del cono, che figura la fune nello stato attuale, condotto l' apotema Vnm, l' ordinata mp, poi la retta enp, sarà

$$\frac{Ve}{A+a} = \frac{r-\rho}{\rho} \text{ ossia } Ve = \frac{rA}{\rho} + \frac{(s-\rho)a-A\rho}{\rho}$$

e poichè ρ rappresenta una quantità estremamente piccola, il primo termine di quella espressione supera talmente i seguenti che potremo supporre $Ve = \frac{rA}{\rho}$ ed anche con eguale approssimazione $Ve = \frac{rA}{\rho}$. Chiamato μ l'angolo al vertice del cono avremo $\text{tang.}\mu = \frac{fe}{ev} = \frac{(r-\rho)\rho}{rA}$, per cui trascurato ρ^2 sarà $\text{tang.}\mu = \frac{\rho}{A} = \text{sen.}\mu$, e $\cos.\mu = 1$. Se fingiamo la superficie conica spiegata in un piano la spira gm si distende secondo una retta, la figura $Vnmg$ si trasforma in un triangolo rettilineo, l'arco gn che rappresento con $(r-\rho)\psi$ s'incurva sulla circonferenza che ha il centro in V e per raggio Vg; onde indicato con λ l'angolo spianato gVm sarà $\lambda Vg = (r-\rho)\psi$, cioè prossimamente $\lambda = \frac{(r-\rho)\psi}{Vg} = \frac{\rho\psi}{A}$. Chiamato b l'angolo piano mgn, la risoluzione trigonometrica del triangolo rettilineo Vgm fornirà

$$\frac{Vm}{Vg} = \frac{Vf+mn}{Vf} = \frac{\cos.b}{\cos.(\lambda+b)}, \text{ ossia, } mn = Vf\frac{\cos.b-\cos.(\lambda+b)}{\cos.(\lambda+b)};$$

e siccome λ è un angolo assai piccolo, avremo prossimamente

$$mn = \frac{rA}{\rho} \cdot \frac{\lambda\text{sen.}b}{\cos.b-\lambda\text{sen.}b} = \frac{r\psi\text{tang.}b}{1-\frac{\rho\psi}{A}\text{tang.}b}$$

ed anche

$$mn = r\psi\text{tang.}b\left(1+\rho\frac{\psi\text{tang.}b}{A}\right)$$

quando della quantità piccolissima ρ si trascurino le potenze superiori alla prima.

Riferisco la posizione del punto m agli assi ortogonali efx, edy, Vez: chiamo $x, y, z = mp$ le coordinate di m; indico con S l'arco gm, con s l'arco primitivo GM, e con δ l'angolo GEF. Siccome l'angolo $fen = \psi + \text{ang.}feg = \psi + \delta - \theta$, che

per brevità indico con τ, entro i limiti stabiliti all' approssimazione avremo

$$mp=mn.\cos.\mu=mn,\quad np=mn.\text{sen}.\mu=\frac{\rho}{A}\,r\psi\text{tang}.b$$

$$ep=r-\rho+\rho\,\frac{r\psi\text{tang}.b}{A}$$

quindi

$$z=r\psi\text{tang}.b\left(1+\rho\,\frac{\psi\text{tang}.b}{A}\right)$$

$$x=\left(r-\rho+\rho\,\frac{r\psi\text{tang}.b}{A}\right)\cos.\tau,\quad y=\left(r-\rho+\rho\,\frac{r\psi\text{tang}.b}{A}\right)\text{sen}.\tau$$

ed indicate cogl' apici, secondo il metodo di Lagrange, le derivate delle funzioni x, y, z, S, s prese rispetto a ψ, avremo

$$z'=r\text{tang}.b\left(1+2\rho\,\frac{\psi\text{tang}.b}{A}\right),$$

$$x'=-(r-\rho)\text{sen}.\tau+\rho\,\frac{r\text{tang}.b}{A}(\cos.\tau-\psi\text{sen}.\tau)$$

$$y'=(r-\rho)\cos.\tau+\rho\,\frac{r\text{tang}.b}{A}(\text{sen}.\tau+\psi\cos.\tau);$$

$$x'^2+y'^2=r^2-2r\rho\left(1-\frac{r\text{tang}.b}{A}\,\psi\right)$$

$$S'^2=\frac{r^2}{\cos.^2b}-2r\rho\left(1-\frac{r\psi\text{tang}.b}{A}\,.\,\frac{1+\text{sen}.^2b}{\cos.^2b}\right)$$

d' onde si cavano

$$S'=\frac{r}{\cos.b}-\rho\left(1-\frac{r\psi\text{tang}.b}{A}\,.\,\frac{1+\text{sen}.^2b}{\cos.^2b}\right)\cos.b$$

$$\frac{1}{S'}=\frac{\cos.b}{r}+\frac{\rho}{r^2}\left(1-\frac{r\psi\text{tang}.b}{A}\,.\,\frac{1+\text{sen}.^2b}{\cos.^2b}\right)\cos.^3b$$

$$\cos.(zS)=\frac{z'}{S'}=\left[1+\frac{\rho}{r}\left(1+\frac{r\psi\,\text{tang}.b}{A}\right)\cos.^2 b\right]\text{sen}.b\,,$$

$$\text{sen}.(zS)=\frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{S'}\,.$$

Essendo $Y-y=\frac{y'}{x'}(X-x)$ la equazion della projezione sul piano xy di quella retta, la quale tocca in m la spirale conica, la perpendicolare condottavi dall'origine e delle coordinate sarà data dalla funzione

$$\pm\frac{yx'-xy'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\pm\left(r-\rho+\rho\,\frac{\psi r\,\text{tang}.b}{A}\right)\frac{x'\text{sen}.x-y'\cos.x}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

$$=\pm\left(r-\rho+\rho\,\frac{r\psi\,\text{tang}.b}{A}\right)^2\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\,.$$

Indichiamo con n il numero dei passi, che ogni spira abbraccia nel cilindro primitivo; la projezione di tutta la spira sulla base sarà eguale a $2\pi nr$; e siccome nel passaggio dal primo al secondo stato l'estremità superiore resta immobile, mentre l'inferiore si allontana dell'angolo θ dalla posizione primitiva, perciò la spirale conica si estenderà da $\psi=0$ a $\psi=2n\pi+\theta$, e la maggiore ordinata sarà

$$(1)\qquad r(2n\pi+\theta)\left[1+\rho\,\frac{(2n\pi+\theta)\text{tang}.b}{A}\right]\text{tang}.b=A+a.$$

Venendo ormai a considerare lo stato dinamico della corda supponiamo che un filo semplice lungo quanto l'unità di misura lineare sottoposto ad un peso p si allunghi di altrettanto: che entro i limiti delle torsioni ordinarie la reazione che esercita ogni elemento di una corda semplice sia proporzionale alla distensione che ha sofferto, e si eserciti secondo la direzione dell'elemento medesimo, cioè della retta tangente la spira. Essendo $S'.d\psi$ la lunghezza attuale dell'elemento $\frac{rd\psi}{\cos.b}=S'd\psi$, la resistenza da esso prodotta aurà per misura la

frazione $p\frac{S'd\psi - s'd\psi}{s'd\psi} = p\left(\frac{S'}{s'} - 1\right)$: la sua componente verticale sarà

$$(e) = p\left(\frac{S'}{s'} - 1\right)\cos.(Sz) = p\left(\frac{S'}{s'} - 1\right)\frac{z'}{S'} = p\left[\frac{z'}{s'} - \cos.(Sz)\right]$$

ed il momento di quella forza rispetto all' asse del cono sarà

$$(f) = p\left(\frac{S'}{s'} - 1\right)\frac{\text{sen.}(Sz)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\left(r - \rho + \rho\,\frac{r\psi\,\text{tang.}b}{A}\right)^2$$

$$= p\left(r - \rho + \rho\,\frac{r\psi\,\text{tang.}b}{A}\right)^2\left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{S'}\right)$$

e poichè $z' = r\,\text{tang.}b\left(1 + 2\rho\,\frac{\psi\,\text{tang.}b}{A}\right)$, ne segue

$$(f) = r\left(\frac{rz'}{\text{tang.}b} - 2r\rho\right)\left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{S'}\right) = \frac{r}{\text{tang.}b}\,(e) - 2pr\rho\left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{S'}\right)$$

e ciò entro i limiti dell' approssimazione stabilita.

Dobbiamo ora integrare le funzioni (e) ed (f) rispetto all' angolo ψ, estendere le somme fra i limiti $\psi=0$, $\psi=2n\pi+\theta$, ed i loro prodotti per il numero m eguagliarli rispettivamente alle potenze P ed F, con cui quelle resistenze devono equilibrarsi.

Ma per conseguire l' intento ci è d' uopo determinare quale relazione sussista fra gli angoli ψ e φ, e non avendo dati dai quali desumere questa notizia, sapendosi unicamente che l' angolo $\theta+\varphi-\psi$ formato dalle due rette EP, ep, è nullo allorquando $z=A+a$, è eguale a θ se $z=0$; si annulla sempre con θ qualunque sia z; e diminuisce al crescere della z: quindi per semplicità dell' ipotesi, e seguendo l' autorità dei Geometri (*), quell' angolo $\theta+\varphi-\psi$, che chiamo Δ, lo porremo $\Delta = \frac{\theta}{A+a}(A+a-z)$. Fingiamo per brevità

(*) Navier. Resumè des leçons ecc. 1826, pag. 71.

$r\,\mathrm{tang}.b=\alpha$, $\frac{r}{A}\,\mathrm{tang}.^2b=\gamma$, $2n\pi+\theta=\xi$ per cui $z=\alpha\psi+\rho\gamma\psi^2$,

$$s'=\frac{r}{\cos.b}(1+\Delta')=\frac{r}{\cos.b}\left(1-\frac{\theta z'}{A+a}\right)=\frac{r}{\cos.b}\left(1-\alpha\theta\frac{A-a}{A^2}-2\rho\frac{\theta\rho}{A}\psi\right)$$

trascurando i prodotti di a, ρ e le potenze superiori alla prima. Avremo ancora

$$\frac{1}{S'}=\frac{\cos.b}{r}\left(\frac{A+a}{A+a-\alpha\theta-2\rho\theta\psi}\right)=\frac{\cos.b}{r}\left[\frac{A}{A-\alpha\theta}+\theta\frac{2A\rho\gamma\psi-a\alpha}{(A-\alpha\theta)^2}\right]$$

$$\frac{z'}{S'}=\frac{\cos.b}{r}\left[\frac{A\alpha}{A-\alpha\theta}+\frac{2A^2\rho\gamma\psi-a\alpha^2\theta}{(A-\alpha\theta)^2}\right]$$

$$\int_0^\xi\frac{d\psi}{S'}=\xi\frac{\cos.b}{r}\left[\frac{A}{A-\alpha\theta}+\theta\frac{A\rho\gamma\xi-a\alpha}{(A-\alpha\theta)^2}\right]$$

$$\int_0^\xi\frac{z'}{S'}d\psi=\xi\frac{\cos.b}{r}\left[\frac{A\alpha}{A-\alpha\theta}+\frac{A^2\rho\gamma\xi-a\alpha^2\theta}{(A-\alpha\theta)^2}\right]$$

$$\int_0^\xi\cos.(Sz).d\psi=\xi\left[1+\frac{\rho}{r}\left(1+\frac{r\xi\,\mathrm{tang}.b}{2A}\right)\cos.^2b\right]\mathrm{sen}.b$$

$$\int_0^\xi\frac{1}{S'}d\psi=\xi\frac{\cos.b}{r}+\frac{\rho\xi}{r^2}\left(1-\frac{r\psi\,\mathrm{tang}.b}{A}\cdot\frac{1+\mathrm{sen}.^2b}{\cos.^2b}\right)\cos.^3b$$

e per conseguenza

$$\int_0^\xi(e).d\psi=p\xi\frac{\cos.b}{r}\left[\frac{A\alpha}{A-\alpha\theta}+\frac{A^2\rho\gamma\xi-a\alpha^2\theta}{(A-\alpha\theta)^2}\right]$$

$$-p\,\xi\,\mathrm{sen}.b\left[1+\frac{\rho}{r}\left(1+\frac{r\xi\,\mathrm{tang}.b}{2A}\right)\cos.^2b\right]$$

$$\int_0^\xi(f)d\psi=\frac{r}{\mathrm{tang}.b}\int_0^\xi(e)d\psi+2\rho p\xi\left(\cos.b-\frac{A\cos.b}{A-\alpha\theta}\right).$$

Siccome la equazione (1) sviluppata in serie rispetto alle quantità a, ρ piccolissime, fornisce

$$\alpha\xi = \text{A} + a - r\xi,\ \gamma r\xi^2 = \text{A} + 2a - 2\xi,$$

$$\cos.b = \frac{r\xi}{\sqrt{\text{A}^2+r^2\xi^2}}\left[1 - \frac{\text{A}(a-\rho\xi)}{\sqrt{\text{A}^2+r^2\xi^2}}\right];\ \text{sen}.b = \frac{1}{\sqrt{\text{A}^2+r^2\xi^2}}\left[\text{A} + \frac{r^2\xi(a-\rho\xi)}{\text{A}^2+r^2\xi^2}\right],$$

$$\frac{1}{\text{A}-\alpha\theta} = \frac{\xi}{\text{A}(\xi-\theta)}\left[1 + \theta\,\frac{a-\rho\xi}{\text{A}(\xi-\theta)}\right]$$

quindi saranno

$$\int_0^\xi (e)d\psi = \text{A}p\xi\left(\frac{\cos.b}{\xi-\theta} - \frac{1}{\sqrt{\text{A}^2+r^2\xi^2}}\right) + ap\xi\left[\frac{\cos.b}{\xi-\theta} - \frac{r^2\xi^2}{(\text{A}^2+r^2\xi^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

(2)

$$+ ap\xi\left[\frac{\xi(\text{A}-r\xi)\cos.b}{(\xi-\theta)^2} + \frac{(3\text{A}-2r\xi)r\xi^2}{2(\text{A}^2+r^2\xi^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{\text{P}}{m}$$

$$\int_0^\xi (f)\,d\psi = \frac{r^2}{\alpha}\int(e)d\psi + 2p\rho\xi^2\left[\frac{r}{\sqrt{\text{A}^2+r^2\xi^2}} - \frac{\cos.b}{\xi-\theta}\right],$$

ossia

$$(3)\qquad \frac{\text{P}r^2\xi}{\text{A}m} - ap\frac{r^2\xi^2}{\text{A}}\left(\frac{\cos.b}{\xi-\theta} - \frac{1}{\sqrt{\text{A}^2+r^2\xi^2}}\right) + \rho^2\frac{\rho\xi^2}{\text{A}}\left[\frac{(r\xi-\text{A})\cos.b}{\xi-\theta}\right.$$

$$\left. + \frac{r(2\text{A}-r\xi)}{\sqrt{\text{A}^2+r^2\xi^2}}\right] = \frac{\text{F}}{m}.$$

Queste equazioni (2) (3) nelle ipotesi ammesse, e fra i limiti dell' approssimazione cui ci siamo arrestati, contengono la soluzione del problema: sembra però che d' ordinario la variazione ρ sia estremamente piccola rispetto ad α, nel qual caso trascurando la prima a fronte di questa, ponendo per brevità $2n\pi = w$, ed osservando che $\cos.b = \frac{\xi-\theta}{\sqrt{\text{A}^2+r^2(\xi-\theta)^2}}$, $\xi = w+\theta$, dalle equazioni (2) (3) caveremo

$$(4)\qquad \frac{\text{P}}{m} = \text{A}p(w+\theta)\left[\frac{1}{\sqrt{\text{A}^2+r^2w^2}} - \frac{1}{\sqrt{\text{A}^2+r^2(w+\theta)^2}}\right]$$

$$+ap(w+\theta)\left[\frac{1}{\sqrt{\text{A}^2+r^2w^2}} - \frac{r^2(w+\theta)^2}{[\text{A}^2+r^2(w+\theta)^2]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$(5)\quad \frac{F}{m} = \frac{r^2 P}{Am}(w+\theta) - p\,\frac{ar^2}{A}(w+\theta)^2\left[\frac{1}{\sqrt{A^2+r^2w^2}} - \frac{1}{\sqrt{A^2+r^2(w+\theta)^2}}\right].$$

I fisici impiegano la bilancia di torsione, affine di conoscere l' energia dello sforzo F desumendolo dalla grandezza dell' angolo θ. (*) A questo intento potremo valerci delle formole (4) (5) eliminando da esse la quantità a difficile a misurarsi, e desumendo il valore di F in funzione delle altre grandezze, A, r, w, θ..., che si determinano facilmente. Ma quel valore di F involge l' angolo θ in molti termini e sotto forme diverse, e non corrisponde all' ipotesi comunemente ammessa. Se però supponiamo il θ piccolo così che sviluppate quelle espressioni in serie rispetto a θ, si possano trascurare le potenze superiori alla prima, da quelle formole desumeremo le seguenti

$$(6)\qquad P = \frac{mp}{(A^2+r^2w^2)^{\frac{3}{2}}}\left[Ar^2w^2 + a\left(A^2 + \theta\,\frac{A^4 - A^2r^2w^2 + r^4w^2}{A^2+r^2w^2}\right)\right]$$

$$F = \frac{r^2 P}{A}(w+\theta) - \frac{map\theta r^4 w^2}{A(A^2+r^2w^2)^{\frac{3}{2}}},$$

dalle quali eliminata la a, e trascurate le potenze di θ maggiori della prima, si desume

$$(7)\quad F = \frac{r^2 w}{A}P + \theta\,\frac{r^2}{A^3}\left[P\left(A^2 - r^2w^2\right) + mp\,\frac{Ar^4w^4}{(A^2+r^2w^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Esaminando ormai questa formola rileviamo, che non è la F proporzionale a θ, come, si suppone dai fisici, da che il primo termine di quella espressione non può essere trascurato a fronte del secondo moltiplicato per P. Vediamo per essa formola confermata la legge presentita dal celebre Sig. Gauss; cioè che il coefficiente dell' angolo di torsione θ consta di due

(*) Poisson. Traité de Mecanique. Tome 1, pag. 483. An. 1833.

parti delle quali una è porporzionale al peso P che tende la fune; l'altra proporzionale al numero m dei fili, ed al parametro p, che misura la tenacità de' fili semplici. Rileviamo per ultimo che uno sforzo minore di $\frac{r^2\omega}{A}$ P non varrebbe a torcere menomamente la fune.

SU L'EQUILIBRIO DI UNA VERGA ELASTICA.

Il problema che considero non sembra potersi altrimenti sottoporre a calcolo se non mediante i principj della Meccanica molecolare; dai quali principj appunto Galileo, Leibnitz, Eulero e Bernulli ne desumevano la risoluzione in alcuni casi particolari. La difficoltà che presenta la questione ha origine dal bisogno di rappresentare debitamente le resistenze che oppongono le molecole della verga rimosse dalla loro posizion naturale; la qual difficoltà non può superarsi coll' ingegnoso metodo esposto da Lagrange nella quarta lezione della parte prima della Meccanica analitica, come ha dimostrato il celebre sig. Poisson (*); nè considerando quelle resistenze siccome pressioni o trazioni sofferte dagli estremi degli elementi differenziali della estensione che si considera, come ha osservato il Sig. Cisa de Gresy. (**) Nè vale poi all'uopo rappresentare le resistenze con soli simboli, da che nei casi concreti non sapremmo utilizzare le formole analitiche se non riprendendo su altre tracce la risoluzion del problema.

Il saggio di calcolo che offro di presente è desunto dalle dottrine della meccanica molecolare; quindi implica delle supposizioni, le quali in varj casi non saranno ammissibili; ma le nostre formole particolarizzate concordano con quelle di Eulero e Bernulli; e potremo forse per esse rilevare, che alcune conseguenze ammesse devono essere ricevute con qualche limitazione.

(*) Poisson Mem. de l'Institut de France. T. 12. An. 1814.
(**) Memorie della Reale Accad. di Torino per l' anno 1818.

Suppongo che una verga omogenea e libera venga rimossa dalla sua posizion naturale da forze applicate a tutti o ad alcuni punti della medesima, e che questo fisico cambiamento non alteri in veruna parte la continuità della materia, per cui i punti i quali in origine erano contigui fra loro lo siano anche dippoi; sebbene ognuno possa essere trasportato a distanza finita dalla posizion primitiva. Considerando la verga nello stato iniziale, nell'interno di essa immagino una linea, qual sarebbe l'asse di figura nel caso di una verga cilindrica o prismatica. Sia C (*Fig.* 2) un punto di quella linea, Cz la tangente, Cx la direzione del raggio osculatore, Cy normale alle rette Cx, Cz: sia s la lunghezza dell'arco compreso fra il punto C, ed un altro punto arbitrario. ABCD rappresenti una sezione normale all'asse, M un punto di essa determinato dalla retta GM$=r$, e dall'angolo MC$y=\omega$. Sia Mm=Cc=S' parallella all'asse Cz; Cc' rappresenti un arco di cerchio posto nel piano xCy, col centro nella retta Cy, ed il raggio della lunghezza ρ: Sia Cc'—Cc=$\dot{\xi}$: fingo che l'arco Mm' appartenga ad un circolo parallello a Cc', compreso fra i piani normali all'arco Cc' negli estremi di esso: suppongo

$$\frac{\mathrm{M}m'-\mathrm{M}m}{\mathrm{C}c'-\mathrm{C}c}=\frac{\rho-\mathrm{CP}}{\rho}, \text{ per cui } \mathrm{M}m'=\dot{s}+\left(1-\frac{r\,\mathrm{sen.}\omega}{\rho}\right)\dot{\xi}$$

Si conduca l'ordinata $m'p'$, si formi l'angolo $p'\mathrm{C}p''=\theta$, quindi si tracci $m''p''$ eguale e parallella ad $m'p'$. Saranno

$$p'q'=\mathrm{MP}=r\cos.\omega,$$

$$m'p'=(\rho-r\,\mathrm{sen.}\omega)\,\mathrm{sen.}\frac{\mathrm{M}m'}{\rho-r\,\mathrm{sen.}\omega}=\dot{s}+\left(1-\frac{r}{\rho}\,\mathrm{sen.}\omega\right)\dot{\xi}$$

supponendo $\dot{s}$, $\dot{\xi}$ estremamente piccole, sviluppando la funzione trigonometrica sostituendo al seno l'arco che vi corrisponde, e trascurando i prodotti e le potenze delle quantità $\dot{s}$, $\dot{\xi}$. Avremo poi le coordinate $m''p''=m'p'$, $p''q''$, Cq'' del punto m'' per mezzo delle equazioni seguenti

$$Cq''=Cp'.\text{sen}.(ACp'+\theta)=Cq'+\theta.p'q'=r(\text{sen}.\omega+\theta\cos.\omega),$$

$$p''q''=Cp'.\cos.(ACp'+\theta)=r(\cos.\omega-\theta\,\text{sen}.\omega),$$

$$m''p''=m'p'=\dot{s}+\left(1-\frac{r}{\rho}\,\text{sen}.\omega\right)\dot{\xi}$$

dalle quali eliminando r ed ω si trae

$$Cq''-\theta.p''q''+\frac{\rho(1+\theta^2)}{\dot{\xi}}\,.\,m''q''=\frac{(\rho\dot{\xi}+\dot{s})(1+\theta^2)}{\dot{\xi}}$$

che appartiene ad una superficie piana.

Nel cambiamento fisico della verga l'asse venendo deformato, supporremo che il punto C sia trasferito nel luogo C', il quale rispetto a tre assi ortogonali assunti ad arbitrio, venga determinato dalle coordinate x, y, z. Supposto poi, che la sezione ABC, e con essa i punti m'' ec., vengano trasportati in A'B'C'D', per cui gli assi Cx, Cy, Cz coincidano con C'x', C'y', C'z' fingeremo che nella posizione forzata della verga un punto qualunque M della sezione ABC venga ad occupare quel luogo in cui si trasferisce m'': quasi che lo spostamento di M dai punti circostanti potesse attribuirsi ad uno stiramento Mm=$\dot{s}$ secondo la direzione della tangente; ad una rotazione intorno ad un asse parallello a Cy, il quale incontra l'asse Cx alla distanza ρ dall' origine C; e finalmente ad una seconda rotazione intorno all' asse Cz misurata dall' angolo θ.

L' azione molecolare, che eserciteranno i punti m'' ec. nel nuovo stato dipenderà dalla loro tendenza a riprendere la posizione primitiva M ec. sul piano A'B'C'; epperò supposta irrigidita la verga intercetta fra il piano dei punti m''ec. ed una estremità, le forze tutte applicate a questo solido dovranno comporsi in equilibrio colle suddette azioni molecolari.

Sia la retta Mm''=τ: supponiamo la tendenza di m'' verso M proporzionale a τ, ed indichiamola con Aτ: non già perchè tale si supponga la legge di natura, ma perchè quella qualunque siasi funzione dello spostamento τ che rappresenta la

forza, si potrà sviluppare in serie a potenze intere positive di τ, e trascureremo quei termini della serie che contengono potenze superiori alla prima. (*) Avremo quindi

$$\cos.(\tau.x)=\frac{Cq''-CP}{\tau}=\frac{\theta r\cos.\omega}{\tau},\ \cos.(\tau.y)=\frac{\theta.r\text{sen}.\omega}{\tau};$$

$$\cos.(\tau.z)=\frac{m''p''}{\tau}=\frac{\dot{s}}{\tau}+\left(1-\frac{r}{\rho}\text{sen}.\omega\right)\frac{\dot{\xi}}{\tau};$$

le componenti della forza A τ saranno
secondo il prolungamento dell' asse $Cx=A.\theta.r\cos.\omega$;
secondo quello di $Cy=A.\theta.r\text{sen}.\omega$, (1)
secondo il prolungamento di $Cz=A(\dot{s}+\dot{\xi})-A\frac{r}{\rho}\dot{\xi}\text{sen}.\omega$.

I momenti della medesima forza saranno rispetto all' asse Cz da x verso $y=A\theta r(\text{MP}.\cos.\omega+\text{CP}\text{sen}.\omega)=A\theta r^2$,

rispetto a Cy da x verso $z=A\left[(\dot{s}+\dot{\xi})-\dot{\xi}\frac{r}{\rho}\text{ sen}.\ \omega\right]r\text{sen}.\omega$, (2)

rispetto a Cx da z verso $y=A\left[(\dot{s}+\dot{\xi})-\dot{\xi}\frac{r}{\rho}\text{ sen}.\ \omega\right]r\cos.\omega$.

Rappresentiamo con a, b, c i coseni degli angoli che la retta Cx' forma cogli assi coordinati, cui si suppone riferita la verga nella seconda posizione: con a_1, b_1, c_1 i coseni che corrispondono a Cy': con a_2, b_2, c_2 quelli che riguardano Cz'. Immagino nella verga primitiva una nuova sezione normale al proprio asse, ne indico l'area con Δ; con t la lunghezza dell' asse compresa fra quella sezione ed un punto arbitrario, con l la sua lunghezza totale. Fingo l' area Δ piccola così che le forze attualmente applicate ai varj punti di essa possano fin-

(*) Seguendo i principj della Meccanica molecolare, dietro le tracce dei chiar. sig. Poisson e Cauchy, facilmente si tratta il problema con maggiore generalità, ma non ho voluto recare qui un calcolo, la cui prolissità non è compensata dall' importanza dei risultati.

gersi raccolte nell' asse, per cui supposte X, Y, Z le coordinate di quel punto considerato nella posizione forzata; P, Q, R le componenti secondo gli assi coordinati della potenza ivi applicata, saranno

$$(3)\quad \int_s^l (aP+bQ+cR)\Delta dt = L\,;\quad \int_s^l (a_1P+b_1Q+c_1R)\Delta dt = M\,,$$
$$\int_s^l (a_2P+b_2Q+c_2R)\Delta dt = N$$

le somme delle forze paralelle agli assi $C'x'$, $C'y'$, $C'z'$ agenti su tutta la verga, e

$$\int_s^l \Big[a_2[Q(Z-z)-R(Y-y)]+b_2[R(X-x)-P(Z-z)] + c_2[P(Y-y)-Q(X-x)] \Big]\Delta dt = T$$

$$(4)\quad \int_s^l \Big[a_1[Q(Z-z)-R(Y-y)]+b_1[R(X-x)-P(Z-z)] + c_1 P(Y-y)-Q(X-x)] \Big]\Delta dt = U$$

$$\int_s^l \Big[a[Q(Z-z)-R(Y-y)]+b[R(X-x)-P(Z-z)] + c[P(Y-y)-Q(X-x)] \Big]\Delta dt = V$$

rappresenteranno le somme dei momenti di quelle forze rispetto ai medesimi assi $C'x'$, $C'y'$, $C'z'$.

Moltiplicate ora le funzioni (1), (2) per l'elemento $rdrd\omega$ dell' area ABCD, poi integrate rispetto ad r ed ω, ed estesi gli integrali a tutta quell' area, avremo finalmente le equazioni di equilibrio

$$A.\theta \int\int r^2 \cos.\omega.dr.d\omega = L\,,\quad A\theta.\int\int r^2 \text{sen}\cdot\omega dr.d\omega = M$$

$$A(\dot{s}+\dot{\xi})\int\int rdrd\omega - \frac{A\,\xi}{\rho}\int\int r^2 \text{sen}.\omega.dr.d\omega = N$$

$$A\theta.\int\int r^3 dr.d\omega = T$$

$$A(\dot{s}+\dot{\xi})\int\int r^2 \cos.\omega dr.d\omega - \frac{A\,\dot{\xi}}{\rho}\int\int r^3 \text{sen}.\omega\cos.\omega.dr.d\omega = U$$

$$A\,(\dot{s}+\dot{\xi})\int\int r^2 \text{sen}.\omega dr.d\omega - \frac{A\,\dot{\xi}}{\rho}\int\int r^3 \text{sen}.^2\omega.d\omega = V.$$

Eseguite le integrazioni rispetto ad r, e supposti per brevità

$$A\theta = \tau,\ A(\dot{s}+\dot{\xi}) = t,\ A\dot{\xi} = \mu$$

avremo

$$\tau\int r^3 \cos.\omega d\omega = 3L,\ \tau\int r^3 \text{sen}.\omega.d\omega = 3M$$

$$3t\int r^2 d\omega - 2\frac{\mu}{\rho}\int r^3 \text{sen}.\omega.d\omega = 6N$$

$$(5) \qquad \tau\int r^4 d\omega = 4T$$

$$\tfrac{1}{3}t\int r^3 \cos.\omega.d\omega - \frac{\mu}{4\rho}\int r^4 \text{sen}.\omega.\cos.\omega.d\omega = U$$

$$\tfrac{1}{3}t\int r^3 \text{sen}.\omega.d\omega - \frac{\mu}{4\rho}\int r^4 \text{sen}.^3\omega.d\omega = V,$$

le quali equazioni offrono la risoluzione del problema. Diffatti eliminate le incognite μ, t, τ ne desumeremo tre equazioni contenenti x, y, z: i coseni a, b, c ec. che in forza delle supposizioni fatte si riferiscono alla tangente ed al raggio osculatore l'asse della verga nella nuova posizione, sono funzioni note di x, y, z e delle loro derivate rispetto ad s: gli integrali (3), (4) si tolgono dalle equazioni mediante la differenziazione rispetto ad s, e si riducono a funzioni di P, Q, R, Δ epperò di x, y, z e di s: così chè eliminate μ, t, τ dalle equa zioni (5) le risultanti basteranno a determinare x, y, z in funzione di s: le stesse equazioni (5) forniranno poi i valori di μ, t, τ, per mezzo dei quali conosceremo il sito che ogni punto M di qualsivoglia sezione ABC verrà ad occupare nella verga rimossa dalla primitiva posizione.

Se il corpo che si considera fosse cilindrico, per cui la r non dipenda da ω, essendo

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}.\omega.d\omega = \int_0^{2\pi} \cos.\omega.d\omega = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}.\omega\cos.\omega.d\omega = 0,\ \int_0^{2\pi} \text{sen}.^2\omega.d\omega = \pi$$

le equazioni (5) forniranno le seguenti:

$$(6)\quad L=0,\ M=0,\ \pi r^2 t=N,\ \tfrac{1}{2}\pi r^4 t=T,\ U=0,\ -\frac{\mu}{4\rho}\pi r^4=V$$

le quali concordano pienamente coi risultamenti già ottenuti da Bernulli e da Eulero. (*) Ma la terza delle equazioni (5) dimostra che generalmente la funzione N non è proporzionale all' area $\int r^2 d\omega$, ed al parametro τ. Dalla quarta equazione raccogliamo essere T proporzionale al $\int r^4 d\omega$. Siccome poi le derivate rispetto ad s delle funzioni

$$\int_s^l [Q(Z-z)-R(Y-y)]\Delta dt,\ \int_s^l [R(X-x)-P(Z-z)]\Delta dt,$$
$$\int_s^l [P(Y-y)-Q(X-x)]\Delta dt,$$

sono

$$\int_s^l (Rb_2-Qc_2)\Delta dt,\ \int_s^l (Pc_2-Ra_2)\Delta dt,\ \int_s^l (Qa_2-Pb_2)\Delta dt,$$

le quali moltiplicate rispettivamente per a_2, b_2, c_2 danno una somma eguale a zero; quindi dalle (5) desumeremo la seguente equazione

$$\frac{1}{4}\frac{d}{ds}(\tau\int r^4 d\omega)+[\tfrac{t}{3}\int r^3\cos.\omega.d\omega-\frac{\mu}{4\rho}\int r^4\text{sen}.\omega.\cos.\omega.d\omega]\times$$
$$\frac{a_2 da_1+b_2 db_1+c_2 dc_1}{ds}+[\tfrac{t}{3}\int r^3\text{sen}.\omega.d\omega-\frac{\mu}{4\rho}\int r^4\text{sen}.^2\omega.d\omega]$$
$$\times\frac{a_2 da+b_2 db+c_2 dc}{ds}=0$$

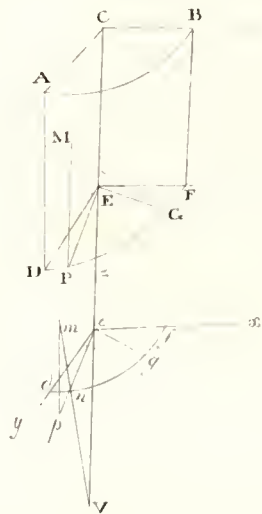
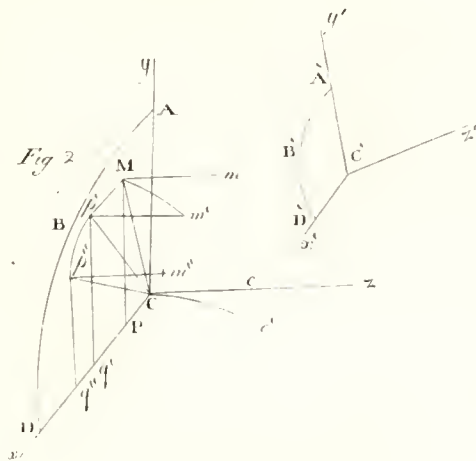
la quale dimostra che non può essere $d(\tau\int r^4 d\omega)=0$ (**) a meno che siano

$$\frac{1}{3}t\int r^3\cos.\omega.d\omega-\frac{\mu}{4\rho}\int r^4\text{sen}.\omega\cos.\omega.d\omega=0,$$

$$\frac{1}{3}t\int r^3\text{sen}.\omega.d\omega-\frac{\mu}{4\rho}\int r^4\text{sen}.^2\omega.d\omega=0,$$

oppure $a_2 da_1+b_2.db_1+c_2.dc_1=0$, $a_2.da+b_2.db+c_2.dc_2=0$, nel qual caso l' asse della verga è una linea retta.

(*) Acta Academ. Petropolit. An. 1778. — Navier luogo citato.
(**) Poisson. Correspondance de l'ecole roy. Polit. T. 3.

Fig 1
C
B
A
M
E
F
G
D
P
z
m
c
x
q
d
n
y
p
V
Fig 2
y
A
M
m
B
m'
m''
C
c
z
P
c'
q'
D
x
y'
A'
B'
C'
z'
D'
x'

SAGGIO STORICO

DEI RIZOPODI CARATTERISTICI

DEI TERRENI SOPRACRETACEI

DELL'AVVOCATO GIOVANNI MICHELOTTI

Ricevuto adì 17 *Giugno* 1839.

PRESENTATO ALLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

DAL SOCIO ATTUALE

SIGNOR CAVALIER IGNAZIO MICHELOTTI

ED APPROVATO DAL SOCIO ATTUALE

SIGNOR PROF. ANTONIO BERTOLONI

Quei piccoli testacei diafani, regolari, concamerati aventi un' apertura, più o meno regolare, destinati per racchiudere animali molli, e glutinosi, muniti di varj filamenti non fibrosi, irregolari, disposti attorno ad una apertura, e ne' quali non scorgesi indizio di alcun sistema nervoso, o respiratorio, erano dagli antichi naturalisti tedeschi conosciuti col nome di *heliciti*, da Bruguieres di *Camerine*, dal sig. De Haan di *Cefalopodi* senza sifone, dal sig. A. d'Orbigny di *Cefalopodi foraminiferi*, dal sig. Dujardins di *Rizopodi*.

Sarà mia cura di primieramente tessere una breve storia delle opinioni, che si ebbero a loro riguardo tanto dagli antichi, come dai moderni: secondariamente determinare il luogo che dobbiamo assegnare, e passare quindi in rivista le principali specie dei terreni terziarj.

La storia dei Rizopodi c' insegna, che questi furono considerati come giuochi, o scherzi della natura, poscia come analoghi ai *Cefalopodi*, e negli anni a noi più prossimi come appartenenti agl' infusorj. Il più antico degli scrittori storici Erodoto menzionò la loro abbondanza, e modo di stratifica-

zione in diverse parti dell'Africa (1). Qualche cosa di più ci lasciò Strabone mentre disse. . . . . . " Mirum est quod penes Pyramides ingentes lapides extent, plura minuta lenticularis figurae corpora recipientes (2). „

Plinio eziandio menziona i *Rizopodi*, e gli *Acefali* (3). Questo naturalista lasciò scritto essere i medesimi abbondanti nell' Etiopia. Nel rinascimento delle scienze il primo ad indicarli fu Corrado Gesner; egli parlò delle nummuliti, notò che si avvicinavano ai *nautili*, ed agli *ammoniti* sia per le concamerazioni, come per la disposizione laterale dell'apertura.

Scheuchzer di Zurigo estese i materiali lasciati da Gesner con descrivere buon numero di *nummuliti*, li avvicinò anch' egli agli *ammoniti*, ed eccitò nel suo paese l' amore delle naturali discipline con felicissimi risultati.

L' Inglese Lister sebbene non abbia menzionato i *foraminiferi*, tuttavia comprese nel suo lavoro diversi *Cefalopodi*, che chiamò *Nautilo* e *Argonauta*, con due divisioni, la prima delle quali comprendeva le specie concamerate, l'altra quelle da una sola loggia (4). Eseguì dunque Lister in fatto ciò, che poi Linneo praticò nominalmente. Quasi contemporanei al Lister furono Lorenzo Splenger (5), e Giovanni Breyn. Il primo limitossi a figurare diverse specie, ed il suo lavoro rarissimo fuori della Danimarca è per questa causa poco conosciuto. Breynio, sebbene compreso da Linneo fra gli scrittori che lavorarono *infelici partu*, e dal Fortis censurato per un semplice commentatore dello Scheuchzer, lasciò tuttavia monumenti tali delle sue cognizioni, che gli meriteranno sempre la nostra riconoscenza. Duolmi assaissimo di non poter consultare questo abile scrittore; tuttavia a sicura fonte io attingo per giudicarne dietro alcuni passi riportati dal Martini.

---

(1) Erod. part. XII.
(2) Geograph. lib. 17.
(3) Historia Mundi libro XXXVII, cap. 10.
(4) Historia conch. Lond. pag. 5.
(5) De polythalamiis Gedani 1732.

Breynio dunque chiamò *ammoniti* le conchiglie concamerate aventi la spira da ambe le parti giacente in un piano orizzontale. Ecco le sue parole: " Testa polythalamia dicitur,
„ cujus cavitas in varias concamerationes, quas thalamos voco,
„ mediantibus parietibus integerrimis, sive diaphragmatibus
„ pariter testaceis dividitur: extimo thalamo animali recepta-
„ culum praebente, caeteris vacuis, sed Siphunculo sensim
„ gracilescente ad apicem usque perviis .... Usus siphunculi
„ esse videtur, ut recipiat caudam, sive appendicem partis
„ animalis mollis, eamque per totam testae trasmittat spiram,
„ cujus beneficio testae non tantum connectitur firmiter, sed
„ etiam ipsa testa vitalis reddi videtur.... Ammonia est po-
„ lythalamium in spiram externe utrinque apparentem in
„ plano horizontali convolutum..... „

Sarà dunque di leggieri provato, che questo Scrittore indicò il primo l'uso del Sifone, l'ultima concamerazione, la progressione, e disposizione dei giri della spira.

Pari è la felicità del tedesco scrittore, quando scrive del mollusco ..... " Animalculi exilitas collectu facilis, quamvis
" de ejus figura altum apud omnes silentium. De amplitudine
" cavitatis extimae nec dum certo constat: quia enim basi
" sua scopulis adhaeret, borea flante ita separatur ut extimus
" ejus margo admodum fragilis, in scopulis remaneat..... „
Se si osservi in qual tempo, e luogo scrisse il Breynio dei Cefalopodi, ci convinceremo della sagacità, di cui diede saggio. Egli è infine Breynio, che introdusse il genere *orthoceratites*, che obbliato da Linneo, e dal Lamarck, rivisse ai nostri giorni, come scorgesi nelle pubblicazioni dei Sowerby, Ferussac, Bronn etc.

Giovanni Bianchi (1) diedesi eziandio ad investigare le sabbie nautiliche delle vicinanze di Rimini; egli era d'opinione che i testacei dei *Rizopodi* fossero per la maggior parte opercoli d'altri testacei, e gli chiamò Ammonii: sebbene il

(1) Questo autore per lo più si fa conoscere sotto il nome di Jano Planco.

lavoro del Planco, ossia del Bianchi lasci molto a desiderare, come lo provano Fichtel e Moll, tuttavia non è privo d'importanza; egli prima del Soldani fece conoscere la loro abbondanza nell' Italia sia nello stato vivente, come nello stato fossile, e numerò partitamente le varie quantità di specie, che ne somministravano molti strati del nostro suolo. Combattè felicemente l' opinione del Woodward, il quale affermava essere tali cose scherzi della natura, o produzioni del caso, opinione ritenuta per più di 200 anni, perchè a que' tempi l'opinione prevaleva all' osservazione, dalla quale sola partir doveva la convinzione dell' origine di tali esseri.

Singolare è eziandio l' effetto che attribuì questo scrittore al flusso, ed al riflusso del mare, dal quale ripetè la formazione dei terreni sopracretacei.

Nello scorso secolo e precisamente nel 1744 comparve un lavoro di Giovanni Spada, nel quale l' autore numerò 44 specie di *ammoniti*; ma la brevità delle sue descrizioni, giusta l'avviso del signor De Haan, non permette di riconoscerle. Lo Spada emise un' opinione riguardo ai Cefalopodi di un qualche peso; egli dice: . . . " Alcuni li hanno creduti spo-
„ glie, altri animali testacei petrificati, altri dei grani accu-
" mulati dai venti, o dalle acque, e petrificati in seguito; io
" non penso, che si aprano, come le bivalvi, ma sibbene come
" le univalvi, tenendosi uniti alle rocce, ricevendo l' acqua
" ed il cibo da un orifizio, e facendone sortire l' escremento
" dall' altro . . . . „ Approfitta di questo passo il Fortis per ingiuriare lo Spada: comincia col chiamarlo ironicamente. . . . . *un honêt curè* . . . . , dice essere povero il suo catalogo, e . . . *fourmiller des bevues* qui prouvent une extreme imperitie dans la lithologie . . . . In fine l' inurbano compaesano seguita dicendo . . . . " Il y a de quoi s' étonner sans doute, qu' on ait
" donnè quelque importance a un homme, qui ne connoissoit
" pas la difference qu il y a entre un cercle, et une sphere „ (Fortis vol. 2. pag. 34). L' obblio è al certo la pena di coloro, che follemente favoleggiarono; il disprezzo si addice agli

scrittori, che prodigarono sarcasmi in quelle scienze, alle quali essi nulla giovarono, come è nel nostro caso il Fortis, che con ingiurie cercò di screditare il lavoro d' un modesto scrittore, mentre doveva procurare di corregerlo con buone ragioni, ed analiticamente.

Comparve l' opera del Gualtieri nel 1742: quest' uomo versato nella conchiliologia diede a divedere di conoscere le principali divisioni della malacologia, e preparò così il terreno su cui lavorò lo Svedese naturalista.

Ammise il Gualtieri per base delle sue divisioni la differenza fra le conchiglie a molte concamerazioni, e quelle che ne mostrano solamente una: fra le prime ammise tre generi cioè il *Nautilo*, e l' *Ammonia* comprendendo nell' *Ammonia* i foraminiferi oltre la *spirula*. Il terzo genere conteneva gli *Orthoceras*; per i quali diede la seguente definizione . . . . .
" Orthoc. est testa marina polithalamia in lineam rectam, vel
" proxim. ad rectam accedentem extensa ,, . . . , e vi comprese le seguenti specie. *Orthoc. raphanus, orth. obliqua, orth. fascia, orth. legumen, e nodosaria siphunculus,* Lamarck.

Ripetono dunque gli *Orthoceras* per loro autore il Gualtieri, come ben altri molti dal medesimo distinti sia nella classe degli Acefali, come in quella dei Gasteropodi, e quest' asserzione trovasi appoggiata dal Signor Deshayes nella sua opera sui fossili delle vicinanze di Parigi.

Lontano è il lavoro del Gualtieri dal peccare di nullità, come pretende alcuno; chè anzi questo prova, che egli contribuì assaissimo ai progressi della malacologia.

Vicina alla pubblicazione del Gualtieri comparve quella di Teodoro Klein Olandese, il quale, sebbene abbia dimostrato di aver poco conosciuto i lavori, che lo precedettero per i *Cefalopodi*, giovò tuttavia non poco per certi punti di vista singolari, e profondi; così alla pag. 44 troviamo figurate e descritte molte specie d'*Orthoceras*, che egli nominava *strombi*.

Più felice Klein nelle generali applicazioni, che nei nomi, spiegò il motivo per cui l' ultimo giro di spira è maggior de-

gli altri, cosa, che sebbene ovvia, non era stata ancor avvertita.

Conobbe Klein la *Spirolinites*, che nominò *Semilituus* aggiungendo .... " hoc nomine non inepte poterit appellari, " quum appendicem quamdam rectam habeat albissimi colo- " ris... „ vid. cit. loc. pag. 5. Provò eziandio, che i molluschi non potevano a cagione dei loro muscoli abbandonare i gusci ..... vid. pag. 35.

In quest' età fiorì eziandio Lederman, che descrisse, e figurò varie specie di Cefalopodi; pare però che non siasi occupato dell' animale che li abitò, ed è singolare, che nè il Sig. De Haan, nè gli altri moderni scrittori di mia conoscenza l'abbiano mai citato. Egli è omai tempo di passare alle opinioni di Linneo. Questi in primo luogo credette di scorgere nelle nummuliti delle piccole madrepore (1): confermò quest' opinione nel suo Museo Tessiniano, e poco dopo credette di scorgervi degli esseri appartenenti a piccole meduse (2). A giudizio del Professore Thunberg Linneo vide l' animale d' una madrepora, ed a seconda della prima opinione giudicò, che l' animale delle nummuliti non ne fosse diverso.

Quì giustamente osservò il Fortis, che l' autore Svedese confuse i foraminiferi ora coi nautili, ora coi polipaj, ora colle meduse. In fatti nel *Systema naturae* secondo l' edizione del Gmelin (3) Linneo divise i molluschi in semplici, ed in testacei, e separò questi ultimi in univalvi, bivalvi, e multivalvi. Trovansi negli univalvi l'*Argonauta*, il *Nautilus*, il *Conus*, la *Cypraea* ec. : quanto ai *Nautili* amò separarli in nautili spirali rotondi, ed in allungati dritti, comprendendo nei primi il *Nautilus Pompilius*, la *Spirula*, e varj foraminiferi. Reca adunque meraviglia la denominazione generale di *vermes testacei* a tutti i molluschi non nudi, quando sì grande ne è la

(1) Amaenitates Accadem. dissert. de corall. Balticis.

(2) Am. cit. vol. 4.

(3) System. naturae edit. variae.

differenza, come scorgesi da varie descrizioni, e figure, che ci lasciarono gli scrittori, che lo precedettero.

Nel particolare poi dei foraminiferi dalla loro unione col *Nautilus*, e la *Spirula*, e dal luogo assegnato alla *Spirolinites* fra la *spirula* e gli *orthoceras*, testacei, che la sola investigazione della conchiglia basta a dividere, ci sembra doversi presumere, che Linneo giudicò superficialmente dei foraminiferi, lo che non avrebbe fatto se avesse consultato i lavori dello Scheuchzer, del Breyn ec. Non è tuttavia da passar sotto silenzio un importante servizio, che in questa parte egli rese alla scienza col distinguere nominalmente gli *Argonauti* dai Nautili.

Molto prossimamente alla 12ª edizione del Syst. naturae il Martini pubblicò il principio del suo lavoro sui testacei col titolo di Gabinetto di Conchiliologia, continuato poscia dal Chemnitz; questo è ancora il più bello, e più esteso lavoro, che abbiasi intorno alla malacologia. Mentre Kiener in Francia ne imprese a trattare uno consimile, il quale è pure corredato di magnifiche tavole, ma procede sì lentamente, che molti disperano di vederlo ultimato. Frattanto il sig. Vagner in Germania attende al completamento dell' opera del Martini, e del Chemnitz.

Il Martini pose per prima sua divisione i tubi vermiculari testacei, che suddivise in univalvi, e moltivalvi, e gli univalvi in semplici, e concamerati, gli uni e gli altri poi in solitarj, ed in conglomerati. Quantunque il Martini abbia compreso gli *Orthoceras* nel novero dei tubuli, e conseguentemente li abbia creduti analoghi ai dentali, tuttavia egli ne conobbe ottimamente la conformazione, ad eccezione di quella del Sifone; loro appose il nome di *Orthoceras*, e ne classificò le specie seguenti: *Orthoc. Raphanus, Orth. fascia, Orth. obliqua, Orthoc. legumen*, e *Nodosaira siphunculus*. Diede eziandio le figure di qualche Binigerina, che conobbe approssimarsi agli *Orthoceras*.

Del resto il Martini conchiuse doversi assomigliarsi l'*Argonauta* alle Haliotidi, e non curando la separazione introdotta da Linneo fra il *Nautilus*, e l' Argonauta chiamò *Nautilus velificans*, e *remigans* l' *Argonauta nitida*, e ritenne il *Nautilus Pompilius*, confessando tuttavia la differenza de' costoro animali. Credette parimente, che la *Carinaria*, genere appartenente alli Gasteropodi, dovesse tener luogo fra i suoi *nautili*, cioè il luogo medio fra l' *Argonauta*, ed il *Nautilo*, e ciò dietro l' esempio d' Argenville, che aveva pur chiamata la *carinaria* nautilo vitreo di color bianco ec.

Oltre i suddetti generi di *foraminiferi* il Martini abbracciò ancora i seguenti, . . . *Planulina*, *Cristellaria*, *Nonionina*, *Binigerina* (1), ed ebbe cura di riferire quanto di più rimarchevole scrissero quelli, che lo precedettero. Speriamo, che Kuster, e Wagner nella continuazione dei lavori del Martini, e dello Chemnitz vorranno ampliare ciò, che gli ultimi ci lasciarono di imperfetto.

Il Dott. Giovanni Targioni Tozzetti occupossi pure dei foraminiferi (2), mentre Ottone Muller (3), e Schröter (4) nell' Allemagna investigarono le varie specie che offrono i medesimi.

Conobbe adunque, e rilevò il Tozzetti l' improprietà della classificazione Linneana, e l'abbondanza dei *foraminiferi* in varie contrade; quanto alla loro origine nel primo volume de' suoi viaggi affermò essere corpi marini sepolti, ed alcuni essere senza fallo piccoli *nautili*, ed in buona fede assicurò che la loro classificazione era assai incerta. Disse, che le colline di Parlascio in Toscana erano composte di strati, dove abbon-

---

(1) Neues Systematisches Conchylien Gabinet, Nurimberg 1799 et seq.

(2) Relazioni di viaggi in Toscana tom. 1.

(3) Ven Wurman des sussen und salziger vasser mit Kupfern. Kopenagen 1771 et alib.

(5) Journal fur die Liebhaber des steinreichs und der conchyliologie.
Conchyliologischen Rapsodien
Naturforscher.

dano le nummuliti, alcune delle quali avevano i loro analoghi viventi, ed altre no. Incoerente però a se stesso nel volume quarto dopo d' aver parlato delle concamerazioni, conchiuse, che i foraminiferi gli sembravano *lumachelle*, e poco dopo disse, che i medesimi erano Zoofiti. Il Fortis più versato a notare le contradizioni degli Scrittori col criticarli, che a profittare di quanto lasciarono di più giudizioso, non mancò di ironicamente affliggere la memoria di un dotto, ed ardente naturalista, qual era il Fiorentino Tozzetti.

Anche il Saussure ne' suoi viaggi sulle Alpi trattò dei foraminiferi dietro le cognizioni che si avevano a quell' epoca. Più particolarmente poi lo scrittore delle Alpi occupossi dei *nummuliti* come quelli, che nelle medesime formano possenti strati; dimostrò, che al di fuori non mostravano indizio di organizzazione, e che erano divisi in varie concamerazioni; si uniformò all' opinione di quelli fra gli antichi, che collocarono l'animale nell'ultima concamerazione, e fece conoscere il modo di dividere i medesimi *nummuliti*. Emise questo scrittore anche un' opinione sul modo d' esistenza di questi esseri, cioè che fossero l' opera di diversi animali, i quali succedendosi l' un l' altro accrescessero così la conchiglia, opinione alquanto contraria all' osservazione fatta sugli esseri organici, convenendo supporre, che l' animale piccolissimo della prima concamerazione fosse l' origine d' altri in suo confronto assai più ampj, ed opinione inoltre che non spiegherebbe la moltiplicità delle varie specie.

Non la perdonò il Fortis nemmeno al Saussure, e senza combattere il filosofo di Ginevra con buone ragioni, giudicò erronea l' opinione di lui, perchè mancano indizj organici nelle *nummuliti*. Ricusò di addottare l' opinione dello stesso Saussure, che i foraminiferi fossero moltiloculari, adducendo per sola ragione contraria, che egli aveva trovato nel Veronese, e nella Transilvania i *nummuliti* occupati interamente da sostanza pietrosa, della qual osservazione ne lascio ad altri giudicare il valore, e nemmeno mi fermerò sull' opinione del De Luc, che avvisò essere i foraminiferi prodotti dai polipi.

Quanto agli autori, che unicamente parlarono dei Rizopodi, nessuno prima del Boys, e del suo commentatore Walker s' occupò *ex professo* di tali esseri. Il Boys, ed il Walker esaminarono minutamente le sabbie delle Isole di Sandwick, e ne ritrassero moltissime specie. Vi furono principalmente animati dal Signor Faker, che raccomandava l' uso del microscopio in queste ricerche; i testacei, egli dice, . . . „
" are objets that have yet been very slightly examined by
" the microscope, and therefore the serious inquirer into Na-
" ture-s secretes operations may here be certain of discovering.
" beauties, which at present he can have no conception of.„
Il Boys, ed il Walker pubblicarono il loro lavoro col titolo: *testacea minuta rariora littoris Sandvicensis. London* 1784, e questo lavoro meritò l' aggradimento degli amatori, anzi divenne un' opera molto ricercata (1). Un anno dopo la pubblicazione dei due scrittori inglesi escì quella d' un illustre naturalista italiano il Soldani (2). Ebbe egli il vanto di vincere in pazienza quanti lo precedettero nell'osservare i foraminiferi, e fu autore di due opere del più alto rilievo. Abile Paleontologista il Soldani enumerò le singole specie delle vicinanze di Siena, le figurò, e le descrisse, ma ommise di dar loro un nome specifico, lo che diede luogo a nostri giorni ad un distinto naturalista d' apporre questo nome alle medesime.

Nè vogliasi incolpare il Soldani di osservatore limitato, e parziale, giacchè dimorando egli in Siena era necessariamente tratto a fare, e moltiplicare le sue ricerche sopra il suolo dove abitava, piuttosto che sopra lontane regioni.

---

(1) Egli è mio dovere di quì attestare la mia riconoscenza al mio amico Signor Cavaliere Devonshire Saull abile geologo ed astronomo di Londra per avermi procurata copia del lavoro di Boys e Walker.

(2) Riguardo al Soldani un autore francese ci avvisa essere egli morto per un gagliardo risentimento che in lui eccitò l' indifferenza degli Italiani per i suoi lavori. Io posso contraddire quest' asserzione, giacchè il Padre Ambrogio Soldani prima della venuta dei francesi in Italia era agli stipendj del Gran Duca di Toscana, il quale gli pagò l' impressione, e le figure de' suoi lavori.

Egli è intorno a quest' epoca, che comparve l' opera di due tedeschi distinti intorno ai testacei microscopici: vò dire del lavoro di Fichtel, e Moll publicato a Vienna nel 1803. Arrichirono Fichtel e Moll il catalogo dei foraminiferi aggiungendone buon numero di ignoti, che trovarono in varie parti degli Stati Austriaci; cadauna specie fu da loro accuratamente descritta, e figurata, anzi resa più chiara per i colori dati alle figure. Alcune delle loro specie però appartengono ai mari della zona equatoriale. Essi ritennero la denominazione Linneana colla differenza, che divisero il genere Nautilo Linneano in quattro, cioè in Nautilo, Hammonio, Lituo, ed Orthoceras, in modo però che il genere Nummulites faceva parte del loro genere Nautilo in un con altri molti foraminiferi; adunque il Soldani precedette gli autori sistematici, che arrecarono si grandi progressi alle scienze naturali.

Nell' Enciclopedia metodica Bruguieres emise i suoi pensieri intorno ai foraminiferi, che chiamò camerine; espose le differenze, che esistono fra questi, ed i nautili, dicendo . . . " qu' elles en diffêrent par les cloisons de leur spire, qui " sont entiéres au lieu que dans les nautiles, elles sont per- " cées par une tubulure que Linné a designé sous le nom " de Syphon ,, . . . Ammirabile è la perspicacia dell' autore francese nel vedere, che l' animale dei nummuliti probabilmente era fissato nell' ultima concamerazione, e che conseguentemente non poteva in vista del Sifone tener dietro all' accrescimento della conchiglia come nei Cefalopodi; conchiuse poi che l' animale delle camerine non poteva paragonarsi ad alcuno dei Cefalopodi.

Non mancò al Bruguieres un critico nella persona del Fortis; un errore topografico di cifra incorso nella composizione dell' Enciclopedia fu cagione, che il Fortis disse, che " L' helminthologiste francois ignoroit absolument que Scheu- " chzer soixant ans avant, Gesner, et d'autres avoient proposè " la même hypothese ,, e non s' avvide che dando dell' ignorante al Bruguieres, oltre al modo inurbano adoperato, mostrava

di non conoscere egli stesso la storia; giacchè Corrado Gesner di Zurigo nacque nel 1516, e nel 1545 pubblicò il lavoro, che ci riguarda; al contrario Giovanni Giacomo Scheuchzer nacque a Zurigo nel 1672, e morì nel 1733. Rimproverò parimente il Fortis al Bruguieres l'analogia, che quest' ultimo sosteneva fra il nautilus, ed i foraminiferi o camerine, analogia perfettamente avvalorata tanto dalle concamerazioni, quanto dal piano della conchiglia in molte specie, misurando però sempre con Bruguieres questa analogia unicamente dalla forma esterna, della quale sola intendeva di parlare l'autore francese.

Ma a che io mi dilungo a combattere le critiche del Fortis, e difendere il Bruguieres? Il giudizio dei più abili naturalisti si dichiarò prima d' ora su questo riguardo, e non cesserà di mostrare quale dei due scrittori abbia maggiori titoli alla nostra riconoscenza. Ora mi tocca parlare del Lamarck.

La classificazione del Lamarck, la quale precedette quella del Cuvier, cosa non avvertita dal De Haan, comparve nel 1801, ed ivi è consegnato il risultato delle sue osservazioni.

Pubblicando questo distinto naturalista la sua divisione degli animali vertebrati, ed invertebrati annovera fra gli ultimi anche i molluschi. I molluschi dunque occupano in questo lavoro un luogo fra gli animali sensibili, e seguono immediatamente gli animali apatici, che sono gl' infusorj i polipi, i radiati, ed i vermi; addita nei citati molluschi la privazione della colonna vertebrale, e del cervello, ed in alcuni la presenza di una massa medullare allungata, l' esistenza di qualche senso distinto con organi del movimento attaccati sotto alla pelle, ed una forma cilindrica eguale nelle parti eguali.

Qualunque siansi le emendazioni, di cui può abbisognare il primo lavoro del Lamarck, già da altri indicate, esso tuttavia mostra a chiare note quali, e quanto felici viste lo guidavano nella sua classificazione, poichè il Schumacher a Copenhagen avvisava ad un eguale scopo, ignari a vicenda del rispettivo lavoro.

Poco dopo della pubblicazione Lamarckiana Alberto Fortis di Verona scrisse intorno ai Rizopodi, e specialmente alle nummuliti. Comincia egli a narrare diverse popolari opinioni sulle camerine; pone il *Mercati* ed il *Lancisi* per i primi illustratori delle nummuliti, ed oblia Corrado Gesner, e ben molti altri.

Passa quindi in rivista i diversi scrittori, e senza valutare i buoni materiali da loro lasciati, non fa vedere nel suo scritto altro scopo, che quello della critica.

Gettò il Fortis per fondamento positivo, che le discoliti mancavano soventi di ogni apparenza d'un' apertura, e stabilì, che i nummuliti fossero un osso interno d'un *pesce*, e che questi non esistessero, che nel mare delle Indie, mostrando di non avere conoscenza dei lavori dello Scilla, del Soldani ec., e conchiuse essere molto probabile il ritrovamento delle *belemniti* nello stato vivente. Era così fermo nella sua opinione, che disse.... " j' ai assez insistè sur l' inhabitabilitè de l'in-" terieur de la discolithe en rèfutant les opinions de ceux, " qui ont voulu en faire une espece de *nautilites* (vol. 2. pag. " 119).... Les anomalies de ces petits corps semblent don-" ner un nouveau degré de force à l'opinion, qui en fait des " osselets pierreux d' une espèce de mollusque encore peu " connue, quoique multipliè presque à l' infini, pour fournir " l' aliment à des poissons de passage. Il devoit être arrivé " pour la fabrication des osselets ce qui arrive pour celle du " noyau dans les fruits, pour celle des coquilles, et plus iden-" tiquement encore pour des os de seiche, et de calmar : la " craie s' etant èlaborée dans les organes du petit mollusque, " a fourni par un suintement non interrompu, la matiere dont " les vôutes de leur charpente se sont formées spiralement " autour du même axe. L' organisation interieure du petit " mollusque avoit sans doute des vaisseaux excretoires dont " les orifices, l' emplacement, la figure ètoient appropriés à " la fabrication d' une bandelette tournante, et des parois " multipliées, qui devoient en tenir les pas écartès. La

" La constitution gélatineuse de l'animal, la multiplicitè des
" dangers, que la nature lui aura preparés en le destinant a
" servir de nourriture à d' innombrables poissons voyageurs,
" doivent avoir produit cet effet que tandis, que des milliards
" d' individus perissoient sucés par des ennemis voraces, des
" milliers d'autres auront été mutilés, blessès, mis en état de
" perdre dans des cicatrices plus ou moins considerables, les
" traces des attaques dont ils seront echappès etc. ,,... È inutile fermarsi più oltre sull' opinione del Fortis intorno all'animale, che abita la *nummulite*; vuol egli provare dall'anomalia delle *camerine*, che le nummuliti furono ossi pietrosi di qualche mollusco, doversi in conseguenza paragonare ai noccioli dei frutti, paragone improprio per chiunque abbia qualche fondata conoscenza della Zoologia, e della filosofia botanica. Assegna alle concamerazioni dei contabulati funzioni proprie dei vasi dell' animale, che pone autore delle medesime. Poco fondamento ha la sua asserzione, allorchè attribuisce la distruzione di questi animali al passaggio dei pesci viaggiatori, e allorchè dice, che le *nummuliti* del Veronese furono resti d'altrettanti molluschi distrutti dalle Aringhe, Sardine, ec., poichè l'ittiologia Veronese contemporanea per il suo deposito ai nummuliti non presenta alcuna specie dei pesci, che ora abbiamo viventi. In fine riferisce le nummuliti regolari ad animali ben organizzati, quelle irregolari per contro ad animali offesi.

A ben esaminare il metodo del Cuvier, che tenne dietro a quello del Lamarck osserveremo, che nella sua prima classe dei cefalopodi ammise sette divisioni principali, cioè le *Sepie*, i *Nautili*, le *Belemniti*, gl'*Ippuriti*, gli *Ammoniti*, le *Camerine*, e gli *Argonauti*. Non occorre ripetere, che ulteriori investigazioni dimostrarono le *ippuriti appartenere alle rudiste*, come eziandio, che l'avere egli congiunto i suoi *nautili* colle *camerine* per mezzo delle *Belemniti* non era consentaneo all'ordine, che si proponeva di seguire nel suo lavoro: però evidentemente apparisce, che il *Cuvier* presumeva, che fra le *lenticuline*, e le *camerine* esistesse una forma egualmente diversa, come fra le *lenticuline*, e gli *ammoniti*, fra le *sideroliniti*, e le *turriliti*.

Io non m'innoltro nella classificazione parziale del Cuvier, il quale più inteso alle generali divisioni della Zoologia, che alle specialità dei generi, e delle specie, seguì le traccie de' suoi predecessori.

Trovo eziandio nel lavoro dell'eminente cultore dell'anatomia comparata alcuni generi, v. g. *Pelora, Geopera, Tinopera*, i quali scomparvero nelle classificazioni ulteriori.

Denys de Montfort nel 1808 pubblicò parimenti un lavoro sulla conchigliologia, che comprende anche i Rizopodi posti da lui nel novero delle conchiglie univalvi concamerate, e avvoltate a spirale. Credendo il succitato scrittore di dover seguire con buon effetto l'impulso dato dal Linneo, e dal Lamarck di moltiplicare i generi, e le specie, fabbricò generi su generi; di questa guisa il genere *Phonemus*, che figurò per nuovo, l'*Ellipsolithes* vero *Ammonite*, gl'ideali generi *Iesites, Tinoporus, Lycophris, Egeon, Reophax* ec. provano, che egli descriveva, e figurava degli esseri, che non esistono in natura.

Montfort novatore fu da principio favorevolmente accolto; ma l'osservazione, ed un esame diligente de' suoi lavori avendone svelata l'impudenza, gli scritti di lui caddero in tanto discredito, che un autore moderno di grido non si trattenne dal dire, che dovrebbesi cancellare il Montfort dal novero degli autori, che si citano: severa, ma giusta sentenza.

Schweiger dopo il Cuvier diede una classificazione dei Cefalopodi, ed ammise fra questi la distinzione di quelli a corpo nudo, e di quelli a corpo testaceo; divise questi ultimi in Cefalopodi spirali .... *Nautilus, Lenticulina, Planulites, Lituus* ec., e Cefalopodi a spirali, *Nodosaira, Orthoceras, Hippurites* ec. Delle *nummuliti*, e *milioliti* ne fece una sezione particolare, la quale pure suddivise secondo che vi aveva un' articolazione nel testaceo, ovvero vi mancava il sifone nei dissepimenti.

Quantunque il lavoro dello Schweiger non possa considerarsi come originario, modellato qual'è sui metodi del Cuvier,

e del Lamarck, tuttavia non lascia di offrire ottime osservazioni partendo dalla distribuzione della spira. Innoltre quest' Autore separò la *Vaginulina* dagli *Orthoceras*, dichiarò il rapporto di essa colle *Nodosaire*, ed accrebbe il numero delle specie cognite.

Egli è a quest' epoca, che insorse una dissensione fra i dotti sopra l' indole dell' *Ocythoë*, cioè se quest' animale sia l' origine dell'*Argonauta*, ovvero se sia un animale parasitico, su del qual argomento per non essere di lieve momento ci fermeremo alquanto.

Il Leach (1), il Blainville (2), ed il Gray (3) sostennero essere parasitico l' animale, che trovasi nell'*Argonauta*, laddove il De Haan (4), ed alcuni altri sostenevano, che l'*Ocythoë* era il vero abitatore dell' *Argonauta*, e quest'ultima opinione fu appoggiata dai Signori d'Orbigny (5), Poli, Power (6), Rang (7), e Edoardo Charlesworth (8).

Il Maravigne di Catania cercò di menar per buone le ragioni del Blainville; ma così non adoperò l'illustre Professor Ranzani in una sua memoria inserita nel tomo 3.° degli Opuscoli scientifici di Bologna p. 198 e seg., nella quale prese a diligente esame le ragioni del Blainville, e conchiuse colle seguenti parole: " Gli argomenti addotti dal Sig. Blainville, " e da me imparzialmente esaminati, lungi dal formare, come " egli pretende, una specie di dimostrazione, lasciano la cosa, " qual era prima, incerta cioè, e dubbia, e che quindi a deci- " dere, se i cefalopodi trovati nelle conchiglie denominate Ar-

(1) Philosophical transact. 1817. pag. 296.
(2) Journal de phys. tom. 86. 1818.
(3) Zoological journal.
(4) Monograf. ammonit. 1824, pag. 15.
(5) Ann. des sciences. natur. tom. 7. pag. 136.
(6) Memorie dell'Accadem. Gioenia.
(7) Manuel des mollusq.
Comptes rendus des seances de l' accademie des sciences, avril 1837.
(8) Loudon-s Magazin of natural history n. X, Oct. 1837.

“ gonauti ne siano, o nò, i fabbricatori, ed i legittimi proprie-
“ tarj, duopo è l'instituire nuove osservazioni, ed il fare nuove
“ ricerche. „ Ranz. l. c. p. 214.

Comunque siano queste diverse opinioni, troveremo, che da ambe le parti s' arrecarono non superficiali argomenti.

Sostenevano gli uni, che l'*Ocythoë* trovasi sovente fuori dell' animale, e che non somiglia all' animale degli altri cefalopodi, al che si risponde, che il primo fatto non prova altro, se non che l'*ocythoë* può vivere fuori del testaceo, e che quanto al secondo la conchiglia dei *nautili* era diversa da quella dell' *Argonauta*. Rinforzavano i primi il loro argomento dicendo, che la conchiglia dell'*Argonauta* non esisteva da principio nell' uovo dell' *ocythoë*, che le riparazioni della medesima operate dal detto animale non erano circostanziate, e che il comparire della conchiglia dopo la nascita dell'*ocythoë* era contrario a quanto osservasi nei molluschi testacei. A ciò rispondeva il Signor Charlesworth, che egli aveva veduto l'*ocythoë* riparare l'*Argonauta*, che questa riparazione era assolutamente analoga al rimanente del testaceo; che quanto all' ultima objezione avevano esempj in contrario, qual sarebbe quello della *testacella*, che la trassudazione poteva operare quello, che nel primo comparire dell' *ocythoë* non esisteva, che la forma del suo capo conveniva con quella dell' apertura dell' argonauta, e che la costante presenza dell' *ocythoë* negli *argonauta* meritava qualche riguardo.

In questo conflitto di opinioni, io mi asterrò dal pronunciare il mio sentimento, finchè non avrò veduto, ed esaminato l' *Ocythoë*; confesso però d'essere inclinato ad addottare l' opinione del Signor De Haan, e suoi seguaci: fra i quali avvi anche il Sig. Filippi, l' insigne Tedesco naturalista. Il Lamarck nel suo lavoro sopra gli animali invertebrati modificò la sua prima divisione col separare i Cefalopodi polythalamj in quelli aventi la conchiglia moltiloculare, e le concamerazioni semplici, ed in quelli aventi la conchiglia moltiloculare, e le concamerazioni tagliate ai margini. Nel primo

rango, ove egli collocò tutti i foraminiferi, seguitò a ritenere gli *ippuriti*, che egli suddivise secondo la forma esteriore della spira, e delle concamerazioni; così vediamo la *Lenticulina* separata dalle *Nummuliti*, il *Discordis* allontanato dalle *Rotalie* ec.

Quello che sorprende nel lavoro del Lamarck si è, che esso non rammenta il sifone, che gli servì di base nella prima classificazione, e non lo rammenta, se non secondariamente nel *nautilo*, ed a suo credere la *nummulite* è intermedia fra il *Nautilo* da una parte, e la *Rotalia* dall' altra.

Se il Lamark non fu molto felice nella sua prima divisione a motivo delle poche cognizioni, che allora avevansi dei Cefalopodi contabulati, conobbe però a fondo i caratteri esterni dei generi, e di questi ultimi accrebbe utilmente il numero v. g. *Cristellaria*, *Melonia*, *Rotalia*, *Placentula* ec., i quali sono ancor oggidì ricevuti.

Il Signor Ferussac introdusse egli pure una nuova maniera di dividere i Rizopodi. Sulle traccie degli antichi, ed in ispecie di Bruguieres separò i Cefalopodi col sifone da quelli, che ne sono privi, ed in queste divisioni ne introdusse un' altra secondaria destinata a comprendere i foraminiferi. Non occorre quì osservare, che questo Scrittore avvicinò gli *ammoniti* agli *ippuriti*, questi ultimi agli *orthoceras*, e quello, che vi hà di peggio, le *milioliti* alle Sepie, sebbene notasse, che la Sepia è un rudimento testaceo non spirale.

Succedette ai lavori del Ferussac il metodo di dividere i Rizopodi immaginato dal Signor Alcide d'Orbigny, col quale ripartì i Cefalopodi in tre ordini: il primo comprende quelli che non hanno che una sola concamerazione come la *Soepia* ec. Il secondo quelli che hanno un sifone che passa in tutte le concamerazioni interne e che terminano in una vasta concamerazione come i Nautili, gli ammoniti ec. In fine del terzo pose le conchiglie a più concamerazioni interne, e che non hanno concamerazione al di là dell' ultima ripartizione e che mancano egualmente di sifone.

Un esame imparziale del medesimo essendo necessario per giudicare del valore di un' opera, che corre per le mani di tutti, così credo doveroso esporre per quali titoli questa meriti qualche correzione, e per quali sia maggiormente commendevole.

Primieramente stando anche alla sua ipotesi intorno agli abitatori dei Rizopodi, non si capisce per qual motivo esso abbia mutato il nome di *camerine* in quella più improprio di *foraminiferi*. Per non dissimili motivi ignoriamo la causa, per cui non addottò il nome di *Cefalopodi contabulati* introdotto dal Signor De Haan: è bensì vero che a questo riguardo l'Orbigny ci avvisa, che il nome imposto dall' autore Olandese non caratterizza bene gli organi, che distinguono i Rizopodi; ma io domando, se il nome di *foraminiferi* li indichi meglio: d' altronde non reale, ma nominale solamente fu il vocabolo sostituito dal Signor d' Orbigny a quello del De Haan.

Non ammette innoltre difesa di sorta l' avere lo stesso d' Orbigny descritto l' animale dei Rizopodi in modo affatto diverso da quello che egli è; così attribuì a tali animali un corpo fatto a borsa, e li credette muniti di capo, e di forma molto prossima a quella dei Cefalopodi, laddove nei Rizopodi non troviamo, che una sola apertura guarnita di filamenti irregolari, e ramificati, dai quali derivò il nome di Rizopodi. Che se dalle generali cose alle particolari vogliasi discendere, troveremo nel lavoro predetto grande parsimonia di citazioni; laonde poche sono le specie, che citò del Boys, del Walker, dello Splenger, del Muller, dello Schroter, del Fortis, le opere de' quali non mancavano in Parigi, e si potevano di leggieri consultare, e riguardo alle specie, che corredò di citazioni, affastellò sotto di queste i sinonimi degli antichi con quelli dei moderni naturalisti senza fino criterio.

Non ebbe innoltre cura di determinare l'epoca della formazione del terreno, in cui si trovano le specie delle quali trattò, cognizione del più alto rilievo per la Paleontologia.

Qualunque siansi le imperfezioni, che troviamo nella pubblicazione del Signor d'Orbigny, esse però quasi scompariscono a fronte dell' utilità, che l'Autore recò a questa parte della storia naturale. Riordinò egli i materiali lasciati da coloro, che lo precedettero, ne ampliò la messe, indicò la forma dell' apertura in cadaun genere, il modo d' accrescimento speciale d' ognuno, ed il passaggio dall' uno all' altro; di questa guisa avvicinò agli *Orthoceras* le *Frondicularie*, a queste le *Marginuline*, in cui l' impronta della voluta da una parte le avvicinava alle *Dentaline*, dall' altra alle *Planularie*.

Pochi anni trascorsero dopo il lavoro testè indicato, quando il Signor Felice Dujardins pubblicò nei medesimi annali delle scienze naturali il risultato delle sue osservazioni intorno ai foraminiferi, che chiamò Rizopodi, e provò che il luogo, e la fisiologica definizione data dal Signor d'Orbigny, e da quelli, che lo precedettero era affatto ideale, e doversi conseguentemente i Rizopodi sottrarre al dominio della malacologia, e collocare fra gli infusorj.

Provò infatti, che questi animali erano privi di forma, non avevano per la digestione, e riproduzione alcun organo speciale, e non possedevano per la nutrizione che la superficie tutta intiera della loro espansione glutinosa; che mancava ugualmente in essi il sistema della circolazione, quello de' nervi, e della respirazione, e che altro non offrivano, che piccole vesciche membranacee, e resistenti, munite d' una piccola gola donde escono i filamenti, che servono di piede. Nel loro interno, soggiunge, non scorgesi, che una sostanza glutinosa, dotata d' un flusso e riflusso, il che fa cangiar forma non solo al corpo, ma eziandio ai filamenti. Questi filamenti s' allungano, e stendonsi in diverse direzioni per cercare un punto d'appoggio: la forza per cui si distendono, è dovuta a diversi globicini fluidi che stanno dentro dei medesimi, i quali ritirandosi, fanno sì, che i filamenti diminuiscano di volume, e si contraggono. L' animale è interno, cioè è coperto da un integumento, o conchiglia, dalla cui apertura escono

i filamenti. Le precitate osservazioni fatte sugli animali delle *Polystomelle*, *Cristellarie* e *Nummuliti* posero in piena luce la natura de' Rizopodi, e delle *Difflugie*. Queste osservazioni ripetute davanti ai più eminenti naturalisti di Parigi non lasciarono più ombra di dubbio sul luogo da assegnarsi ai Rizopodi.

La singolarità di tali scoperte fu cagione di una ben più grave questione; perchè venendosi a stabilire, che i Rizopodi sono di semplicissima costruzione, e che perciò devono annoverarsi fra gl' infusorj, si venne a stabilire ancora, che gl'infusorj erano dotati d' un' imperfettissima organizzazione contro l' opinione del sig. Ehremberg di Berlino, e di alcuni altri, i quali li avevano ideati, e descritti come di organismo, che si avvicinava a quello degli animali vertebrati.

Affermava in fatti l' Accademico di Berlino, che gl' infusorj erano dotati dei principali sistemi d' organizzazione, lo che si riservò di provare nel suo gran lavoro sugli infusorj; ma, come notò il signor Dujardins, questo lavoro non escì corredato delle necessarie prove, e le asserzioni del Ehremberg contrarie alle antiche dottrine dello Schweiger, Oken, Bory de St. Vincent, Lamark, e Cuvier furono vittoriosamente combattute dal Peletier, e dal Dujardins in Francia, e dal Rymer, Jones davanti alla riunione britannica tenutasi a Newcastle recentissima dal sig. F. Meyer il quale difendendo la semplicità dell' organizzazione degli infusorj estese le cognizioni che si avevano sull' apparato ciliare interno dell' esofago e lo stomaco delle specie più grandi degli infusorj a membrana semplice (Annal. des Sciences naturelles T. 12.°)

Noi dunque riterremo per base dell'organizzazione vitale dei Rizopodi la dottrina del Signor Dujardins, e de' suoi seguaci, e le private opinioni saranno sempre all' esperienza seconde, perlocchè conchiudendo diremo, che la storia dei Rizopodi segnalò tre maniere diverse di classificarli, la prima come Cefalopodi propriamente detti, la seconda come intermedj fra i Cefalopodi, ed altri inferiori, la terza come appartenenti agli

infusorj. La mancanza del capo, e dei sistemi di circolazione nei Rizopodi separa questi dagli Acefali, come gli avvicina per altra parte agli Antozoi per la presenza d' un solo orifizio, e dei filamenti; la formazione del resto del testaceo ha evidentemente origine dalla traspirazione come in altri esseri.

Troviamo dei Rizopodi nel gruppo oolitico; ma più certa ne è la loro giacitura nei terreni cretacei, e sopracretacei, ed è di questi secondi che io mi propongo di quì annoverare le specie più ovvie.

Genus Nodosaria: LK.
Orbigny. Bronn:
Orthoceras auct. Gualt.
Soldani, Lamk.
Nautilus *Linn.* Reophagus *Montford.*

Testa polythalamia, elongata, recta, aut leviter arcuata, loculis imbricatis, apertura in apice producto posita, absque axe.

Il nome di *orthoceras* fu usato distintamente per un gruppo di specie dal Soldani nel suo Saggio. Susseguentemente lo vediamo da Linneo compreso nel suo genere nautilo. Il Lamarck nel primo suo lavoro sopra questi animali, e nella prima sezione dei Cefalopodi polythalamj stabilì i due generi d' *orthoceri*, e di *Nodosarie*: nel primo comprese le specie ornate esternamente di coste longitudinali, nel secondo le specie liscie. Come ben si avvisò il Signor Alcide d' Orbigny, era impropria una tale separazione; perchè tutto al più poteva aver luogo una suddivisione, la quale fu adottata dal prelodato Scrittore.

Il mare mediterraneo, e l' adriatico ci somministrano più di dodici specie di *orthoceras* nello stato vivente; in numero maggiore sono le specie trovate nello stato fossile.

Queste specie fossili come proprie dei terreni terziarj sono abbondantemente sparse nei terreni subapennini, molto più rare si trovano nei terreni terziarj di mezzo, o nel deposito *miocene* del sig. Lyell, e nei terreni inferiori non trovasene ancora vestigio.

Spec. N. 1 Nodos. Raphanistrum *Linn.*

Lederman. micros. t. 4. fig. X. poster.

Linn. et Gmelin syst. naturae p. 1163. *n.* 282.

Lamk. anim. sans vert. VII. pag. 594. *n.* 3.

Blainville. Dict. des scienc. nat. vol 36 *pag.* 486 *n.* 3.

Orbigny. Annales des sciences natur. vol. 7. *pag.* 253. nodosaira sulcata.

Abita l' Adriatico, il Mediterraneo: fossile nell' Astigiano, nel colle di Torino, presso Castel Arquato; nella Sicilia: a Leognan Bordeaux, e Dax in Francia.

Osserv. Due sono le cose da osservarsi riguardo a questa specie: cioè, che il Lamk. dice, che il sifone di essa è centrale, e regolare, mentre non vi esiste: l' altra, che il Signor Alcide d' Orbigny mutò senza plausibile motivo il nome di lei, invece di lasciarvi quello applicatovi dallo svedese naturalista.

Spec. N. 2. Nodos. Rapa *Lamk.*

Gualtieri index test. tav. 19. *fig. L. M.*

Plancus de conch. tav. 1. *fig.* 6. *G. h.*

Martini Conch. 1. *p.* 1. *vign.* 1. *fig. A. B.*

Soldani micr. 2. *tav.* 94 *fig. T.*

Montagu tav. 14. *fig.* 4. *pag.* 198. *n.* 15.

Lamk. anim. S. vert. m. s. et mem. accad.

Orbigny cit. loc. pag. 253. *n.* 27.

Abita l' Oceano Britannico, il Mediterraneo, e l'Adriatico; fossile nelle crete Sanesi.

Osserv. L' *Orth. rapa* figurato dal Martini, che ne copiò la figura dal Gualtieri, è raro sia nello stato fossile, come nello stato vivente: le sue concamerazioni non sono così prominenti come nella precedente specie, le suture ne risaltano meno, le coste longitudinali sono meno elevate. Esso è ottuso inferiormente, e superiormente alquanto conico.

Spec. N. 3. Nod: acicula *Lamk.* Tab. 1. fig. 1.

Testa recta, superne acuta, subaciculari striis longitudinalibus crebris, rectis.

Soldani Saggio. oritt. tav. 6. *fig.* 1.?

Lamk. anim. san vert. cit. vol. 7 pag. 252.

Abita il Mediterraneo;

fossile del Parmigiano, e dell' Astigiano

Lunghezza linee 4 3/4.

Osserv. Questa specie si allontana per la forma dalla testè mentovata; essa termina superiormente in una punta affilata, e nella parte inferiore ottusa, è aciculare alla sua metà.

Spec. N. 4. Nod: clava *mihi* Tab. 1. Fig. 4.

Testa conica, extremitatibus obtusis, loculis rotundatis, striis longitudinalibus praedita ad apicem usque perviis.

Soldani saggio tav. 5. fig. 40. X?

Abita . . . . fossile alla Coroncina e nel Parmigiano, e nell' Astigiano presso Montafia.

Osserv. Nel citato lavoro del Soldani trovo una specie, che per verità s' avvicina alla mia specie; ma nella figura del Soldani è rappresentata una specie colle concamerazioni piatte, allungate, colle strie longitudinali continue, nè aventi una depressione alle suture, come nella mia specie.

Spec. N. 5. Nodos. Ranzanj *mihi* Tab. 1. Fig. 3.

Orth. cylindrica, extremitatibus aegre sensim attenuatis; loculis rotundatis lamellis longitudinalibus praeditis, dimidiatim sutura profunda interrupta.

Soldani Saggio oritt. tav. 5 *fig.* 37. *let. O. pag.* 106.

Abita . . . . . . fossile alla Coroncina, e nell' Astigiano.

Osserv. Dedico questa specie all' eminente ornitologista italiano, che occupossi pure dello studio dei Cefalopodi con sifone.

Essa distinguesi per lo strangolamento singolare, che ha alla metà della conchiglia, e per la qualità delle concamerazioni, e delle lamelle longitudinali elevate, e per le due estremità quasi eguali cogli apici acuti.

Spec. N. 6 Nodos. elegans. Munster Tab. 1. Fig. 2.

Testa cylindracea, arcuatim revoluta, articulis rotundatis, distinctis, striis longitudinalibus rectis, minutis, non crenatis (*).

Abita . . . . . . fossile a Montafia, Cortansone ec. nel Piemonte. Potrebbesi dubitare, se questa specie convenga coll' *Orth. obliqua* di Lamk., *Nautil. obliquus* di Gmelin: a mio giudizio però non può sussistere una tale convenienza, principalmente se si ha riguardo alle strie longitudinali, le quali sono obblique nella specie Linneana, rette nella mia, dico rette, cioè che seguitano il natural corso delle concamerazioni, laddove nell' *orth. obliqua* sono divergenti fra loro in ogni articolo. Inoltre le granulazioni accennate nell'*orth. obliqua* mancano nella specie di cui tratto.

Spec. N. 7. Nodosa. intermittens. Roemer Neues jahrbuch von Leonharel und Bronn. 1838. pag. 382, N. 2 Tab. III, fig. 2.

Osserv. A motivo delle strie che occupano solamente le suture delle concamerazioni questa specie può dalle altre distinguersi.

Spec. N. 8. Nod. radicularis Munster.

Cit. jahrbuch ibid. Tab. III. Fig. 3.

Fossile nei terreni sopracretacei del Nord della Germania.

Oss. Questa specie essendo liscia e rivolta come la Nodos: intermittens a concamerazioni quasi rotonde vuolsi separare dalla Nodos: intermittens.

Gen. Vaginulina
Orbigny.

Testa producta, angulosa, revoluta depressa, vel trigona; loculis superimpositis, leviter obliquis. apice truncato.

Il genere Vaginulina indotto del sig. Alcide D' Orbigny, addottato da Bronn, da Roemer racchiude i Rizopodi a con-

---

(1) Munstervid Farbuek von Leonhard et Bronn. 1838 pag. 384, Tab. III. fig. 1. Pare che il sig. Hisinger nella sua *Lethaea succica* abbia rammentato una specie a questa prossima col nome di *Nod. sulcata*, ma le sue estremità l' allontanano dalla *Nod. elegans.*

chiglie in forma di *guaina* diritta conica, triangolare od appiatita: le concamerazioni sono sopraposte le une alle altre, ed oblique; ed alla sommità trovasi come troncato senza prolongamento. La direzione impertanto delle concamerazioni, la forma generale di questi testacei distinguonsi dal genere *nodosaria*, dal genere frondicnlina.

Questo genere frequente, e numeroso in specie allo stato vivente è molto raro allo stato fossile, ed i terreni terziari superiori sono i soli che fin' ora n' abbino somministrate.

Spec. n. 1. Vaginulina loevigata Roemer, mihi Tab. 1. Fig. II.

Jahrbuch cit. pag. 383. n. 2. abita . . . . . .

Fossile nel Nord della Germania.

Gen. Marginulina.

Orthoc. Lamb.

Testa cylindracea inaequilaterali apice depresso, loculis imbricatis obliquis: apertura in suprema ultimi anfracrus parte posita, basi spirali.

Questo genere fu introdotto dal Sig. Alcide d' Orbigny per un gruppo di specie, che offrono un cilindro rivolto alla sommità, avente nel principio l' impronta voluntatoria; le sue logge sono soppraposte, leggermente oblique, onde ne segue, che queste specie sono inequilatere; l' apertura é rotonda, ed è posta alla sommità d' un prolungamento dell' ultima concamerazione.

I primi autori, che porsero qualche schiarimento sopra i foraminiferi, li chiamarono nautili; e tale è il loro nome presso Linneo, Gmelin, e Martini; il Lamark li comprese nel suo genere orthoceras; ma questo genere non poteva egualmente abbracciare specie, che hanno concamerazioni così dissimili, con una direzione al principio della conchiglia, che in nulla conviene con quanto ci presentano altri orthoceras, e le nodosaire del Lamk.

Abbiamo cinque specie di marginuline nello stato fossile, e dieci nello stato vivente, proprie però del Adriatico giusta il sig. A. D'Orbigny.

Nel prezioso lavoro del Signor Boys, e Walker sui testacei microscopici delle Isole di Sandwick non troviamo, che altra specie appartenente a questo genere venga riferita al genere, che abbiamo mentovato superiormente.

Per ciò che spetta alla geologia esso è caratteristico dei terreni sopracretacei.

Spec. N. 1. Marginulina Ruaphanus *Linn.*

Linn., et Gmelin. Syst. nat. pag. 1161, *n.* 283, nautilus Raphanus.

Soldani micr. 2. *tav.* 94, *fig. N. P. O. Q. R. X. Y.*

Idem Saggio oritt. tav. 6. *fig. K.?*

Lamk. anim. vol. VII, p. 593, *n.* 1.

Blainville, malacol. pag. 379.

Idem Diction. des scienc. nat. vol. 36, *pag.* 486, *n.* 1.

Orbigny cit. loco pag. 258, *n.* 1.

Bronn italiens tertiar gebilde pag. 11.

Idem. Lethaea geogn. molassen periode.

Lyell Principes of Geology art. cephal.

Abita il mare Adriatico, fossile a Cartell'Arquato e altrove.

Osserv. Questa specie, che è frequente nei terreni sopracretacei del Parmigiano, Piacentino, ed altrove; non la riscontrai fin' ora in Piemonte. Le Marginuline non devono comprendere quelle specie, che sono bensì rivolte, ma offrono concamerazioni affatto analoghe a quelle delle nodosaire.

Spec. N. 2. Marginulina striata *Orb.*

Orbigny citat. loco pag. 258, *n.* 4.

Abita . . . . fossile a Dax.

Genus Textularia

Defrance. Orbigny.

Testa conico-cylindrica, loculis alternis, apertura laterali, semilunari, axe duplicato.

Il Signor Defrance propose questo nome alle specie, che hanno una conchiglia piramidale con sommità acuta, con base rotonda, ed esteriormente in cadauna parte con una linea angolosa, e sinuosa dalla sommità alla base, verso la quale cadono obbliquamente i solchi, che sono indizj delle concamerazioni, le quali dividono la conchiglia in diversi modi, e sono riunite sopra due ossi fittizj. L' apertura è laterale, o dalla parte interna di cadauna loggia, ed è semicircolare.

Si conoscono ventisette specie di questo genere, quattordici delle quali sono nello stato vivente, il doppio nello stato fossile nei terreni subapennini, ma in quest' ultime sono comprese ancora quelle specie, che hanno le analoghe viventi.

A spese di questo genere il Signor Alcide d' Orbigny ne formò pure un altro sotto il nome di *valvulina.* Sebbene esistano dei rapporti di rilievo tra le valvuline, e la testularie, tuttavia nelle prime vediamo una forma ovale, depressa ai due lati, l' apertura trovasi alla loro sommità in taglio, laddove nelle testularie non è alla sommità, ma alla base dell' ultima concamerazione, ed è semilunare.

Le testularie appartengono esclusivamente all' epoca terziaria, e quaternaria per servirmi d' una voce di alcuni geologi ; il Piacentino ce ne somministra il maggior numero. Quanto alle viventi l' Adriatico ne contiene più del Mediterraneo, e delle altre spiaggie.

Spec. N. 1 Textularia punctata *Orb.*

Orbigny citat. loco pag. 262. *n.* 1.

Defrance Dict. des scien. nat. vol 53. *pag.* 345.

Lyell princip. of. geology.

Bronn. Lethaea. molassen period. cap. 6.

Abita . . . fossile a Castell'Arquato nel Piacentino.

Spec. N. 2. Testularia consecta *Orb.*

Orbigny cit. loco pag. 262. *n.* 7.

Defrance dict. cit. pag. 345.

Bronn Lethaea molassen period. cap. 6.

Abita . . . . fossile a Bordeaux.

Spec. N. 3. Textularia cuneiformis *Orb.*

Orbigny cit. loco. pag. 263. *n.* 18.

Defrance cit. loco pag. 345.

Bronn Italiens tertiar-Gebilde pag. 11. *et s.*

idem Lethaea. molassen Gebilde cap. 6.

Abita . . . fossile a Castell' Arquato.

Spec. N. 4. Textularia sagittula *Soldani.*

Soldani microscop. tav. 133. *fig.* 260. (polymorphium sagittulum).

Blainville Malacol. pag. 370.

Orbigny cit. loco pag. 263. *n.* 20.

Defrance Dict. des scienc. nat. cit. loc.

Lyell Principes of. Geol.

Bronn Lethaea cit. cap. 6.

Osserv. La *Textularia sagittula*, così nominata per similitudine con una punta di dardo, ha circa dodici concamerazioni intrecciate fra loro, non così obblique come nella *Textularia aciculata* ma più ampie, e meno curve all' esteriore.

Abita nel mare Mediterraneo, fossile a Castell'Arquato, e nel Piemonte.

Spec. N. 5. Textularia compressa *Roemer cit.*

Jahrbuch pag. 384 *Tab. III. fig.* 13.

Abita . . . fossile nei terreni terziarj dell'Hannover.

Osserv. Il sig. Roemer citò col nome di *Textularia* una specie che io credo una semplice varietà di questa; la disposizione delle concamerazioni come della forma generale essendo analoga.

Pare che quella specie abbia alcun rapporto colla specie figurata alla Tav. 106 *fig.* 1 del sig. Deshages.

Spec. N. 6. Textularia gracilis *Munster.*

Munster Coll. Vid. Foran. Roemer cit. loc. pag. 38. *Tab. III. fig.* 14, 15.

Osserv. Anche per questa Specie che si trova colla precedente, credo che il sig. Roemer abbia indotta una separazione dalla sua Textularia subangularis che non si può rigorosamente difendere, sia per la comune obliquità del testaceo e delle concamerazioni, come perchè quest'ultima specie può considerarsi come un individuo in parte infracto della prima.

GEN. ROTALIA.
Lamk. Blainville.

Testa trochiformi, regulari, spira elata vel depressa, apertura oblonga in penultimo anfractu posita.

Questo genere stabilito dal Lamarck non comprendeva secondo il medesimo, che una specie, cioè la *Rotalites trochidiformis*, il qual nome dà a divedere, che il Lamk non conosceva questo genere nello stato vivente, sebbene dal lavoro di Boys, e di Walker chiaro apparisca esisterne specie viventi nelle isole di Sandwick. Il sig. d'Orbigny ne trovò nelle sabbie delle coste delle Antille, della Martinica, dell' isola di S. Elena, e altrove.

Le Rotalie sono proprie dei terreni sopracretacei, e dell' epoca geologica attuale.

Egli è singolare, che sopra trentaquattro specie conosciute, dieci solamente se ne sono trovate nello stato vivente, le altre sono fossili.

Le rotalie sono trochiformi, e regolari; la loro spira è rilevata, o depressa, l' apertura è formata da un intaglio nel penultimo giro della spira; la circonferenza generalmente è priva di appendici marginali, col disco marginale, o senza.

A buon diritto il sig. d'Orbigny riunì le *Discorbis* di Lamk colle rotalie, giacchè havvi fra questi due generi analogia nella forma, e nella direzione dell' apertura.

Spec. N. 1. Rotalia Trochidiformis *Lam.*

Lamk. anim. vol. 7. *pag.* 617. *n.* 1.

Idem Ann. du Mus. vol 5. pag. 184. et vol. 8. tav. 62. fig. 8. a. b.

Encyclop. tav. 466. fig. 8. a b.

Blainvilie Malacol. pag. 391.

Parkinson. Organ. remains tav. XI. fig. 2.

Defrance Diction. des scienc. nat. cit. vol. 46. pag. 303 n. 1.

Bronn. tavola 1. fig. 7. n. 12.

Idem Lethaea geogn. molassen gebilde.

Abita . . . fossile a Grignon, Hauteville dipartimento della Manica ec.

Osserv. Questa specie singolare per la sua forma simile a quella dei trochi ha qualche analogia superficiale dal lato inferiore coi planorbis; nell' interno possiede poche concamerazioni leggermente obblique.

Spec. N. 2. Rotalia Discoidea *Orbigny*.

Orbigny cit. loco. pag. 272. n. 5.

Abita . . . . . fossile a Bordeaux.

Osserv. Rimarchevole è questa specie per la sua forma a disco, essa è del resto molto affine alla *Rotalia trochus* del medesimo autore, che trovasi egualmente nelle vicinanze di Bordeaux.

Spec. N. 3. Rotalia Grateloupi *Orb.*

Orbigny cit. loco pag. 272. n. 10.

Abita . . . . . fossile nelle vicinanze di Dax.

Questa specie dedicata da un mio amico ad un' altra egualmente a me cara persona, che distinguesi tra i naturalisti coltivando con zelo la zoologia, e la geologia, è rimarchevole per la depressione del suo centro, e per la vicinanza delle concamerazioni.

Spec. N. 4. Rotalia Northamptonii *mihi.*

Testa trochiformi, anfractibus supernis planulatis, ultimo sepimentis coarctatis praedito, loculis tumidis rotundatis; apertura obliquata, disco conspicuo dilatato.

Abita . . . fossile frequente nel colle di Torino.

Osserv. Questa specie pare avere dei rapporti con la figura 64 tav. 3. di Boys, e colla *Rotalia trochidiformis* di Lamarck; ma nella prima non vedo quel disco, che è evidente ad occhio nudo nella mia specie, nella seconda i giri della spira sono più frequenti, le concamerazioni più rare, e al di sotto appianate.

La Rotalia di cui tratto è trochiforme, i suoi anfratti in numero di 3, di cui i superiori compariscono lisci, sebbene sieno concamerati; l' ultimo giro di spira ha le concamerazioni esteriormente molto compresse lateralmente, e nelle altre parti, cioè nella faccia superiore ed inferiore della conchiglia, sono rotonde, l'apertura è piccola, ed obbliqua, con un disco appianato, ed ampio di forma rotonda.

Dedico questa specie al Signor Marchese di Northampton che occupossi con zelo, e felice successo dello studio dei foraminiferi.

Spec. N. 5. Rotalia pisana. *Mihi.*

Testa trochiformi, anfractibus supernis minimis, ultimo amplissimo loculis rotundatis distinctis, apertura parva semilunari.

Abita . . . fossile presso Pisa.

Osserv. Percorrendo il precitato Saggio del Soldani trovai che le figure 20, e 21 della tavola II, e le figure 22, 23, e 26 della tavola III avevano qualche somiglianza con questa mia specie; però la prima specie del Soldani ha i giri di spira superiori regolarmente declivi, laddove nella mia l' ultimo giro forma quasi in totale la conchiglia, l' apertura innoltre della specie del Soldani è rotonda, non così nella mia. L'apertura medesima m'impedisce di riferire la specie, di che tratto alle figure 22, 23, 26 del medesimo scrittore, anzi l' ultima di queste figure e per l' ampiezza delle sue concamerazioni più che mai si scosta dalla *Rotalia pisana.* Nel disco poi troviamo una differenza assoluta fra la *Rotalia Northamptonii* e la *Rotalia pisana.*

Spec. N. 6 Rotalia subtortuosa. Roemer Tab. II. fig. 9.

Jahrbuch cit. loc. pag. 388 Tab. III. fig. 45.

Fossile ad Osnabruch. Cassel.

Spec. N. 7. Rotalia intermedia. id. Tab. II. fig. 10. Jahrbuch cit. ibid. Tab. III. Fig. 50.

Fossile nei luoghi sopraindicati.

Genus Operculina

D' Orbigny.

Testa libera, regulari, depressa: spira regulari utrinque patente: apertura in penultimo anfractu posita, longitudinali.

Il Signor Basterot nel pregevole suo lavoro sui fossili delle vicinanze di Bordeaux determinò per una *Lenticulites* la specie che trovasi in quel paese nei terreni sopracretacei intermedii.

Conosciamo poche specie di operculine nello stato vivente, e queste esotiche; ne abbiamo anche alcune nello stato fossile, ma come già mi proposi, quì non ne adduco che le principali

Spec. N. 1. Operculina complanata: *Mihi.*

Orbigny cit. loco pag. 281.

Bronn Lethaea geognostica molassen period.

Abita . . . . . . è fossile presso Bordeaux, Dax, nelle colline presso Torino, ed a Grantola presso Verona.

Osserv. Distinguesi questa specie per la curva semilunare che descrivono le sue concamerazioni per il piccolo spazio, che passa fra loro, e per la mancanza d' umbilico da ambe le parti.

Il Bonelli avvisò di vedere in questa specie una spirolina alla quale mancasse il prolungamento della spira; ma io non vi rinvenni mai questo prolungamento proprio delle spiroline, ed innoltre la condizione delle concamerazioni inferiori ligie ai primi giri di spira ci persuade, che questo prolungamento non esiste; gli individui poi, su i quali lavorò il Bonelli, mancano essi pure di tale prolungamento.

Viemmaggiormente provasi il mio asserto col riflettere, che nel Museo di Berlino la specie, di cui trattiamo, è posta nel genere operculina.

Spec. N. 2. Operculina granulosa. *Mihi.*

Operc. testa regulari, depressa, spira regulari extus utrinque punctis granulosis instructa, loculis arcuatis.

Abita . . . fossile nel colle di Torino.

Osserv. Questa specie differirce dalla precedente per le piccole granulazioni, di cui è guarnita la sua superficie esterna; ma conviene con essa per l'apertura, e per la natura delle concamerazioni.

Spec. N. 3. Operculina costata *Orb.*

Alcide d'Orbigny citat. loco pag. 281, *n.* 2.

Bronn tert. gebilde.

Id. Lethaea Geogn. cap. 6.

Abita . . . . fossile a Dax.

La prominenza delle membrane transversali nella superficie della conchiglia distingue l'*Operculina costata* dalle due specie poc'anzi menzionate.

Gen. Polystomella.

Lamk. Blainv. Orbigny.

Testa depressa, regulari, non umbilicata, apertura bifida triangulari.

Il sig. Lamarck sotto il nome di Polystomella comprendeva due generi, cioè le polistomelle propriamente dette, ed il genere *Robulina* del sig. d'Orbigny, il quale si distingue dalle polistomelle, perchè ha la sua apertura o marginale, o nell'angolo carenale di forma triangolare; esso innoltre non è così depresso come la polistomella; soventi però ha comune colla medesima un disco ombilicale.

Noveransi da otto a dieci specie di polistomelle, delle quali tre nello stato fossile, ed a queste ne aggiungo altre tre appartenenti come le prime agli strati sopracretacei.

La collina presso Torino, o per servirmi d'altra voce la serie miocenica vicina a questa capitale ce ne offre tre specie, e le fallure della Torrena ne somministrarono una sola al più abile osservatore dei foraminiferi di Francia.

Quantunque la base della classificazione di questo genere sia come quella degli altri un poco arbitraria, perchè a mala pena il suo animale si distingue dagli altri Rizopodi, tuttavia la forma della conchiglia ha dovuto influire sui filamenti della *difflugia*, non che sul organismo interno dell' animale, anche riguardo al movimento obbliquo, di cui servesi.

Spec. N. 1 Polystomella crispa *Linn.*

Linn. XII, pag. 1162. *Gmelin pag.* 3370, nautilus.

Schrotler Linleit. 1, *pag.* 10.

Schreibers Conch. Kenntn 1, *pag.* 3.

Fichtel et Moll pag. 40 *tav.* 4, *fig. d. e. f.*

Maten et Racket, Linn. trans. VIII, p. 115.

Lamk anim. sans vert. VII, p. 625 (polystomella)

Blainville Malacol. pag. 375 (vorticialis)

Orbigny cit. loco pag. 283.

Bronn Lethaea cit. loc. cap. 6 *et alii.*

Abita il mare Mediterraneo, l'Adriatico, l'Oceano Britannico, fossile nella Toscana. (1)

Osserv. La *Polyst. crispa* è una delle specie più sparse, che conosciamo, frequenti granulazioni ne rivestono la superficie, e le sue concamerazioni gradatamente maggiori sono separate da membrane poco obblique, e simili, il suo dorso è carinato, l' orificio lineare ed angusto è situato nel margine interno della sua conchiglia.

Spec. N. 2. Polystomella Savii, *Mihi.*

Testa orbiculari superne concava, inferne planiuscula, margine acuto, apertura triangulari, disco rotundato, loculis frequentibus, sepimentis obliquis.

Fossile frequente nel Colle di Torino.

---

(1) Bulletin de la Societé Geolog. de Franc. Tom. XI, pag. 77.

Osserv. Questa specie è orbicolare, superiormente è convessa con disco elevato, e rotondo, nella parte inferiore è piuttosto piana. La sua circonferenza è molto affilata, l'apertura nella parte superiore è triangolare, le sue concamerazioni sono frequenti, e le membrane di separazione divergenti, ed oblique.

Dedico questa specie al dotto Professore di storia naturale dell' Università di Pisa promotore dell' annua riunione dei naturalisti italiani, la quale promette grandi vantaggi al progresso delle scienze nella Penisola.

Spec. N. 3. Polystomella rotula. *Mihi* Tab. II. fig. 8.

Polyst. inferne depressa, superne tumida, marginibus rotundatis, loculis latis, sepimentis leviter obliquatis, apertura ovata.

Abita . . . . fossile frequente nel colle di Torino.

Osserv. Questa specie è superiormente convessa, inferiormente piana, il suo margine è rotondo a differenza di quello della *Polystomella crispa*, e *Polyst. Savii*, le sue concamerazioni: sono frequenti, ai lati appena obbliquamente rivolte, la sua apertura è quasi rotonda, nè scorgesi indizio di un disco ombilicale.

Spec. N. 4. Polystomella laevigata. *Mihi* Tab. II. fig. 7.

Polyst. orbiculari, marginibus, acutis, inferne, superneque convexa, sepimentis raris, apertura oblonga, depressa.

Abita . . . fossile nei colli vicini a Torino.

Osserv. Questa specie è da ambe le faccie egualmente convessa, la sua circonferenza è molto sottile, la sua apertura è ovale bislunga. Egli è evidente, che questa specie per mancanza di granulazioni, e per il numero molto minore di concamerazioni differisce dalla *Polyst. crispa.* L' apertura la rende pure diversa dalla *Polyst. Savii.*

Gen. Spirolina.

Lam. Blainv. Orbigny.

Testa depressa spirali, inferne recte elata, basi aperta, apertura oblonga.

Le *Spiroline* più comunemente conosciute col nome di spiroliniti a motivo dello stato fossile in cui trovansi, hanno ciò di singolare, che spirali da principio terminano col crescere del testaceo in un tubo cilindrico, dritto, disgiunto. L'adito all' interno è unico negli individui adulti, e ne esistono diversi negli individui giovani.

Il signor Gedeone Mantell nel primo volume del suo lavoro intitolato, *Meraviglie della geologia*, reca una nota del Marchese di Northampton, nella quale sono enumerate alcune specie di Spiroline dei terreni cretacei d' Inghilterra nella Contea di Sussex; egli è però singolare che tanto Gedeone Mantell, come il Marchese Northampton abbiano ravvisato un sifone in questo genere, che n' è privo, come pure, che abbiano avvicinato le Spiroline alle Spirule, non agli infusorii, assegnando alle medesime un posto fra i Cefalopodi.

Risulta dalle osservazioni, che il genere, di cui trattiamo, cominciò ad apparire nell' epoca cretacea, visse nell' epoca subapennina, e nell' epoca odierna ne incontriamo ancora alcune poche specie principalmente nella zona torrida.

Spec. N. 1. Spirolina cylindracea *Lam.*
Encyclop. met. tab. 465, *fig.* 7.
Lam. Anim. san. vert. VII, pag. 603, *n.* 2.
Parkinson organic. rem. tab. XI, fig. 9.
Blainville Malacolog. pag. 382 (Spirula).
Bronn Syst. conch. tab. 1. *fig.* 15. *a*
Dict. des sciences natur. tom. 50, *pag.* 298.
Orbigny Cephalop. pag. 120.
Deshayes. Coquille T. 15, *Vol. II.*
Bronn Lethaea geogn. cap. 6.

Abita . . . . fossile a Grignon, Hauteville ec.

Spec. N. 2. Spirolina depressa *Lamk.*

Lamk. anim. s. v. Vol. VII, pag. 602, *n.* 1. Spirolinites.

Id. ann. du Mus. vol. 5. *pag.* 245.

Parkinson organic rem. tab. XI, fig. 8.

Diction. des scienc. nat. vol. 50, *pag.* 298, *n.* 1.

Ib. atlas. tab. 13, *fig.* 2.

Bronn Lethaea cit. cap. 6.

Abita . . . fossile a Grignon presso Parigi.

Osserv. Il signor Alcide d'Orbigny segnalò ancora diverse altre specie di spiroliniti fossili presso Parigi; ma siccome non indicò la natura delle stratificazioni, dalle quali le ricavò, così io non indicai che quelle dei terreni sopracretacei delle vicinanze di quella Capitale.

Gen. Robulina *Orbigny.*

Nautilus *Fichtel, et Moll.*

Polystomella, Lenticulina *Blainv.*

Testa utrinque convexa; disco centrali; apertura marginali, triangulari.

Egli è singolare quanto osservasi in questo genere; cioè havvi un piano orizzontale, il quale è coperto nelle due faccie da due altre lamette convesse, che formano nel loro mezzo un disco; la membrana di mezzo è guarnita di piccole coste, che esteriormente sembrano concamerazioni, le quali dividono il testaceo. L' apertura è angolosa da ambe le parti.

Non è adunque per i soli motivi, che addusse il signor d'Orbigny, che questo genere si deve separare dalle *Polistomelle*, ma eziandio per i caratteri, che ora abbiamo accennati.

Noveransi più di 25 specie di Robuline, 18 delle quali conosconsi nello stato vivente, le altre sono nello stato fossile, ve ne hanno inoltre alcune comuni all' età sopracretacea, come all' istorica.

Spec. N. 1. Robulina cultrata *Montfort.*

Linn. et Gmelin. nautilus calcar.

Schreibers Conch. Kemnitz. 1, *pag.* 2.

Schröter Einleit. 1, *pag.* 9, *XI.*

Soldani micr. 1, *pag.* 54, *tav.* 33, *fig. B.*

Fichtel, et Moll tav. 11, *fig. d. e. f.*

Idem tab. 12, *fig. d. e. f.*

Idem tav. 13, *fig. e. f. g.*

Montfort conch. pag. 214 (Robulus cultratus)

Razoumovsky observ. sur les envir. de Vienne en Autriche tab. 1. *fig.* 1, 2.

Blainville Malacol. pag. 390.

Orbigny cit. loc. pag. 287, *n.* 1.

Bronn Lethaea cit. cap. 6.

Bulletin de la Societè Geolog. de T. France XI, pag. 76.

Abita il mare Adriatico, fossile presso Vienna in Austria, nel Parmigiano, nell'Astigiano, nella montagna di Torino presso Superga.

Osserv. Questa specie rimarchevole per la dimensione del suo disco, per la leggera curvatura delle sue concamerazioni, e per il suo margine nella circonferenza, è molto comune nel mare Adriatico, ed è frequente nello stato fossile nell'Astigiano, più rara nel Parmigiano, nel colle di Torino, e nelle vicinanze di Vienna.

Il sig. Alcide d'Orbigny addusse a questa specie le figure g. *h.* della tavola duodecima di Fichtel, e Moll, che non vi hanno che fare. Il sig. Verneuil cita questo fossile come proprio.

Spec. N. 2. Robulina depressa *Mihi.*

Testa orbiculari, superne depressa, disco prominulo, margine integro.

Abita . . . fossile nella marna dei colli vicini a Torino.

Osserv. Questa specie è piana, il suo disco ombilicale però s' eleva distintamente, il suo margine non è interrotto, e le sue concamerazioni sono più frequenti di quelle della *Robulina cultrata.*

Spec. N. 3. Robulina Cummingii *Mihi*. Tab. II, n. 4.

Robulina utrinque convexa, disco minuto prominulo, margine interrupto.

Fichtel, et Moll pag. 77, nautilus calcar. variet. K. *tab.* 13, *fig. c. d.*

Osserv. La *Robulina Cummingii* è convessa alle due faccie, il suo disco ombilicale è piccolo, ma prominente, il suo margine è interrotto, le sue concamerazioni sono frequenti.

In forza del disco, e del margine questa specie differisce dalla *Robulina cultrata*, e per la sua forma diversifica dalla *Robulina depressa*, e da varie altre specie.

Le figure di Fichtel, e Moll convengono in generale colla mia specie, ma gli autori tedeschi dimenticarono di indicare il numero reale delle concamerazioni.

Dedico questa specie all' infaticabile viaggiatore naturalista inglese dei nostri giorni, che arrichì di tante scoperte le varie parti della Zoologia.

La specie, di cui trattasi, è vivente nel Mediterraneo, e trovasi fossile nel colle di Torino.

Spec. N. 4. Robulina Calcar. *Linn.* Tab. II. n. 6.

Linn. et Gmelin syst. (nautilus)

Schreibers Conch. Kennt. 1, *pag.* 2, 11.

Schrötter Einleit. 1, *pag.* 9, 11.

Fichtel, et Moll testacea micros. tab. 11, *fig. g. h. i. k. pag.* 73.

Blainville Malacol. pag. 390 (lenticulina)

Orbigny cit. loco pag. 289, *n.* 12.

Bronn Lethaea cit. cap. 6.

Abita il mare Mediterraneo, e l'Adriatico presso Rimini, fossile presso Siena.

Gen. Cristallaria
Lamark, Defrance, Orbigny.

Testa depressa, inferne elata, margine gracilescente, apertura rotundata.

Le *cristellarie* convengono colle *operculine* riguardo alla forma generale, ma differiscono per la loro apertura rotonda; esse innoltre sono guarnite d' un margine nella circonferenza affilato, e diafano. Le loro concamerazioni sono numerose, e curve.

Il sig. Blainville nel suo trattato di malacologia separò in tre questo genere coi nomi di *Linthuria*, *Oreas*, e *Saracenaria*, dei quali i due primi distinguonsi unicamente per il margine; la *Saracenaria* però per la sua forma generale, e per le sue concamerazioni pare potersi ritenere.

Antica è la conoscenza di questo genere; esso appare nelle opere del Gualtieri, e del Lederman, e fu poscia riprodotto da quasi tutti gli scrittori dei foraminiferi.

Se ne conoscono varie specie nello stato vivente, ed un numero maggiore nello stato fossile.

Spec. N. 1. Cristellaria Cassis *Fichtel et Moll.*
Plancus de conch. I. IV.
Linn., et Gmelin system. naturae (nautilus calcar.)
Fichtel et Moll pag. 95, *tab.* 17, *et tab.* 18 *fig. a. b. c. d. e. f.*
Lamk anim. sans. vertebr. vol. VII, pag. 607, *n.* 2 (Cristell. papillosa).
Idem Encyclop. pag. 467, *fig.* 3. *a. b. c. d.*
Parkinson Organic. remains. vol. 2, *tab.* 11, *fig.* 30.
Blainville Malacolog. pag. 384.
Orbigny cit. loco pag. 290, *n.* 3.
Abita il mare Adriatico, fossile a Castell'Arquato, nella Toscana, nell'Astigiano.

Spec. N. 2. Cristellaria Galea, *Fichtel et Moll.*
Fichtel et Moll pag. 10, *tab.* 18, *fig. d. e. f.* (nautilus)

Lamk Encyclop. meth. tab. 467, *fig.* 6 (Crist. Galea).

Idem anim. sans vert. vol. VII, pag. 608, *n.* 3 (Cristellaria Laev.)

Orbigny cit. loco pag. 291, *n.* 6.

Abita . . . fossile alla Coroncina nella Toscana.

Osserv. C' insegnano Fichtel, e Moll, che questa specie e piana, leggera nella sua circonferenza, è munita d' un margine dilatato, i suoi *istmi*, o concamerazioni sono convesse, mediocremente curvate, le cui pareti sono in parte visibili al di fuori, il piano orale è leggermente carinato, il margine è granuloso.

Spec. N. 3. Cristell. italica *Defr.* (Saracenaria).

Soldani 1, *pag.* 62, *tav.* 53, *fig. A. B.*

Defrance Diction. des scienc. nat. tav. XIII, fig. 6.

Blainville Malacol, pag. 370.

Orbigny modèles 1. *liv. n.* 19.

Idem cit. loc. pag. 293, *n.* 26.

Abita il mare Adriatico, fossile nelle vicinanze di Siena.

Spec. N. 4. Cristellaria Osnabrugensis, *Roemer.*

Neves Jahrbuch for mineralogie, geognos. ec. 1838 *pag.* 391, *tab. III, fig.* 62.

Nobis tab. III, fig. 8.

Abita . . . fossile ad Osnabrük.

Questa specie in via delle sue concamerazioni rivolte, ed eguali non che della forma rotonda che possiede distinguesi dalle altre.

Spec. N. 5- Cristell. Propinque.

Idem Cit. loc. pag. 391, *tab. III, fig.* 63.

Abita . . . fossile ibid.

Nobis tab. III, fig. 9.

La forma di stella che danno le concamerazioni, di questa specie riguardo al loro centro la distingue dalle già indicate. Io non sono d' avviso che la *Cristellaria Subcostata* del sig. Roemer possa costituire una specie particolare, giacchè la credo piuttosto una varietà della *Cristellaria Osnabrungensis* del medesimo Autore.

Gen. Nummulina *Orbigny.*

Nummularia Sowerby, Nummulites auct.

Breyn. De Saussure. Lamk.

Testa lenticulari, depressa, versus marginem attenuata, spira interna, discoidea multiloculari, tabulis plurimis obtecta, anfractuum pariete producto, apertura evanida.

Nella storia già tracciata dei foraminiferi vedemmo, che gli antichi autori ebbero principalmente in vista questo genere: i monumenti in fatti che esistono sia nella Tebaide, come nel Regno del Sennaar (1) sono in parte tratti da rocche calcari di transizione, nelle quali senza dubbio è indizio dei nummuliti (2). Linneo le chiamò *porpiti* e Born *nautili lenticolari.*

Nel *Muschelkalk* dei tedeschi, o *gres rouge* dei francesi troviamo già delle *nummuliti*, o come tali le ebbe il Prussiano Alberti; esse continuarono a mostrarsi fino all'epoca odierna con maggior, o minor frequenza; la loro quantità a gruppi, come vedesi vicino a Verona, nella Svizzera, e nella Tebaide prova al certo l'opinione del sig. Dujardins, essere tali animali di forma molto analoga, nutrirsi di alimenti proprj di qualche località marina, ed amare la quiete, come anche prova l'immensa fecondazione di cui sono capaci.

Breynio spiegò il primo la struttura delle Nummuliti, De Saussure amplificò la descrizione di Breynio, e diede il metodo di dividerli, Lamk infine li riunì in un genere.

Il sig. W. Burkland nel suo lavoro sulla Teologia naturale continua a ravvisarle come appartenenti ai Cefalopodi e ci avvisa che le concamerazioni delle nummuliti sono destinate all'uso medesimo di questi ammoniti.

---

(1) Cailliaud Voyage à l'oasis de Thebes, et dans les deserts. Idem. Voyage a Méroé, et au fleuve Blanc au delà de fazogl. ec.

(2) Memorie della R. Accad. delle scienze di Torino part. archeol. vol. del 1824.

Le specie seguenti sono proprie dei terreni sopracretacei.

Spec. N. 1. Nummulites laevigata, *Lamk.*

Fichtel et Moll t. 6, fig. a-h 7, fig. c. d. e. f.

Lamk anim. sans vertebr. VII, pag. 629.

Idem Ann. du Mus. vol. V, pag. 241, *n.* 1.

Blainville malacol. pag. 372.

Sowerby, M. C. tab. 538 *fig.* 1.

Mantell, Geol. trans. B. III, 203.

Munster in Keferstein T. Deutschl. VI.

Studer, Jahrb. 1836, *pag.* 335

Brongniart, Vicentin. pag. 51.

Orbigny cit. loc. pag. 295, *n.* 1.

Bronn Lethaea cit. cap. 4.

Fortis mèmoir. vol. 2, *tav. III, fig.* 9.

Abita . . . fossile a Claudiopoli, nella Transilvania; vicino a Verona, ed in Francia.

Spec. N. 2. Nummulites Fichteli, *Mihi.*

Testa depressa, utrinque laevigata, circulari, marginibus convexis.

Questa specie è fossile nella collina di Torino.

La *Nummulites Fichteli* è depressa, affatto circolare come la *Nummulites laevigata*; l'età vi hà fatto scomparire le traccie delle concamerazioni, e dell' apertura.

Dedicai questa specie ad un eminente illustratore dei Rizopodi fossili delle vicinanze di Vienna in Austria.

Spec. N. 3. Nummulitesi irregularis, *Mihi.*

Testa subglobosa, margine irregulari; superficie punctis sparsis, frequentibus exarata.

Lamk, ann. du Mus. VIII (numm. rotulata).

Fortis, Memoir. vol. 2, *tav. III, fig.* 5?

Parkinson, Organ. rem. tab. XI, fig. 4.

Egli è certo, che Lamk comprese nella sua *Nummulite rotulata* diverse specie, ed io ho fondato motivo di credere, che la presente della collina di Torino sia in questo numero La *Nummulites irregularis* ha il margine non regolare ed è

superiormente, ed inferiormente adorna di gran numero di piccoli punti prominenti; la sua forma è convessa dai due lati.

Spec. N. 4. Nummulites marginata, *Mihi* Tab. III. n. 4.

Testa orbiculari, in medio producta, punctisque signata, margine laevigato, planulato.

Abita . . . fossile nel colle di Torino.

Questa specie è piana verso il margine, e prominente nel centro; questa prominenza è segnata da buon numero di granulazioni.

Potrebbesi dubitare, se il Fortis nella tavola prima figura V abbia voluto esprimere una specie analoga a questa; ma l' imperfezione della figura, e la mancanza della definizione non mi permettono d' instituire alcun confronto fra la mia specie, e quella del Fortis.

Il *nautilus mammilla* dei signori Fichtel e Moll distinguesi da questa specie, perchè è conico, ed è più ampio, come anche per il suo margine diverso.

La specie descritta da Lamk col nome di Nummulites scabra, parmi allontanarsi da questa specie in via della forma generale, e della disposizione delle granulazioni.

Spec. N. 5. Nummulina globulina, *Mihi* Tab. III, n. 6.

Testa rotunda, superficie obscure granulosa.

Abita . . . fossile nella collina di Torino.

La forma di questa specie, che è rotonda, e con oscuri indizi di granulazioni, la distingue dalle altre già indicate.

Genus Biloculina

Orbigny. Bronn.

Testa loculis circa communem axim dispositis, duobus perspicuis connexis, oppositis.

Singolare è il genere non solo, ma il gruppo in intiero, in cui s' annoverano le *biloculine, spiroculine, triloculine, articuline, quinqueloculine, adelosine*, conciossiachè le loggie si aggirano attorno ad un solo asse comune, e queste prese in-

sieme formano la lunghezza totale del testaceo, quindi l'apertura trovasi nell' una, e nell' altra estremità. In particolare poi nelle biloculine sono due le più apparenti, e fra loro opposte sopra un solo, e medesimo piano.

Gli antichi compresero le *biloculine* nel nome delle *milioliti*, o *frumentarie*. Si conoscono delle *biloculine* viventi, come pure delle fossili dei terreni sopracretacei medj, e superiori.

Spec. N. 1. Biloculina ovula. *Soldani.*
Plancus de conch. tab. II, fig. 4.
Soldani test. 3, *pag.* 228, *tab.* 153, *fig. R. S.*
Orbigny cit. loco pag. 297. (biloc. Bulloides.)
Bronn Lethaea cit. loc. cap. 4 *molass.*

Abita il mare Adriatico presso Rimini; fossile nelle vicinanze di Parigi, Bordeaux ec.

Osserv. Questa specie è gonfia, quasi rotonda; la sua apertura è quasi orbicolare.

Spec. N. 2. Biloculina depressa, *Orb.*
Soldani test. 3, *p.* 231, *tab.* 156, *fig. yy. zz.*
Orbigny cit. loco pag. 298.

Spec. N. 3. Biloculina ringens. *Lamk.*
Lam. Anim. VII, pag. 612 (miliolites).
Idem Ann. du Mus. vol. 5. *pag.* 351.
Parkinson organic. rem. tab. XI, fig. 11.
Orbigny cit. loc. pag. 297, *n.* 2.

Abita . . . fossile presso Valognes, e Parigi.

Spec. N. 4. Biloculina complanata *Mihi.* Tab. III, n. 2.
Testa depressa, marginibus rotundata, apertura orbiculari.

Abita . . . fossile a Villavernia nel Torinese.

Osserv. Questa specie differisce dalla *depressa* per il suo piano, e per le due concamerazioni esteriormente rotonde.

Il sig. Roemer nel suo prezioso lavoro sui foraminiferi dei terreni sopracretacei dell' Hannover non ci donò alcuna specie appartenente a questo genere trovato nel Nord della Germania. Enumerò bensì delle *triloculine* che se le avvicinano.

Gen. Triloculina.

Orbigny. Bronn.

Testa loculis tribus, oppositis, conspicuis.

Nelle *Triloculine*, come lo indica il nome, trovansi tre loggie opposte, esse scorgonsi in qualunque età della conchiglia.

Il primo ad avvedersi in qualche modo delle *triloculine*, fu il sig. Lamarck, il quale nel suo trattato di Malacologia pose il nome di *miliola trigonula* alla prima specie indicata dal sig. Alcide d'Orbigny. Possediamo non poche specie di *triloculine*, delle quali la metà è conosciuta nello stato vivente; a quelle però, che descrisse il signor A. d'Orbigny, il signor Des Hayes ne aggiunse altre nel suo lavoro sulle conchiglie fossili delle vicinanze di Parigi.

Spec. N. 1. Triloculina trigonula *Lamk.*

Encycloped. meth. tav. 469, *fig.* 2.

Lamk, anim. sans vertebr. vol. VII, pag. 612.

Parkinson, tab. 11, *fig.* 17 *a* 19.

Blainville, malacol. p. 369.

Orbigny cit. loco pag. 299, *n.* 1.

Bronn, Lethaea cit. loc. 4. *cap.*

Abita . . . fossile nelle vicinanze di Parigi, di Soissons ec.

Spec. N. 2. Triloculina inflata *Orbigny.* Foraminif. Roemer loc. cit. p. 393. *Mihi* tab. III. fig.

Abita . . . fossile in Francia, e nel Nord della Germania.

Spec. N. 3. Triloculina oblonga *Montagu.*

Montagu Test. brit. pag. 522.

Flemming, Mem. of the Wern. Society IV, part. II p. 565, *tab. XV, fig.* 4.

Orbigny cit. loco pag. 300, *n.* 16.

Roemer cit. loco pag. 293.

Abita l'Oceano britannico, ed il mare Mediterraneo, e l'Adriatico. È fossile presso Bordeaux, Castell'Arquato, e altrove.

Spec. N. 4. Triloculina rostrata *Mihi.*

Testa elongata, utrinque attenuata, carinis tribus in medio convexis.

Abita . . . fossile nel colle di Torino.

Osserv. Potrebbesi dubitare, se questa specie sia analoga alla precedente, ma la convessità di mezzo, la forma generale e le carine delle tre concamerazioni la distinguono sufficientemente.

Spec. N. 5. Triloculina carinata *Mihi.*

Testa inferne depressa, superne trigona, extremitatibus obtuse productis, loculis carinatis.

Abita . . . fossile a Villavernia nel Tortonese.

Osserv. Questa specie da un lato è depressa, piana, dall' altro è triangolare: le sue estremità sono poco prominenti, i lati esterni di cadauna concamerazione sono carinati.

Spec. N. 6. Triloculina inflata. *Orbigny.*

Foraminif. cit. loco.

Roemer peus jahrbuch von Leonhard et Bronn. 393, *n.* 3.

Nobis tab. III, fig. 11.

Abita . . . fossile nella Francia, e nel Nord della Germania.

Quì pongo fine ai cenni storici sui Rizopodi, ed alla enumerazione di alcune specie più caratteristiche dei terreni sopracretacei. Sia l'uno, come l'altro di questi due argomenti avrebbe meritato un più degno Scrittore, ma io spero, che l'avere tracciata la strada per più ampie ricerche, potrà in qualche modo meritarmi l'indulgenza dei Naturalisti, ai quali offro questo lavoro, come un saggio del vivo desiderio, che nutro, di contribuire ai progressi delle naturali discipline. (1)

---

(1) Unisco quì i disegni delle specie inedite, o poco conosciute. Ritengasi, che queste figure servono solamente per dare un' idea generale di cadauna specie, per i cui particolari si dovrà ricorrere alle rispettive descrizioni.

Spiegazione delle Tavole.

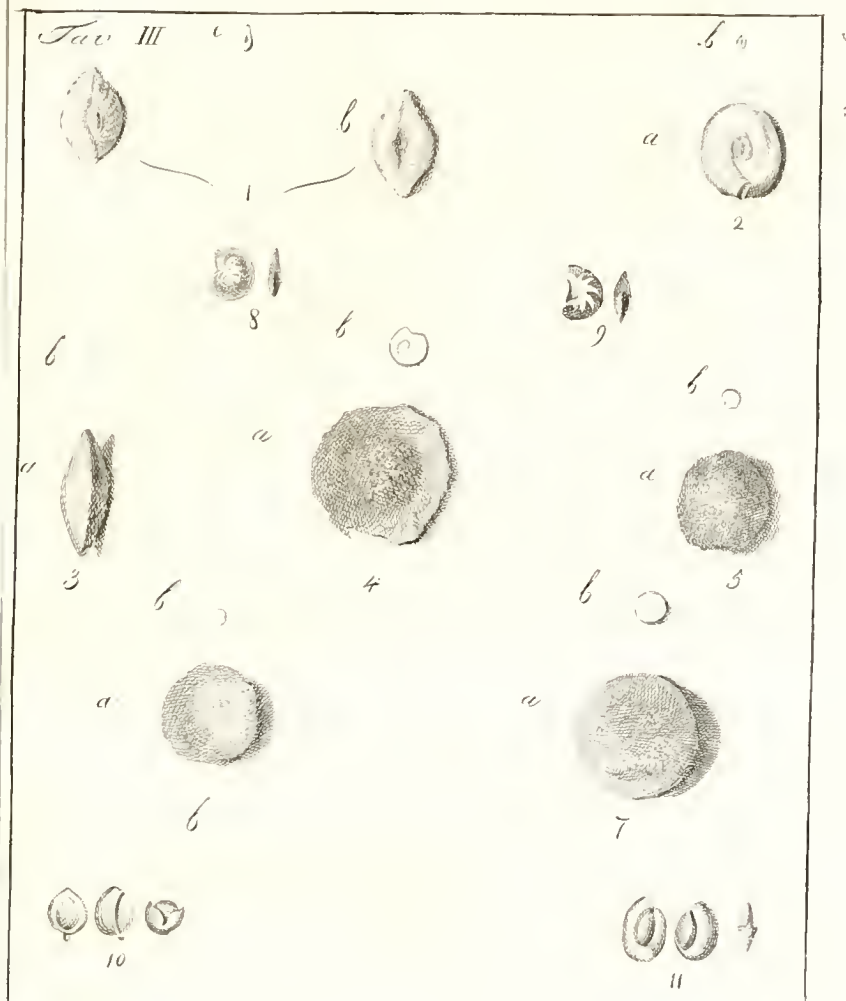
Tavola I.

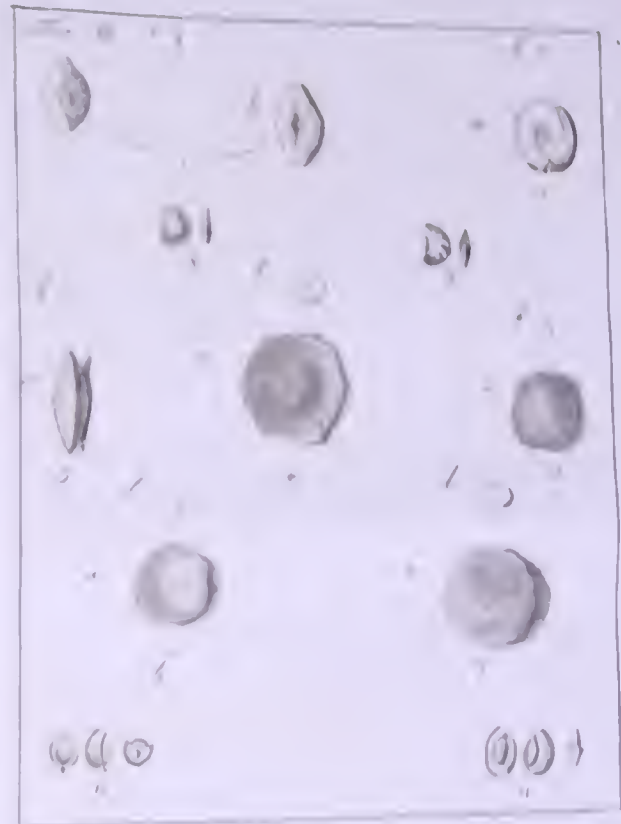
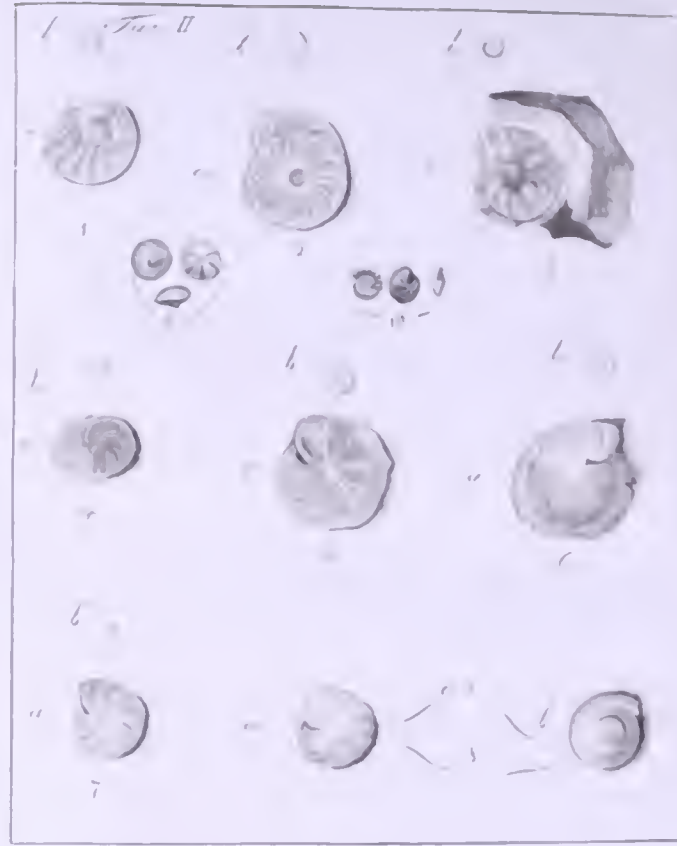
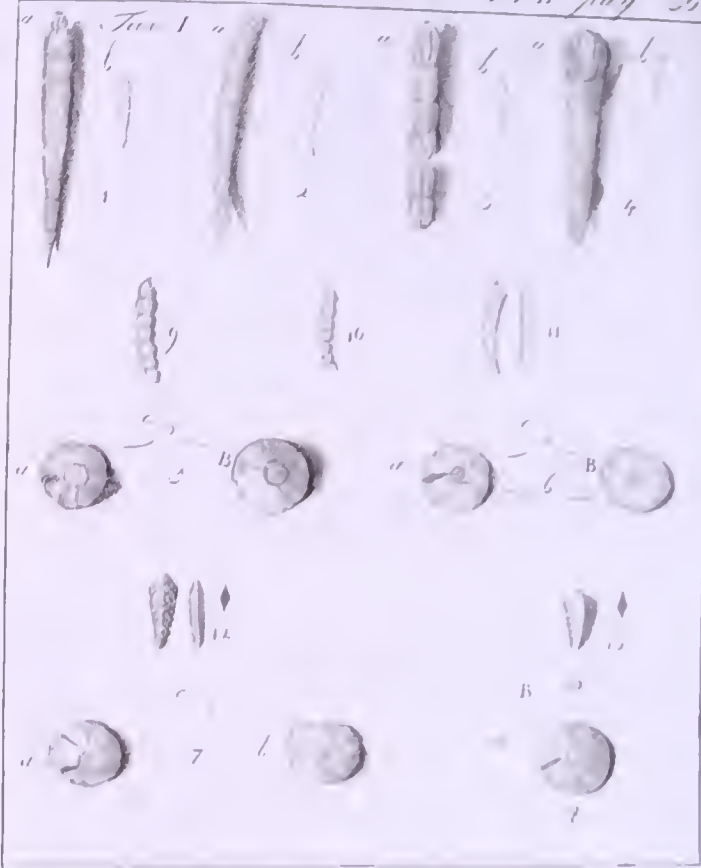
N.° 1. Nodos: Acicula, *b* grandezza naturale.
2. *a* Nodos: Elegans, *b* grand. natur.
3. Nodos: Ranzanii, *b* grand. natur.
4. *a* Nodos: clava, *b* grand. natur.
5. Rotalia Pisana, *a* parte inferiore, *b* parte superiore, *c* grand. natur.
6. Rotalia Northamptonii, *a* parte inferiore, *b* parte superiore, *c* grand. natur.
7. Polystomella Savii, *c* grand. natur.
8. Polystomella crispa, *b* grand. natur.
9. Nod. intermittens.
10. Nod. radicularis.
11. Vaginula laevigata.
12. Textularia compressa.
13. Textularia gracilis.

Tavola II.

N.° 1. Operculina complanata, *b* grand. natur.
2. Opercul. granulosa, *b* grand. natur.
3. Robulina depressa, *b* grand. natur.
4. Robulina Cummingii, *b* grand. natur.
5. Robulina cultrata, *b* grand. natur.
6. Robulina calc. *b* grand. natur.
7. Polystomella laevigata, *b* grand. natur.
8. *a*. *b*. Polystomella rotula.
9. Rotalia subtortuosa.
10. Rotalia intermedia.

TAVOLA III.

N.° 1. Triloculina carinata *vista ne' suoi varj aspetti c* grand. natur.
2. Biloculina complanata, *b* grand. natur.
3. Triloculina rostrata, *b* grand. natur.
4. Nummulina marginata, *b* grand. natur.
5. Nummulina irregularis, *b* grand. natur.
6. Nummulina globulina, *b* grand. natur.
7. Numm. Fichtel, *b* grand. natur.
8. Crista Osnabrugensis.
9. Crista propinqua.
10. Triloculina trigonula.
11. Triloculina inflata.

da tutti gli stabilimenti scientifici dell Europa scuoprirono

Tav. I

ESPOSIZIONE COMPENDIATA DE' VARJ SISTEMI INTORNO LE VELOCITÀ DELLE ACQUE CORRENTI, E PARTICOLARE CONFRONTO DELLE FORMOLE DEGLI IDRAULICI EYTELWEIN E TADINI

OPERA

DEL PROF. CAV. ANTONIO COCCONCELLI

PRESENTATA DAL SOCIO

SIG. CAV. PROF. GIACOMO TOMMASINI

ED APPROVATA DAL SOCIO E SEGRETARIO

ANTONIO LOMBARDI

Ricevuta il 12 febbrajo 1840.

1.° La certezza, l'estensione, e l'accrescimento d'ogni scienza naturale si ottenne allora quando dissipate le oscurità si sbandirono i falsi principj, s' interrogò la natura, e se ne seppero intendere senza equivoco le risposte.

2.° Giulio Frontino vide al tempo dell'Impero di Nerva, e di Trajano la quantità dell'acqua somministrata da un foro praticato nelle pareti di un vaso essere maggiore, o minore, secondo che maggiore, o minore era l' altezza dell' acqua in esso contenuta, ma non seppe da così semplice osservazione argomentare come pure lo poteva, l' influsso della pressione nella produzione della varia velocità, e conchiudere che nella misura delle acque correnti devesi avere riguardo non solamente alla larghezza, ed altezza delle sezioni, cioè alla loro superficie, ma eziandio alla velocità del moto, da cui le acque sono animate all' escire da qualsisia recipiente, e ne' fiumi, da quali sono esse dispensate.

3.° Il Galileo, il Castelli, il Guglielmini, gl' Idrometri Italiani ed Oltremontani mercè le moltiplici esperienze istituite da tutti gli stabilimenti scientifici dell' Europa scuoprirono

l' errore ed insegnarono che la quantità d' acqua scaricata segue la composta ragione della larghezza, dell' altezza, e della velocità delle vive sezioni, talchè la copia dell' acqua in un fiume ridotto allo stato di permanenza risulta sempre la stessa in tutte le sezioni medesime, comunque difformi, e fornite di varia larghezza e profondità, giacchè non da queste sole dimensioni essa copia dipende, ma eziandio devesi introdurre nel calcolo l'elemento della velocità.

4.° Ritenuto adunque come principio indubitabile la predetta composta ragione della larghezza, altezza e velocità delle sezioni, da cui le acque si scaricano, per poterne con giustezza determinare la quantità, si accinsero gl' Idrometri ad indagare la legge cui conformasi la varia velocità al variare della profondità dei diversi punti della perpendicolare di una sezione qualunque di un corso d' acqua.

5.° Galileo considerando, che le acque come tutti gli altri corpi pesanti obbediscono alle leggi della gravità, e che gli alvei de' fiumi pei quali ne succede la discesa in forza della pendenza, di cui sono i medesimi dotati, ed in conseguenza della forza relativa della gravità; sostenne che la velocità delle acque correnti sia proporzionale alla sudduplicata ragione dell' altezza della caduta, non opponendosi a tal effetto le resistenze, e le irregolarità di cui il fondo de' fiumi è per l' ordinario sparso, ristagnando nelle diverse cavità il fluido, come avverte il Padre Abbate Grandi, togliendo le prominenze, e formando per tal maniera un piano levigato, su cui succede libero il movimento, se prescindere si voglia dall' adesione dell' acqua superiore che corre sulla inferiore che ristagna.

6.° Quindi conchiuse quell' inclito Filosofo che supposti due fiumi di differente lunghezza ma di eguale caduta, acquistano le acque al termine del loro corso la medesima velocità. Egli, per quanto sembra, non avvisò che attendendo alla sola caduta, e non alle resistenze incontrate acquisterebbero le acque discendenti un' immensa e spaventosa velocità, nè

potrebbe al loro urto far fronte qualunque sia più valida resistenza.

7.° Dalle dottrine del Galileo deducesi:

I.° Che comunque le resistenze cangino e modifichino la velocità delle acque correnti di maniera che non più si riconosce dipendente dalla caduta, pure discendono esse con moto accelerato che alla fine riducesi all'equabilità.

II.° Che le superficie dei fiumi convergono col fondo.

III.° Che per tale convergenza per un determinato tratto l'altezza delle sezioni superiori è maggiore dell'altezza delle inferiori, supposti i fiumi solitarj, e di costante inclinazione.

8.° Il Padre Abbate Castelli, che il primo avvertì dipendere la varia velocità corrispondente ai diversi punti d'una stessa perpendicolare dalla pressione dell'acqua sopraincombente, pretese di dimostrare che la velocità dell'acqua fluente da un tenue foro praticato nel fondo, o nelle pareti di un vaso in forza della pressione superiore deve divenire doppia, tripla ec. raddoppiandola, triplicandola ec.

9.° Cercò l'encomiato Autore cotanto benemerito alla scienza delle acque di applicare la stessa dottrina al corso dei fiumi, e tentò di darne la dimostrazione geometrica, ma non essendone soddisfatto si attenne all'esperienza.

10.° Introdusse egli l'acqua di un sifone in un recipiente, o canale qualunque, e ne ottenne una certa altezza: ne introdusse valendosi di quattro sifoni, la quantità dell'acqua fu quadrupla, e l'altezza soltanto doppia; l'acqua divenne nonupla, e l'altezza tripla valendosi di nove sifoni, e così successivamente, talchè le quantità d'acqua scaricate in egual tempo risultavano costantemente come i quadrati delle altezze vive, esprimendosi le velocità dalla progressione V, 2V, 3V ec. e le altezze dalla progressione A, 2A, 3A ec.

11.° Invertendo l'ordine delle esperienze, scaricò dapprincipio l'acqua mediante cento sifoni, e soppressi poscia diciannove, indi diciasette, quindici ec. sifoni, e ridotto successivamente il loro numero ad ottantuno, sessantaquattro,

quarantanove ec. l'altezza dell' acqua ebbe la diminuzione costante di un decimo della prima altezza.

Conchiuse quindi ciò stesso, che dapprima era stato da lui argomentato.

12.° La scala dunque delle velocità nel sistema del Padre Abbate Castelli viene rappresentata dalle linee perpendicolari all' altezza di un triangolo rettilineo rettangolo, pari a quella dell' acqua parallele alla base e terminate all' ipotenusa dello stesso triangolo.

13.° Il rammentato sistema fu seguito dal Barattieri, dal Montanari, dal Cassini, ed è stato richiamato ultimamente dal Mengotti, che dichiara, che ne' *fiumi uniti l'altezza e la velocità vanno prossimamente di pari passo procedendo ed aumentandosi l' una e l' altra con pari tenore.*

14.° Il teorema del Castelli fu contraddetto dal Guglielmini il quale opinò che le varie velocità abbiansi bensì ad ascrivere alle variabili altezze prementi delle acque, ma che la scala delle velocità stesse abbiasi a rappresentare dalle ordinate d'una parabola Apolloniana, come si verifica nel moto delle acque fluenti dal foro riferito all' ampiezza del fondo del vaso da cui esce l' acqua e riguardato come infinitamente piccolo.

15.° Il celebre Idrometra considerò i canali, ed i fiumi come immensi recipienti, che si vuotano per l' inferiore loro apertura, mentre sono per l' altra superiore alimentati dalle fonti, e dai rivi tributarj.

Distingue il Guglielmini la pendenza dell' alveo, e la pressione dell' acqua. Possono amendue produrre la velocità, la prima in proporzione della caduta, la seconda dipendentemente dall' altezza.

16.° Queste due cagioni giusta l' opinione del celebre Autore non operano giammai insieme combinate, ma soltanto per prevalenza. Quando l' effetto della pressione, ossia la velocità, che da questa puossi produrre è maggiore di quella che puossi acquistare dall' acqua in forza della caduta, la

prima diviene operosa; la seconda inoperosa; viceversa se succede il contrario, nello stesso modo che un corpo veloce non può essere urtato da un più lento, che lo insegue.

17.° Quindi s'inferisce, che ne' tronchi superiori, ove pesanti sono le materie, notabile la pendenza de' fiumi, tenue l' altezza dell' acqua, hassi ad attribuire la velocità alla caduta; viceversa ne' tronchi inferiori ove le materie sono minori, poca o nulla la pendenza, massima l'altezza dell' acque, nasce la velocità dalla pressione.

18.° A dimostrare come nella sezione de' Fiumi di notabile altezza abbia luogo la pressione, s' immagini coll'encomiato maestro, segato l' alveo con un piano verticale, che presenti un infinito numero di pertugi alle acque correnti; da ciascuno di essi in forza della pressione dell'acqua sopraincombente uscirà il fluido con velocità proporzionale alla radice quadrata dell' altezza dell' acqua premente. Si argomenti quindi che potendosi applicare lo stesso ragionamento a qualunque punto dell' immaginato piano verticale, si può risguardare ogni fiume conformato a strati forniti di varia velocità determinata dalla radice quadrata dell'altezza dell'acqua, che sovrasta a ciascuno strato.

Per tal maniera si trova la scala delle velocità corrispondente alle ordinate d' una parabola Apolloniana, come si è detto, avente il vertice alla superficie de' fiumi.

19.° Il sistema del Guglielmini, neglette le resistenze, fu solennemente professato dalla maggior parte degli Architetti d' acque d' Italia, e d'Oltremonti; mentre all' opposto uomini di estesa fama il combatterono, principalmente l' Idrometra Francese Bernard.

20.° Non essendo applicabile il principio che un corpo veloce non può essere urtato da un meno veloce, poichè l'uno fugge e si sottrae dall' azione dell' altro, non s'intende come le due cagioni (la declività dell' alveo, e la profondità dell' acqua) non possono agire combinate; non s' intende il limite fin dove operi la pendenza, ed ove operi la pressione, doven-

dosi trovare una sezione nel moto progressivo nella quale le due cagioni si eguagliano, e la prevalenza diviene nulla; non s' intende come nella stessa sezione la velocità della parte superiore del corso possa essere originata dalle pendenze, mentre la velocità dell' inferior parte dipende dalla pressione, e come i due strati che si toccano, e servono di limite alle due cagioni, continuino il loro movimento; non s' intende come nella superficie de' fiumi, ove nulla è la pressione, siano le acque dotate di un vivo corso, qualora non si abbia ricorso all' altezza equivalente introdotta ingegnosamente dal Padre Abbate Grandi; non s' intende in fine come due sezioni fornite di pari larghezza, ma che nell' una sia come quattro l'altezza dell'acqua, e nell'altra come uno, si reciprochino colle velocità nel rapporto di uno a quattro, (altrimenti le quantità delle acque non si eguaglierebbero) e nello stesso tempo la velocità della prima sia nel sistema del Guglielmini come due radice quadrata di quattro, e quella dell'altra come una radice quadrata dell' unità, cioè nella prima sezione la velocità debba essere quattro volte minore, ed insieme due volte maggiore della seconda, contraddizione manifesta come osserva il Mengotti.

21.° Taccio del sistema del Gennetè che pretese crescere la velocità delle acque correnti prossimamente in corrispondenza, ed in proporzione della varia loro quantità introdotta ne' fiumi appoggiato alle seguenti esperienze.

Impinguando un corso d'acqua di uno o di due rivi, la cui portata corrisponda in ciascuno alla metà dell' acqua di prima, e conseguentemente il corpo d'acqua corrisponda successivamente ad 1, $1\frac{1}{2}$, 2, egli riconobbe bensì aumentata la velocità, ma l'altezza si mantenne invariabile, e costante. Reso il numero dei rivi maggiore, ed aumentata successivamente la quantità dell' acqua introdotta come 3, 4, 5, 6, 7, crebbe eziandio la velocità, ma l' altezza dell' acqua corrispondente ebbe soltanto l'accrescimento di $\frac{1}{48}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{9}$ (veggasi il II Volume delle Istituzioni d'Idraulica teorica pratica dell' Autore.)

All' incontro scemando la quantità dell' acqua colla diminuzione del numero de' rivi introdotti, si ottenne la stessa progressione in ordine inverso.

22.° Non distinguendo il Gennetè il diverso stato de' fiumi, e non avvertendo che in tempo di gonfiezza più agevolmente si vincono le resistenze, per cui il decremento della velocità è assai minore, stabilì per teorema che il movimento de' fiumi cresce assai prossimamente come la quantità dell' acqua che si aggiunge, e scema in ragione di quella che toglie.

23.° L' illusione dell'Idrometra Olandese nacque appunto probabilmente per non essere stato da lui osservato, che trovandosi un fiume in piena somma fornito di considerevole velocità, può essere da questo ricevuto l' influsso di un altro fiume senza nessuno, o sensibile accrescimento di altezza, o perchè dalle resistenze costanti viene assai meno ritardato il corso delle acque aumentate e varianti; o perchè parte della sezione che prima del gonfiamento delle acque era inerte, e morta, diviene dopo viva ed operosa; o perchè ripieno alla foce un fiume dalle acque regurgitate dal recipiente, vengono queste spinte all' ingiù dalle acque crescenti, e per tal maniera viene la loro discesa animata senza aumento di altezza.

24.° Quindi si spiega come nelle sezioni in parte *morte* in tempo di acque ordinarie, e divenute in tutto operose al sopraggiungere di una piena in circostanza della quale l' opposizione delle resistenze si fa eziandio minore, si possa verificare, ciocchè fu osservato dal Lecchi, che pretendeva restringersi le sezioni del recipiente dopo la confluenza, e ciocchè fu avvertito dal Padre Frisi, che come si esprime il Professore Masetti, fu assai più discreto del Lecchi, cioè che l' area delle sezioni del recipiente presa sopra, e sotto la confluenza si conserva invariabile, e presso a poco costante.

25.° Nelle scale determinate dal Castelli e dal Guglielmini la velocità dovrebbe assai sensibilmente aumentare dalla superficie all' ima profondità delle acque e riscontrarsi massima, mentre in natura si verifica tutto all' opposto.

26.° Ne' predetti sistemi la scala delle velocità e rappresentata da una linea, o da una curva ad ordinate crescenti, mentre all' incontro avuto riguardo alle resistenze incontrate la curva ritorna in se stessa, e la celerità verso il fondo è minima, e pressocchè nulla.

27.° In fatti con reiterate prove interrogossi dal Mariotte l' esperienza, e trovossi che all'eccezione de' luoghi nei quali a motivo di qualche ostacolo si gonfiano le acque, e formano caduta come al passaggio de' ponti, i galleggianti erano rapiti con maggiore celerità dai corpi collocati verso il fondo, e che la differenza del moto era tanto più grande, quanto più i corpi immersi si accostavano al fondo.

28.° Il Bonati che replicò le sperienze di Mariotte, ed intorbidò un corso d' acqua col fango, osservò che la nuvoletta ondeggiante al dissopra della superficie era sospinta come quella posta al di sotto verso il fondo.

29.° Parve al Michelotti, ed al Ximenes che la media proporzionale aritmetica fra la velocità della superficie, e quella del fondo si confonda colla media velocità delle acque correnti.

30.° Stabilì il Prony che questa stessa media velocità riesce eguale alli quattro quinti circa della velocità superficiale, e più esattamente chiamando u la velocità media, v la superficiale, w quella del fondo diede la formola $u=v\left(\frac{v+2,372}{v+3,153}\right)$ preso il metro per unità.

31.° Laonde supponendo che la velocità superficiale non ecceda i tre metri per ogni secondo, velocità massima in pratica d' ordinario osservata, determina il Venturoli il rapporto delle tre velocità v, u, w, e lo esprime coi numeri 5, 4, 3 assai prossimamente.

32.° In generale dalle precedenti osservazioni, e dall' esperienze deducesi che negli alvei sparsi di resistenze la velocità delle acque correnti dalla superficie al fondo d'ordinario decresce, talvolta cresce secondo le particolari varie cir-

costanze; che il decremento, e ritardo succede lentamente; che in fine si fa maggiore rapidamente quanto più il fondo s' avvicina.

33.° Considerando gl' Idrometri che gli alvei de' fiumi si possono risguardare come altrettanti piani inclinati, e che le acque discendono per essi tratte dalla loro gravità relativa modificata dalle resistenze incontrate; chiamata g la gravità assoluta, chiamato ϕ l'angolo formato dalla verticale colla direttrice dell'alveo, chiamate R le resistenze incontrate, hanno conchiuso, che le acque correnti discendono con movimento uniformemente accelerato, e che la loro velocità riesce proporzionale all'espressione $g\cos.\phi - gR$. In conseguenza ridottosi il movimento all' uniformità, come si verifica nel corso delle acque dopo non lunga discesa, si avrà $g\cos.\phi - gR = o$, e perciò $\cos.\phi = R$, equazione nella quale restano a determinarsi le resistenze, affinchè si possa riguardare equabile negli alvei il movimento nelle acque.

34.° Il Coulomb fu il primo che stabilì potersi esprimere le resistenze mediante due termini, l' uno proporzionale al quadrato della velocità, l' altro alla velocità semplice, supponendo questi due termini inversamente proporzionali al così detto *raggio medio* cioè al rapporto fra l' area ed il perimetro della sezione. Per la qual cosa nominando M l' area d' una sezione, N il perimetro di essa bagnato dall'acqua; D il raggio medio, sarà $D = \frac{M}{N}$, e ritenuta la ipotesi del Coulomb si avrà la formola dei signori Girard, e Prony che rappresenta la legge delle resistenze incontrate dalle acque correnti

$$R = \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{D} \cdot \frac{u^2}{2g} + \frac{3B}{2D} u,$$

essendo a, B due coefficienti, il cui valore devesi determinare coll' esperienza.

Essendo poi $R = \cos.\phi$, sarà (sostituito il valore di R) $\frac{au^2}{2g} + Bu = \frac{2}{3}\,D\cos.\phi$.

35.° Il sig. Eytelwein appoggiandosi alle sperienze fatte dagli Ingegneri Tedeschi Brunizo, Munk, Woltman nel Reno di Germania, nel Weser, nello Yssel ed in varj canali di scolo, e dal Dubuat, in tutto novanta una esperienze, pensò che la supposta legge delle resistenze si verifichi generalmente, e determinò il valore de' coefficienti costanti a, B, cioè $\frac{3}{2}a = 0,007171\frac{3}{2}$, $B = 0,00024$. Conseguentemente ritrovato il valore di $\cos.\phi$, cioè il coseno dell' inclinazione dell' alveo alla verticale, coseno che risulta dividendo l'altezza del punto superiore sopra l' inferiore per la lunghezza interposta fra questi due punti; ritenuta l' espressione della gravità eguale al doppio spazio percorso da un grave che cade liberamente nel vuoto durante un minuto secondo $= 9,8088$, e chiamata u la velocità media si ottiene la prima delle due formole d' Eytelwein

$$u = -0,0038375.g + \sqrt{(0,0001145g^2 + 278.899 \times Dg\cos\phi)}$$

e sostituito il valore di g, si troverà

$$u = -0,03319 + \sqrt{(0,0011 + 2735,66D.\cos.\phi)}.$$

Trasportando il primo termine del secondo membro della precedente equazione per isolare il radicale, ed innalzando poscia i due membri dell' equazione al quadrato si ha il valore di $\cos.\phi = 0,007171\,\frac{u^2}{2gD} + 0,00024\,\frac{u}{D}$, che è la seconda delle formole del predetto Autore.

36.° Quindi conchiudesi pure che conoscendosi la media velocità u e nominando Q la portata di un fiume, ed A la sezione, si avrà per l' espressione della quantità dell' acqua scaricata per ogni minuto secondo dalla sezione medesima $Q = Au$, ed in conseguenza se si dirà q la quantità dell'acqua scaricata da un' altra sezione dello stesso fiume solitario, dovrà essere $Q = q$; ossia $Au = au'$, e perciò $A : a :: u' : u$.

37.° Nelle ricerche geometriche ed idrometriche fatte nella scuola degli Ingegneri Pontificj d'acque e strade nell' anno 1821 si fa menzione di tre diligentissime esperienze del Professore sig. Giorgio Bidone che si usarono ne'canaletti dello stabilimento idraulico della Reale Università di Torino, e che confrontate colla formola di Eytelwein corrisposero esattamente.

38.° Si ricordano ancora le prove del chiarissimo Teodoro Bonati, che determinò la portata del Po in istato di magra' di mezzana, di piena valendosi delle aste ritrometriche, e determinò (dividendo la portata del fiume per una sezione del Po presa poco sotto Lago-Scuro in tempo di acque basse e mezzane) la rispettiva media velocità di metri 0,687, e di metri 0,736 e collo stesso metodo rinvenne la velocità nel colmo di una grossa piena a Lagoscuro di metri 1,269. Calcolò successivamente attenendosi alla formola d' Eytelwein dipendentemente dal raggio medio, e dalla pendenza superficiale del fiume, ed ebbe la velocità per secondo del Po basso, del Po mezzano e del Po alto espresse dai seguenti valori metrici, 0,632, metri 0,758, metri 1,356 che prossimamente corrispondono alle velocità osservate, e più sopra riportate di metri 0,687, metri 0,736, metri 1,269.

39.° Le recenti esperienze de' Professori della scuola di Roma fatte nel Po, e nel Tevere, e dall' Ingegnere signor Vincenzo Bertelli hanno pure confermato la coincidenza del fatto colle deduzioni, che traggonsi dalla formola di Eytelwein, cioè che le resistenze incontrate dalle acque correnti hanno per espressione due termini, l' uno proporzionale al quadrato della velocità, l'altro alla velocità semplice.

40.° Noto in fine che il Professore Masetti, e la scuola degli Ingegneri Pontifici ritrovarono col sussidio della formola di Eytelwein l' alzamento prodotto nel Po in piena per l' influenza del Reno di metri 0,457 prossimamente, non molto diverso da quello che in questo caso particolare risulta dall' applicazione del sistema del Guglielmini modificato dal sullodato Masetti.

Io stesso ho data la soluzione dello stesso problema con eguale metodo nelle mie istituzioni.

41.° Le precedenti considerazioni, ed i precedenti esperimenti istituiti da uomini illustri non possono non imporre agli idrometri per indagare se le formole dell'Eytelwein sono generalmente applicabili ad ogni corso d' acqua, ai torrenti, ai fiumi, qualunque sieno le materie trasportate, la pendenza, il raggio medio.

42.° In circostanza ch' io dirigeva i lavori costrutti per l' innalzamento del nuovo Ponte sull'Arda a tre arcate nell' Emilia presso Fiorenzuola, esplorai la velocità superficiale della piena del torrente in quel luogo, e mi parve di metri 2. 50 per secondo.

Laonde nominata v questa velocità, u la velocità media, w la velocità del fondo, e determinata la velocità media colla formola riportata più sopra dal Prony $u=v\left(\frac{v+2.372}{v+3,153}\right)$, estimata col Ximenes, e col Michelotti la velocità del fondo terza proporzionale aritmetica della velocità superficiale e media trovasi $v=2,50$, $u=2,15$, $w=1.80$.

43.° Parimente fu osservata la velocità superficiale della piena d'Arda di metri 3,35 per secondo al Ponte di Castello Arquato, e fu determinata colla formola Prony la velocità media di metri 2,94.

44.° Per eguale maniera la velocità dell'Arda al Ponte di Cortemaggiore essendosi mostrata in piena di metri, 3, 50 per secondo, si trovò la velocità media di metri 3,08.

45.° Ora essendo, giusta i rilievi fatti dal sig. Ingegnere Montecchini, che mi fu cortese dandomene comunicazione, e che condusse i lavori del nuovo Ponte dell'Arda presso Fiorenzuola, assistito dal discepolo mio sig. Dottor Pasini, la larghezza superiore dell'Arda al ponte di Castell'Arquato distante da Fiorenzuola miglia sette circa, di metri 74,00, l'altezza della piena di metri 1,00 e perciò la sezione di metri quadrati 74,00, ed essendo la larghezza dello stesso torrente al

Ponte di Cortemaggiore posto al disotto alla distanza presso a poco di sei miglia di metri 16,50, l' altezza della piena di metri 4,30, e la sezione di metri quadrati 70,95.

Ritenendo la sezione di Fiorenzuola della larghezza viva eguale alla libera del Ponte di metri 49,50, dell' altezza in piena di metri 2,00, e della superficie di metri quadrati 99,00.

Applicando il noto teorema, che in un fiume, o torrente solitario ridotto all' equabilità come si verifica nell'Arda da Castello Arquato a Cortemaggiore, si reciprocano colle velocità le sezioni (36), altrimenti non passerebbe per ciascuna d' esse la stessa quantità d' acqua in egual tempo, si avranno le seguenti proporzioni, supposta costante la velocità calcolata media di Fiorenzuola, di metri 2,15 colle quali proporzioni si determina la quantità dell' acqua scaricata dall'Arda in piena in un minuto secondo, e le velocità reciproche di ciascuna sezione.

Sezione a Castell'Arquato.

			Metri	q.ti
Larghezza metri	74	00	74	00
Altezza della piena	1	00		

Sezione a Fiorenzuola

Larghezza metri	49	50	99	00
Altezza della piena	2	00		

Sezione a Cortemaggiore

Larghezza metri	16	50	70	95
Altezza della piena	4	30		

Colle proporzioni in cui le sezioni si reciprocano colle velocità medie, si calcola la portata del torrente, conoscendosi, e supposta costante come si è avvertito, la velocità media di Fiorenzuola computata di metri 2,15.

Sezione e velocità a Castell'Arquato paragonata con quella al Ponte di Fiorenzuola.

$$74 : 99 :: 2,15 : 2,876 \left\{ \frac{74 \times 2,876 = 212,824}{99 \times 2,13 = 212,85} \right. .$$

Sezione e velocità al Ponte di Fiorenzuola paragonata a quella di Cortemaggiore,

$$70,95 : 99 :: 2,15 : 2,999 \left\{ \frac{99 \times 2,15 = 212,85}{70,95 \times 2,999 = 212,778} \right. .$$

Sezione e velocità al Ponte di Castello Arquato paragonata a quella del Ponte di Cortemaggiore

$$74,00 : 70,95 :: 2,999 : 2,876 \left\{ \frac{74 \times 2,876 = 212,824}{70,95 \times 2,999 = 212,779} \right. .$$

46.° Le velocità adunque ritrovate mediante la reciproca ragione delle sezioni seguono a Castello Arquato, a Fiorenzuola, a Cortemaggiore la serie dei numeri 2,876; 2,15; 2,999 e quelle somministrate dall'osservazione sono 2,94; 2,15, 3,08.

La differenza fra queste velocità è assai tenue, che si possono esse considerare eguali ammettendo la loro coincidenza.

47.° Ora si determini la stessa velocità applicando all' Arda la formola di Eytelwein, e deducendone la velocità nelle sezioni da noi esaminate.

48.° La formola del predetto Autore sostituito il valore della gravità (35) è la seguente

$$u = -0,03319 + \sqrt{(0,0011 + 2735,66 . D\cos.\varphi)}$$

in cui D esprime il raggio medio, e cos.φ è il coseno dell'angolo formato dalla verticale colla linea direttrice, ossia col piano inclinato dell'alveo.

49.° La sezione a Castello Arquato è di metri quadrati 74,00. Il perimetro bagnato dall' acqua è di metri 76,00. Il raggio medio D sarà $= \frac{74}{76} = 0,9737$. La pendenza dell' alveo per metro è di 0,0079. e quindi cos.φ=0,008, e

$$D\cos.\varphi = 0,00779.$$

Conseguentemente sostituendo il predetto valore si trova colla formola di Eytelwein riportata al § 48, $u = 4{,}583$ colla quale velocità l'acqua percorrerebbe in un'ora miglia undici.

50.° La sezione a Fiorenzuola è di metri quadrati 99,00. Il perimetro bagnato dall'acqua è di metri 53,50 lineari, perciò il raggio medio $= \frac{99}{53{,}50} = 1{,}85$.

La pendenza dell'alveo per metro è di metri 0,006 e risulta $\cos.\varphi = 0{,}006$.

Colla formola predetta si ha $u = 5{,}48$.

Con questa velocità l'acqua percorrerebbe per ora miglia 13 e 1/10 circa.

51.° A Cortemaggiore la sezione è di metri quadrati 70,95, il perimetro bagnato dall'acqua di metri lineari 25,10 ed il raggio medio $D = \frac{70{,}95}{25{,}10} = 2{,}82$.

La pendenza dell'alveo per metro è di metri 0,003 per cui risulta $\cos.\varphi = 0{,}003$ e $D\cos.\varphi = 0{,}00846$, dal'qual valore sostituito nella formola si deduce $u = 4{,}777$, talchè il viaggio dell'acqua in un'ora corrisponderebbe a miglia 11 $\frac{1}{2}$ circa.

52.° Adunque constando dalle osservazioni generalmente adoperate ne' fiumi, e nei torrenti, che la massima velocità media suol essere o eccedere di poco i metri 3,00 per secondo, ed essendo le velocità dedotte dalla formola di Eytelwein notabilmente maggiori di tale misura, si pensa di potere inferire, che la predetta formola di Eytelwein può bensì servire ne' corsi d'acqua ne' quali è assai lieve la pendenza degli alvei, e sottili sono le materie trasportate giusta le verificazioni usate ne' canaletti della R. Università di Torino, nel Tevere, nel Po, nel Reno (§ 35, 37, 38 e 39); ma non è applicabile ai torrenti di cui gli alvei forniti sono di notabile pendenza, e che colla loro violenta discesa rapiscono dall'alto ghiaje, e materie pesanti.

53.° Dopo la precedente illazione, della cui evidenza, non si può dubitare, il sig. Dottor Giuseppe Pasetti giovane fornito di non comune intelligenza, ed istrutto nelle idrometriche

dottrine sospettò, che per qualsivoglia corso di acqua convenisse valersi della formola lasciataci dall'Idraulico Italiano Tadini contradditore d'Eytelwein, e ne provocò l'applicazione alle acque correnti nell'Arda. In fatti la soluzione de' seguenti problemi sembra dimostrare la generalità della predetta formola.

54.° *Problema* I. Nella formola Tadini, frutto di sessanta e più correnti diverse esplorate dall'Autore vengono espresse cinque quantità. Essendone cognite quattro si determina la quinta.

La formola è la seguente $\frac{pL^2A^3}{Q^2} = 0{,}00040$ nella quale p indica la pendenza della superficie per metro, e corrisponde a cos.φ, L la larghezza del canale, A l'altezza dell'acqua, Q la quantità dell'acqua scaricata in un secondo da una sezione, e la decimale 0,00040 è chiamata dal Tadini modulo, che è rigorosamente variabile ne' diversi corsi d'acqua.

Perchè indicato il modulo generalmente colla lettera M, cioè fatto $0{,}00040 = M$ vengono somministrate le seguenti equazioni

$$\frac{pL^2A^3}{Q^2} = M;\ p = \frac{Q^2M}{L^2A^3},\ L = \frac{Q}{A}\sqrt{\frac{M}{pA}};$$

$$A = \sqrt[3]{\frac{Q^2M}{pL^2}};\ Q = AL\sqrt{\frac{Ap}{M}}.$$

55.° *Problema* II. Conoscendo la velocità media al ponte d'Arda presso Fiorenzuola dedotta dall'osservazione, determinare il modulo.

La velocità media è stata stabilita di metri 2,15(§. 42). La pendenza p nell'indicato luogo è di metri 0,006 per metro; l'altezza A della piena è =metri 2,000 sotto la larghezza viva di metri 49,50.

Il modulo $M = \frac{pL^2A^3}{Q^2}$ (§. 54); perciò $pL^2A^2A = Q^2M$. conseguentemente

$$AL\sqrt{Ap} = Q\sqrt{M}\,;\ e\ \frac{Q}{AL} = \sqrt{\frac{Ap}{M}}\,;$$

ma $\frac{Q}{AL} = u$, in generale non avendo riguardo alle resistenze incontrate; dunque volendo tenere a calcolo anche queste sarà $u = \sqrt{\frac{Ap}{M}}$, equazione nella quale la velocità si modifica dal modulo proporzionevolmente alle resistenze medesime.

L' equazione stessa serve generalmente per l' invenzione del modulo, ove succedano cangiamenti. Dunque

$$u = \sqrt{\frac{Ap}{M}}\,,\ \text{ed}\ M = \frac{Ap}{u^2}.$$

Ora sostituendo i valori noti di u=2, 15, di A=2, e di p=0,006 come sopra, si trova M=0,002596 che è Il valore del modulo ricercato.

Collo stesso metodo richiamate le velocità dell'Arda ai ponti di Castello Arquato e di Cortemaggiore fornite dalla reciproca ragione di quelle sezioni (§ 45), cioè di metri 2,876, e di metri 2,999 rispettivamente, si trova il modulo per Castello Arquato M=0,000955 e per Cortemaggiore M=0,001434 in metri. . . . . . .

56.° *Problema* III. Essendosi determinati nel precedente problema i moduli per le sezioni dell' Arda ai ponti di Castello Arquato, di Fiorenzuola, e di Cortemaggiore col mezzo delle rispettive velocità, ora viceversa si ricerchino tali velocità essendo noti i moduli.

Dalla formola $u = \sqrt{\frac{Ap}{M}}$ (§ 55), sostituiti i valori di A, p ed M si ha

Per Castello Arquato $u = \sqrt{\left(\frac{0,0079}{0,00955}\right)} = 2,\ 87$

Per Fiorenzuola $u = \sqrt{\left(\frac{0,012}{0,002596}\right)} = 2,\ 15$

Per Cortemaggiore $u = \sqrt{\left(\frac{0,0129}{0,001434}\right)} = 2,\ 99$

57.° *Problema* IV. Conoscendo la larghezza, l'altezza e la pendenza del Po a Lago Scuro determinare la portata del fiume.

Si ritenga la formola riportata dal Tadini cioè $\frac{pL^2A^3}{Q}=0,00040$, e si richiami l'equazione $Q=AL\sqrt{\frac{Ap}{M}}$ (§ 54).

La larghezza del Po è di metri		288,875 = L
L'altezza della piena è di metri		11,403 = A
La pendenza per metro è di		0,000099571 = p
Il modulo	„	0,00040 = M

Sostituiti questi valori si trova $Q=5547,166$ che poco differisce dalla quantità scaricata dal Po servendosi della formola d'Eytelwein dalla quale si trae di metri cubi 5477,99.

58.° *Problema* V. Posta la larghezza media del Reno di metri 52,824, l'altezza della piena di metri 4,181, la pendenza per metro di 0,000245833 determinare la portata del fiume.

Colla stessa formola $Q=AL\sqrt{\frac{Ap}{M}}$ ritenuto il modulo $=0,00040$, si trova la quantità d'acqua scaricata dal Reno eguale a $Q=353,813$ che poco differisce da quella determinata colla formola di Eytelwein di m. c. 337,092.

Nota. Aumentando il modulo $M=0,00040$ di pochi milionesimi si ottengono risultati identici tanto coll'una, che coll'altra formola in amendue i fiumi.

59.° *Problema* VI. È nota la portata, l'altezza, la pendenza del Po, ed è nota pure la portata del Reno, si cerca quale sarà l'aumento dell'altezza del primo per l'influenza del secondo.

La portata del Po è calcolata di metri cubi 5547,156, la sua altezza di metri lineari 11,403, la larghezza di metri 288,875, la pendenza per metro di 0,000099571; la portata del Reno è di m. c. 353,813.

Conseguentemente la portata del Po accresciuto del Reno sarà di 5900,979.

La soluzione del problema si ottiene mediante la sostituzione de' riportati valori nell' equazione $A=\sqrt[3]{\frac{Q^2M}{pL^2}}$ (§ 54) e si troverà $A = 11{,}87$ prossimamente, altezza che deducesi eziandio facendo uso della formola di Eytelwein.

Osservazioni Generali.

60.° I. Si ripete ciò che è stato detto al § 52, che dopo i risultamenti de' precedenti problemi risoluti colla formola del Tadini, e paragonati con quelli che ottengonsi colla formola di Eytelwein resta confermato, che quest' ultima si può usare senza tema di gravi errori ne' corsi d' acqua forniti di poca pendenza, che trasportano tenui materie come ne' canali, e ne' fiumi maggiori, e che la prima generalmente è applicabile qualunque sieno le materie trasportate, e le pendenze come nei torrenti.

II. Essendosi ritrovato al § 55 problema secondo $u=\sqrt{\frac{Ap}{M}}$, apparisce che la velocità de' fiumi è proporzionale alla ragione suddupplicata della composta della diretta dell' altezza e della pendenza combinate, e dell' inversa del modulo affine di computare le resistenze, e conseguentemente che il Guglielmini ben si apponeva attribuendo la velocità alla radice quadrata della pressione e della caduta, ma s' ingannava sostenendo che queste due cagioni agiscono sempre divise, e soltanto per prevalenza.

III. I limiti fra i quali varia il modulo Tadini, sono assai sensibili nei torrenti per le resistenze che in essi variano senza legge quasi direbbesi dall' una all' altra sezione, mentre ne' fiumi di poca pendenza e che trasportano materie sottili, e poco pesanti, il modulo è variabile *fra brevi confini,* come accenna l'Autore atteso che le resistenze non molto variano, e si avvicinano all' uniformità nel progresso del corso.

IV. Poste tutte le altre cose pari, meno l'altezza, si trova colla formola Tadini il quadrato della quantità d' acqua scaricata da un fiume proporzionale al cubo delle altezze come avvertì il Guglielmini.

V. La velocità delle acque viene notabilmente modificata dall' inversa ragione del modulo, ossia dalle resistenze (§ 55), velocità che nella formola d' Eytelwein si fa costantemente dipendere dal perimetro della sezione bagnato dall'acqua, e secondo il Tadini dal modulo necessariamente assai variabile ne' torrenti per le addotte ragioni in questo paragrafo n.° III e contenuto *fra brevi* confini ne' grandi fiumi.

VI. Considerando come corpi gravi le acque discendenti dalla loro origine, e raccolti dai Rivi per formare i torrenti ed i fiumi, ben si comprende che la loro discesa deve succedere in forza della gravità relativa proporzionale al coseno dell'angolo d' inclinazione dell' alveo coll' orizzonte, e conseguentemente con moto accelerato il quale a poco, a poco si diminuisce per le resistenze incontrate, e riducesi in fine all' uniformità, quindi (Tomo I.°) bene opinò il Galileo osservando che la superficie de' fiumi solitarj, e disposti secondo una sola linea inclinata al loro fondo converge col fondo medesimo.

Che però ridotto il moto ad uniformità, se dal supremo punto di una sezione si condurrà una linea all'insù parallella al fondo, sino all'origine delle acque discendenti, si fa chiaro che resterà determinato superiormente un prisma d' acqua triangolare alla cui pressione nulla si oppone inferiormente, e spinge conseguentemente l' acqua posta al dissotto, cospirando coll' inclinazione del piano alla produzione della velocità. Sembra perciò che il movimento si aumenti perchè si fa maggiore la velocità già nata dalla discesa lungo il piano inclinato dell' alveo.

Resta così confermato l' inganno del Guglielmini che asserì non operare che per prevalenza l'inclinazione del piano, e la pressione dell' acqua.

E per vero essendo la pendenza di metri 0,006, l'altezza della piena = metri 2; se si moltiplicheranno (§ 60 II.) insieme queste due quantità, e si dividerà il prodotto pel ritrovato modulo =0,002596 (§ 55) e dal quoziente sarà estratta la radice quadrata, si otterrà la velocità media = metri 2,15 (§ 42).

Si determina eziandio collo stesso principio la velocità dell'Arda nel tronco medio tra il Ponte dell'Arda, e quello di Cortemaggiore supposto sempre il moto ridotto all'equabilità, e perciò costante la quantità dell'acqua scaricata da ogni sezione nell' unità del tempo. Prendasi la pendenza media fra le due rispettive 0,006, e 0,003 che trovasi $= \frac{0,006+0,003}{2} = 0,0045$, e l'altezza media delle piene che corrisponde a $\frac{2,00+4,30}{2} = 3,15$. Il prodotto di queste due quantità $= 0,014175$ si divida pel modulo medio $= \frac{0,002596+0,001434}{2} = 0,00215$; dal quoziente 7,03 si estragga la radice quadrata, e si troverà la velocità del suddetto tronco di metri 2,65. Essa è media fra le due velocità all'Arda, ed a Cortemaggiore $= \frac{\text{metri } 2,15+2,99}{2} =$ metri 2,57 trascurata la tenue differenza.

VII. È desiderabile che si replichino le esperienze, e l'applicazione della formola Tadini si estenda eziandio a molti, e diversi torrenti a conferma delle argomentazioni dedotte dal solo torrente Arda.

VIII. Io mi limito ad alcune applicazioni delle formole stesse fatte in circostanza ch'io dirigeva i lavori eseguiti nei torrenti Taro, e Mure.

Applicazione al torrente Taro.

La pendenza dell'alveo all'Emilia è per metro di 0,003; la larghezza circa di metri 690, l' altezza della piena è di metri 3,00; la velocità alla superficie di metri 2,50; e la

media dedotta dalla formola del Prony di metri 2,15 per secondo. Così si ritrova il modulo conveniente a questo tronco, applicando la formola del Tadini eguale a $\frac{pL^2A^3}{Q^4}=0,00195$.

Servendosi della formola di Eytelwein l' ampiezza della sezione riesce $=2070$, il perimetro bagnato dall' acqua

$$=690+2\times 3=696,\ \cos.\phi=0,003,$$

il raggio medio $D=\frac{2070}{696}=2,97$, e conseguentemente

$$u=0,0332+4,947=4,9802.$$

Tale velocità è maggiore della massima osservata ne' fiumi, e ne' torrenti che è di metri 3,00 o di poco più maggiore, e con essa si percorrerebbe dal Taro in un'ora la lunghezza di miglia 11 $\frac{2}{3}$ e più, ciascuno di metri 1500.

La pendenza del Taro al Micone superiormente a Fornuovo rimpetto al Comunello di Rubiano è di 0,0056 per metro.

La sua larghezza viva si considera eguale ad un terzo di quella della sezione del Taro mancando ivi l'influsso del Ceno, l' altezza della piena è di metri 2,10; la velocità superficiale è di metri 3,00, e la media di metri 2,61. Per le quali cose si trova $\frac{pL^2A^3}{Q^2}=0,00172$, ossia il modulo corrispondente al Micone.

Valendosi della formola di Eytelwein, ed essendo la superficie della sezione di metri quadrati 483,00 il perimetro bagnato dall' acqua = metri 234,20, il raggio medio

$$D=\frac{483,00}{234,20}=2,06,\ \cos.\phi=0,0056,$$

si ottiene $u=5,505$ di maniera che il viaggio di un' ora sarebbe maggiore di miglia 13 $\frac{1}{3}$.

Applicazione al torrente Mure.

La pendenza dell' alveo all' Emilia è come nel Taro, di metri 0,003 per metro; la larghezza viva, avuto riguardo alle resistenze o almeno alla contrazione della vena in ragione di 8,5 di metri 70,00; l' altezza della piena di metri 2,76; la velocità superficiale di metri 2,90, e la media di metri 2,52 prossimamente.

Si trova $\frac{pL^2A^3}{Q^2}$=0,00129 per l'espressione del modulo corrispondente.

Colla formola di Eytelwein si ha la superficie della sezione = metri quadrati 196, il perimetro bagnato dall' acqua $=70+2\times2,80=75,60$; il raggio medio $D=\frac{196}{75,60}=2,59$, $\cos.\phi=0,003$, ed $u=6,07$ di miglia $14\frac{1}{2}$ per ora.

La pendenza a Ponte dall' Olio è di metri 0,0075, la larghezza viva si ritiene di metri 70, l' altezza della piena è di metri 2,60, e la velocità media di metri 2,71, per cui si ha $\frac{pL^2A^3}{Q^2}=0,00265$ per l' espressione del rispettivo modulo.

Usando della formola di Eytelwein la superficie della sezione risulta di metri quadrati 182; il perimetro bagnato dall' acqua di metri $70+2\times2,60=75,20$ il raggio medio $D=\frac{182}{75,20}=2,42$, $\cos.\phi=0,0075$, ed u=metri 7,003 per secondo, ed il viaggio di un' ora poco meno di miglia 17,00.

61.° Confermasi sempre ciò che superiormente è stato dedotto, cioè (§ 57, 58, 59 e 60).

Che la formola Tadini si può generalmente adoperare pel calcolo della velocità in tutti i corsi d' acqua cioè ne' torrenti forniti di molta pendenza, e ne' fiumi, il cui alveo è fornito di tenue inclinazione, e che la formola di Eytelwein è soltanto applicabile a questi ultimi. Colla formola Tadini si hanno risultati ragionevoli e conformi all' esperienza per determinare la velocità, mentre colla formola di Eytelwein si ottengono velocità

notabilmente discrepanti dalle vere allora quando l' inclinazione è sensibile.

Lo stesso intendesi per le altre argomentazioni (§. 60.)

62.° Quindi è che ne' diversi fiumi, canali e torrenti, il modulo è rigorosamente variabile, che ne' fiumi maggiori viene esso espresso da una frazione decimale esprimente dei centomillimetri composta d' ordinario di due cifre nel numeratore, laddove ne' torrenti correnti in ghiaja le cifre sono tre per lo più.

63.° Si può ritenere ancora che crescendo la pendenza negli alvei, cresce pure il modulo, come si trae specialmente dall' osservazione sul Mure.

64. Notisi che ad ogni parziale tronco di torrente o fiume fornito di una determinata pendenza conviene un modulo particolare, e questo si determina colla formola $M = \frac{pL^2A^3}{Q^2}$ (§ 55) esplorando la velocità in tempo di piena di una conosciuta sezione. Per tal maniera si trovano i brevi confini fra i quali il modulo è variabile dall' uno all' altro tronco.

Forsechè (notasi eziandio) moltiplicando le esperienze, ed estendendo le osservazioni ai torrenti impetuosi, forniti di notabile pendenza, e correnti di corso equabile, non si potesse come ne' fiumi e canali di poca inclinazione, giungere a tale espressione della velocità, da cui dedurre pei primi i valori dei coefficienti A, B, applicabili e valevoli onde esprimere la misura, e la legge delle resistenze?

Perciò ritengonsi due formole, l'una pei fiumi, l'altra generale pei torrenti e pei fiumi, finchè siano temperati e modificati i coefficienti predetti per modo, che una sola formola generale serva per gli uni e gli altri corsi d' acqua.

Sembra però doversi in ogni ipotesi preferire la formola Tadini e per la semplicità, e per la non dubbia generalità, e per le spontanee conseguenze ch' indi ne nascono.

FINE DELLA PARTE FISICA DEL TOMO XXII.